



## PHÂN TÍCH BẬC HAI PHI ĐÀN HỒI CỘT ỐNG THÉP NHỒI BÊ TÔNG

Đinh Thị Như Thảo<sup>1</sup>, Lưu Thanh Bình<sup>2</sup>, Trần Duy Phương<sup>2</sup>, Nguyễn Văn Hiệp<sup>3</sup>  
Trương Hoài Chính<sup>4</sup>, Ngô Hữu Cường<sup>3\*</sup>

**Tóm tắt:** Bài báo này trình bày một chương trình máy tính được phát triển bằng ngôn ngữ lập trình C++ để phân tích cột ống thép nhồi bê tông chịu tải trọng tĩnh có kể đến tác động bậc hai và ứng xử phi đàn hồi. Ma trận độ cứng tiếp tuyến phi tuyến của phần tử cột được thiết lập bằng nguyên lý Rayleigh-Ritz với giả thiết có sự tương tác hoàn toàn giữa lõi bê tông và vỏ thép. Thuật toán chiều dài cung được áp dụng để giải hệ phương trình cân bằng phi tuyến. Kết quả phân tích của chương trình được so sánh với các nghiên cứu trước qua các ví dụ số để chứng tỏ độ tin cậy của chương trình đã được phát triển.

**Từ khóa:** Ống thép nhồi bê tông; tương tác toàn phần; tác động bậc hai; ứng xử phi đàn hồi, chương trình phân tích.

### Second-order inelastic analysis of concrete-filled steel tube columns

**Abstract:** This paper presents a computer program developed by C++ programming language for the analysis of concrete-filled steel tube columns subjected to static load with the consideration of second-order effects and inelastic behavior. The nonlinear tangent stiffness matrix of the column element is formulated by the Rayleigh-Ritz principle with the assumption of fully interaction between the concrete core and steel tube. The arc-length algorithm is also applied to solve the nonlinear equilibrium equation system. The analysis results of the program are compared to the previous research ones in some numerical examples to prove the reliability of the developed program.

**Keywords:** Concrete-filled steel tube; fully interaction; second-order effects; inelastic behavior, analysis program.

Nhận ngày 02/6/2017; sửa xong 31/7/2017; chấp nhận đăng 28/02/2018

Received: June 2<sup>nd</sup>, 2017; revised: July 31<sup>st</sup>, 2017; accepted: February 28<sup>th</sup>, 2018



### 1. Mở đầu

Cột ống thép nhồi bê tông có nhiều ưu điểm về mặt kết cấu, thi công và kiến trúc nên đã được ứng dụng rộng rãi trong các công trình cầu và nhà dân dụng trên thế giới. Mặc dù gần đây các phần mềm thiết kế trên máy tính cá nhân đã tích hợp mô-đun thiết kế loại cấu kiện này theo các tiêu chuẩn Hoa Kỳ và Châu Âu nhưng vẫn chưa tích hợp mô-đun phân tích phi tuyến hình học và vật liệu của cấu kiện. Do vậy, việc phát triển chương trình có thể phân tích phi tuyến loại cấu kiện này một cách tin cậy là điều cần thiết cho công tác thiết kế trực tiếp hoặc thiết kế theo sự làm việc của hệ kết cấu dùng giải pháp cột ống thép nhồi bê tông, đặc biệt là trong thiết kế kháng chấn dựa vào phân tích đẩy dãn.

Các nhà nghiên cứu trên thế giới đã thực hiện nhiều nghiên cứu để phát triển chương trình phân tích cho loại cấu kiện này. Hong [1] đã phát triển một chương trình phân tích đơn giản dựa vào phương pháp thứ để dự đoán ứng xử cột CFT chịu tải cơ và nhiệt đồng thời. Phương pháp Newmark đã được áp dụng để phân tích mất ổn định phi đàn hồi của cấu kiện có kể đến tác động của nhiệt và ứng xử mômen-độ cong-nhiệt độ của tiết diện. Tort và Hajjar [2] đã xây dựng một phần tử hữu hạn dựa vào lý thuyết dầm Euler-Bernoulli cho phân tích động phi tuyến cột ống thép nhồi bê tông tiết diện hình chữ nhật. Ma trận độ

<sup>1</sup> Th.S, Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp. Trường Đại học Bách Khoa-Đại học Đà Nẵng.

<sup>2</sup> Th.S, Khoa Kỹ thuật Xây dựng. Trường Đại học Bách Khoa-Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh.

<sup>3</sup> PGS.TS, Khoa Kỹ thuật Xây dựng. Trường Đại học Bách Khoa-Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh.

<sup>4</sup> PGS.TS, Trường Đại học Bách Khoa-Đại học Đà Nẵng.

\* Tác giả chính. E-mail: ngohuucuong@hcmut.edu.vn.

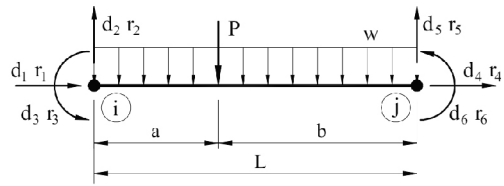
cứng và nội lực phần tử được phát triển bằng việc áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn kết hợp dựa vào nguyên lý biến phân Hellinger-Reissner có kể đến sự truyền lực giữa lõi bê tông và vỏ ống thép.

Chưa có nhiều nghiên cứu trong nước nghiên cứu phát triển chương trình phân tích phi tuyến cột ống thép nhồi bê tông. Nghiên cứu này phát triển một phần tử hữu hạn có kể đến tác động phi tuyến hình học và vật liệu cho phân tích phi tuyến cột ống thép nhồi bê tông có tiết diện tròn hoặc chữ nhật chịu tải trọng tĩnh nén-uốn phẳng với giả thiết sự tương tác giữa lõi bê tông và vỏ thép của phần tử cột là hoàn toàn. Nguyên lý Rayleigh-Ritz được áp dụng để thiết lập ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn CFT có kể đến các tác động phi tuyến hình học và vật liệu. Thuật toán chiều dài cung được áp dụng để giải hệ phương trình cân bằng phi tuyến. Kết quả phân tích của chương trình được so sánh với các nghiên cứu trước qua các ví dụ số để chứng tỏ độ tin cậy của chương trình đã được phát triển.

## 2. Cơ sở lý thuyết

### 2.1 Phần tử hữu hạn

Xét một phần tử hữu hạn cột CFT chịu các tải trọng tập trung  $P$  và phân bố  $w$  như Hình 1 trong đó  $\{r\}$  và  $\{d\}$  là các véctơ lực và chuyển vị nút hai đầu phần tử. Ma trận độ cứng và véctơ tải trọng của phần tử được thiết lập dựa vào các giả thiết cơ bản sau: Chấp nhận giả thuyết dầm Euler-Bernoulli; Xem tương tác giữa lõi bê tông và vỏ thép là toàn phần; Mô hình vật liệu của thép và bê tông trình bày trong Hình 2, Hình 3 và các phương trình (1), (2) và (3).

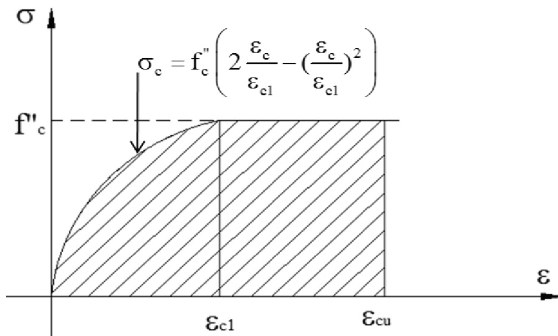


Hình 1. Phần tử hữu hạn cột CFT

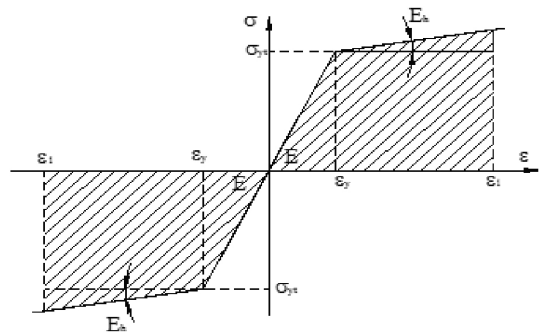
$$\sigma_c = f'_c \left( -2 \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)^2 \right) \quad \text{khi } 0 \geq \epsilon_c \geq -\epsilon_{c1} \quad (1)$$

$$\sigma_c = f''_c \quad \text{khi } \epsilon_c \leq -\epsilon_{c1} \quad (2)$$

trong đó:  $f'_c$  là cường độ chịu nén của mẫu trụ;  $f''_c = \beta f'_c$  là cường độ chịu nén của bê tông,  $\beta = 0,85$  đối với các nghiên cứu của Tanabe [4] và Bratina [5],  $\beta = 1$  đối với các nghiên cứu của Dinno [4] và Filippou [6].



Hình 2. Mô hình vật liệu bê tông theo EC2 [3]



Hình 3. Mô hình vật liệu thép

Để xét đến hiện tượng bó lõi bê tông, Kent và Park [7] đã đề xuất vẫn sử dụng công thức (1) cho mô hình vật liệu bê tông nhưng thay thế  $f'_c$  và  $\epsilon_{c1}$  bằng  $f'_{cc}$  và  $\epsilon_{cc}$ :

Đối với cột CFT tiết diện tròn:

$$f'_{cc} = f'_c + \frac{1,558 f_y}{D/t - 2}$$

$$\epsilon_{cc} = \begin{cases} \epsilon_{c1} \left[ 1 + 4,7 \left( \frac{f'_{cc}}{f'_c} - 1 \right) \right] & \text{khi } f'_{cc} < 1,5 f'_c \\ \epsilon_{c1} \left[ 3,35 + 20 \left( \frac{f'_{cc}}{f'_c} - 1,5 \right) \right] & \text{khi } f'_{cc} \leq 1,5 f'_c \end{cases} \quad (3)$$

với  $D$  là đường kính cột và  $t$  là bề dày vỏ thép.

Đối với cột CFT tiết diện chữ nhật:

$$f'_{cc} = f'_c; \varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c1} \quad (4)$$

Đối với mô hình của thép (Hình 3),  $E_s$  là mô-đun đàn hồi,  $E_h = 0,05E_s$  là mô-đun tái bền.

Biến dạng dọc trục của một điểm thờ cách trục trọng tâm một đoạn  $y$  trên tiết diện:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 - y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (5)$$

trong đó:  $d_x$  là chiều dài vi phân của phần tử theo phương dọc trục;  $v$  là hàm chuyển vị của phần tử.

Thế năng toàn phần của phần tử:

$$\Pi = U + V = \int_{V_s}^{\varepsilon_1} \sigma_s d\varepsilon_s dV_s + \int_{V_c}^{\varepsilon_{cu}} \sigma_c d\varepsilon_c dV_c - \int_0^L w(x)v(x)dx - P v(P) - \{f\}^T \{d\} \quad (6)$$

trong đó:  $\varepsilon_1$  là trạng thái biến dạng trong thể tích vi phân của thép;  $\sigma_s$  là ứng suất dọc trục mà phần tử vi phân thép phải chịu;  $\varepsilon_c$  là trạng thái biến dạng trong thể tích vi phân của bê tông;  $\sigma_c$  là ứng suất chính mà phần tử vi phân bê tông phải chịu;  $V_s$  là thể tích tổng cộng của thép;  $V_c$  là thể tích phần chịu nén của bê tông;  $v(P)$  là chuyển vị của phần tử tại điểm đặt lực tập trung  $P$ .

Đối với phần tử thép

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_{V_s}^{\varepsilon_1} \sigma_s d\varepsilon_s dV_s = \int_{V_s} \int_{\varepsilon} E_s \varepsilon d\varepsilon dV_s + \int_{V_p} \left\{ \int_0^{\varepsilon_y} E_s \varepsilon d\varepsilon + \int_{\varepsilon_y}^{\varepsilon} (\sigma_y - E_h \varepsilon_y + E_h \varepsilon) d\varepsilon \right\} dV_p \\ &= \int_{V_s} \int_{\varepsilon} E_s \varepsilon d\varepsilon dV_s + \int_{V_p} \left\{ \int_0^{\varepsilon_y} E_s \varepsilon d\varepsilon + \int_{\varepsilon_y}^{\varepsilon} \sigma_y d\varepsilon \right\} dV_p - \int_{V_p} \int_{\varepsilon_y}^{\varepsilon} (E_h \varepsilon_y - E_h \varepsilon) d\varepsilon dV_p \\ &= \int_{V_s} \frac{E_s \varepsilon^2}{2} dV_s + \int_{V_p} \sigma_y \varepsilon dV_p + \int_{V_p} \frac{E_h \varepsilon^2}{2} dV_p - \int_{V_p} E_h \varepsilon_y \varepsilon dV_p \end{aligned} \quad (7)$$

trong đó:  $V_s$  và  $V_p$  tương ứng là thể tích phần đàn hồi và phần đã tái bền của phần tử thép.

Thay ten-xơ biến dạng dọc trục vào (7), ta được:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{E_s}{2} \int_0^L \left[ A_e \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - 2S_e \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) \frac{du}{dx} + I_e \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right] dx \\ &+ \frac{E_s}{2} \int_0^L \left[ A_e \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 - S_e \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{A_e}{4} \left( \frac{dv}{dx} \right)^4 \right] dx \\ &+ \frac{P_{A_p}}{2} \int_0^L \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx + \frac{E_h}{2} \int_0^L \left[ A_p \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - 2S_p \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) \frac{du}{dx} + I_p \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right] dx \\ &+ \frac{E_h}{2} \int_0^L \left[ A_p \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 - S_p \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{A_p}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^4 \right] dx - \frac{1}{2} E_h \varepsilon_y A_p \int_0^L \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (8)$$

trong đó:  $A_e$  và  $A_p$  tương ứng là diện tích phần đàn hồi và phần tái bền của thép.

$$\begin{aligned} A_e &= \int_{A_e} dA_e & A_p &= \int_{A_p} dA_p \\ S_e &= \int_{A_e} y dA_e & N_p &= \int_{A_p} \sigma_y dA_p \\ I_e &= \int_{A_e} y^2 dA_e & M_{A_p} &= \int_{A_p} \sigma_y y dA_p \end{aligned}$$

Đối với phần tử bê tông:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{-f'_{cc}}{3\varepsilon_{cc}^2} \int_L \int_{A_{nc}} \varepsilon_c^3 dA_{nc} dx - \frac{1}{\varepsilon_{cc}} f'_{cc} \int_L \int_{A_{nc}} \varepsilon_c^2 dA_{nc} dx \\ &+ f'_{cc} \left\{ \frac{-1}{3\varepsilon_{cc}^2} \varepsilon_{cc}^3 - \frac{1}{\varepsilon_{cc}} \varepsilon_{cc}^2 - \varepsilon_{cc} \right\} \int_L \int_{A_{uc}} dA_{uc} dx + f'_{cc} \int_L \int_{A_{uc}} \varepsilon_c dA_{uc} dx \end{aligned} \quad (9)$$

trong đó:  $A_{nc}$  là diện tích phần bê tông có ứng suất nén nhỏ hơn  $f'_{cc}$ ;  $A_{uc}$  là diện tích phần bê tông có ứng suất nén lớn hơn  $f'_{cc}$ .



$$\begin{aligned}
 A_{nC} &= \int_{A_{nC}} dA_{nC}, \quad I_{ZnC} = \int_{A_{nC}} y^2 dA_{nC}, \quad S_{ZnC} = \int_{A_{nC}} y dA_{nC}, \quad A_{uC} = \int_{A_{uC}} dA_{uC}, \\
 N_{AnC} &= \int_{A_{nC}} f_c'' dA_{nC}, \quad M_{AnC} = \int_{A_{nC}} f_c'' y dA_{nC}, \quad N_{AuC} = \int_{A_{uC}} f_c'' dA_{uC}, \quad M_{AuC} = \int_{A_{uC}} f_c'' y dA_{uC}, \\
 C_{AnC} &= \int_{A_{nC}} y^3 dA_{nC}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Thay ten-xơ biến dạng dọc trục vào, ta được:

$$\begin{aligned}
 U_2 &= -\frac{1}{\varepsilon_{cc}} \int_0^L \left[ N_{AnC} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + I_{ZnC} f_c' \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 - 2M_{AnC} \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) \right] dx \\
 &+ \int_0^L \left[ -\frac{1}{\varepsilon_{cc}} \left( N_{AnC} \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 - M_{AnC} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) \right) \right. \\
 &\left. - \frac{1}{3\varepsilon_{cc}^2} \left( N_{AnC} \left( \frac{du}{dx} \right)^3 - 3M_{AnC} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) \right) \right. \\
 &\left. - \frac{1}{3\varepsilon_{cc}^2} \left( 3I_{ZnC} f_c' \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 - C_{AnC} f_c' \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^3 \right) \right] dx \\
 &+ \int_0^L \left[ -\frac{1}{4\varepsilon_{cc}} N_{AnC} \left( \frac{dv}{dx} \right)^4 - \frac{1}{2\varepsilon_{cc}^2} N_{AnC} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2\varepsilon_{cc}^2} I_{ZnC} f_c' \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right. \\
 &\left. + \frac{1}{\varepsilon_{cc}^2} M_{AnC} \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) \right] dx \\
 &+ \int_0^L \left[ -\frac{1}{4\varepsilon_{cc}^2} N_{AnC} \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^4 + \frac{1}{4\varepsilon_{cc}^2} M_{AnC} \left( \frac{dv}{dx} \right)^4 \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) \right] dx \\
 &+ \int_0^L \left[ -\frac{1}{24\varepsilon_{cc}^2} N_{AnC} \left( \frac{dv}{dx} \right)^6 \right] dx + \int_0^L \left[ \frac{N_{AuC}}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx
 \end{aligned} \tag{11}$$

Áp dụng Nguyên lý Rayleigh-Ritz cho hàm thế năng toàn phần của phần tử với hàm nội suy chuyển vị Hermit, ta có điều kiện cân bằng của toàn hệ tại các điểm nút. Ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử được tính toán như sau:

$$K_{r(i,j)} = \sum_m \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial d_i \partial d_j}; \quad (i, j = 1 \div 6) \tag{12}$$

### 2.2 Thuật toán và chương trình ứng dụng

Ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử vừa được thiết lập có chứa các ẩn số chuyển vị, các đặc trưng phi đàn hồi của mặt cắt ngang cứng như các nội lực của tiết diện khi phần tử làm việc ngoài miền đàn hồi. Nghiên cứu này áp dụng thuật toán chiều dài cung để giải hệ phương trình cân bằng phi tuyến trong sơ đồ lập-gia tăng. Một chương trình tự động hóa tính toán đã được phát triển cho máy tính cá nhân bằng ngôn ngữ lập trình C++ áp dụng thuật toán trên cho phân tích phi tuyến cột ống thép nhồi bê tông chịu tải trọng tĩnh.

## 3. Ví dụ số

Chương trình đã phát triển được sử dụng để phân tích lại các cột CFT đã được khảo sát thực nghiệm hoặc mô phỏng số bởi các tác giả khác để làm rõ độ tin cậy của nó trong việc dự đoán ứng xử phi tuyến của cấu kiện.

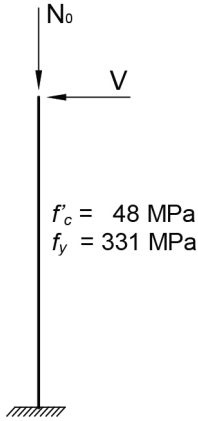
### 3.1 Cột CFT tiết diện vuông chịu tải dọc trục và tải ngang đẩy dần

Hong [1] đã thực hiện thí nghiệm cột CFT tiết diện vuông tiết diện  $d \times t = 254 \times 8$  với 2 giai đoạn gia tải ở đầu cột (Hình 4):

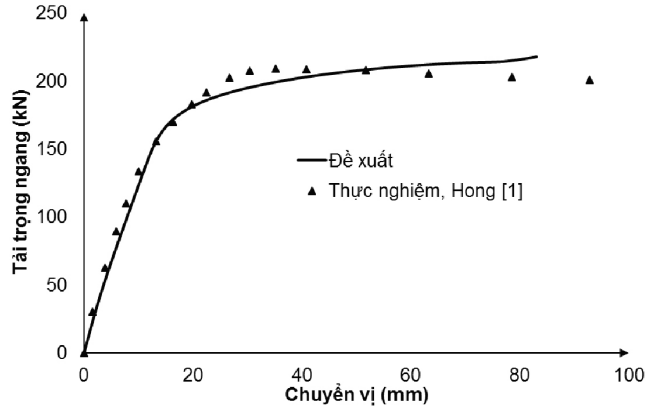
- Gia tải dọc trục tại đầu cột đến một giá trị  $N_0 = 0,164N_u$ , với  $N_u = A_s f_y + 0,85f_c A_c$  là khả năng chịu tải cực hạn dọc trục của cột CFT.

- Tác dụng lực ngang đẩy dần  $V$  vào đầu cột cho đến khi cột bị phá hoại.

trong đó:  $A_s$ ,  $f_y$ ,  $f_c$  và  $A_c$  lần lượt là diện tích vỏ thép, giới hạn chảy của thép, cường độ chịu nén của lõi bê tông và diện tích lõi bê tông.



**Hình 4.** Sơ đồ gia tải trong thí nghiệm của Hong [1]



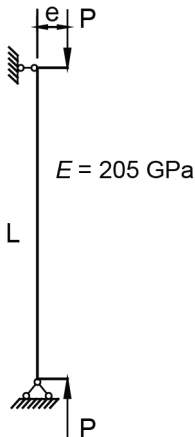
**Hình 5.** Quan hệ lực chuyển vị của cấu kiện CFT vuông của Hong [1]

Hình 5 trình bày quan hệ hệ số tải trọng-chuyển vị ngang ở đầu cấu kiện của phân tích số của chương trình đề xuất và khảo sát thực nghiệm của Hong [1]. Kết quả cho thấy chương trình đã phát triển dự đoán khá chính xác ứng xử phi tuyến của cột, đặc biệt là vùng chuyển cong đột ngột khi chân cột bắt đầu làm việc ngoài miền đàn hồi.

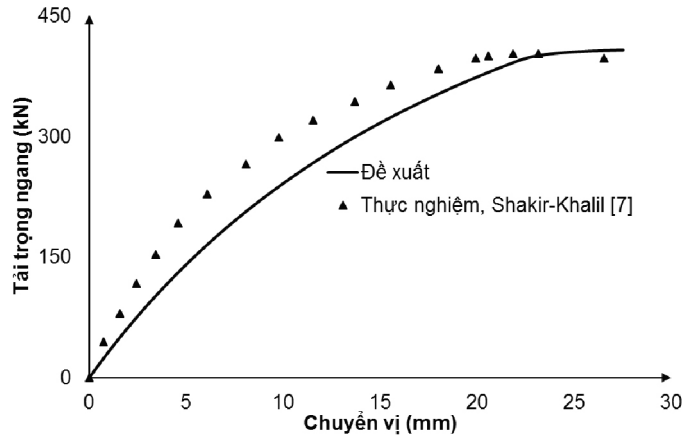
### 3.2 Cấu kiện CFT tiết diện chữ nhật chịu tải nén lệch tâm

Shakir-Khalil và Zeghiche (1989) [8] đã thực hiện thí nghiệm chịu tải nén dọc trục với các độ lệch tâm  $e = 24$  mm và  $e = 60$  mm trên cấu kiện ống thép nhồi bê tông có kích thước tiết diện  $D \times d \times t = 120 \times 80 \times 5$ , chiều dài  $L = 3120$  mm theo sơ đồ trình bày trên Hình 6.

Ứng xử lực-chuyển vị ngang của đầu cột và giá trị tải cực hạn của mẫu được trình bày trên Hình 8 và Bảng 1.



**Hình 6.** Sơ đồ thí nghiệm cột chịu nén lệch tâm của Shakir-Khalil và Zeghiche [7]



**Hình 7.** Quan hệ lực - chuyển vị của cấu kiện CFT chữ nhật Shakir-Khalil [7] khi  $e = 24$  mm

Kết quả phân tích cho thấy đường quan hệ lực-chuyển vị ngang đầu cột đạt được bằng chương trình đã phát triển khá gần đường thực nghiệm trong cả hai trường hợp cột chịu nén lệch tâm với  $e = 24$  mm và 60 mm. Bảng 1 cho thấy giá trị tải phá hoại dự đoán có sai số không đáng kể với giá trị thực nghiệm.

**Bảng 1.** So sánh với kết quả thực nghiệm của Shakir-Khalil [7]

Số hiệu	e (mm)	$f'_c$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	Tải cực hạn (kN)		Sai lệch (%)
				Thí nghiệm	Dự đoán	
2	24	34,0	386,3	393	406,6	+ 3,46
7	60	34,0	384,7	232	231,4	- 0,26

#### 4. Kết luận

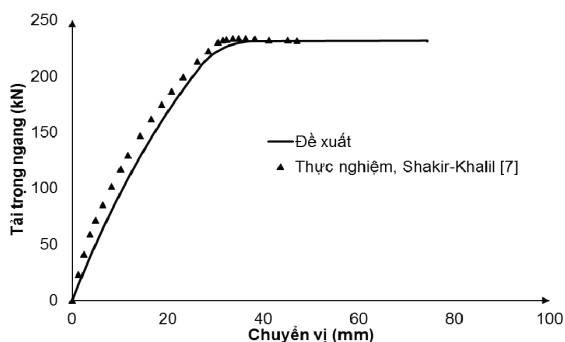
Một chương trình phân tích phi tuyến cột ống thép nhồi bê tông cho máy tính cá nhân đã được phát triển bằng ngôn ngữ lập trình C++ bằng thuật toán chiều dài cung. Ma trận độ cứng của phần tử được thiết lập qua việc áp dụng nguyên lý Rayleigh-Ritz có xem xét tác động phi tuyến hình học và ứng xử phi đàn hồi của phần tử. Việc so sánh kết quả phân tích với các kết quả thực nghiệm cho thấy chương trình đã phát triển dự đoán khá chính xác ứng xử phi tuyến của cột ống thép nhồi bê tông và có thể được dùng trong nghiên cứu và thiết kế thực tiễn.

#### Lời cảm ơn

Nghiên cứu được tài trợ bởi Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (ĐHQG-HCM) trong khuôn khổ Đề tài mã số C2015-20-13.

#### Tài liệu tham khảo

- Hong S. (2007), *Fundamental Behavior and Stability of CFT Columns under Fire Loading*, Ph.D. Dissertation, Purdue University.
- Tort C., Hajjar J.F. (2010), "Mixed finite element for three-dimensional nonlinear dynamic analysis of rectangular concrete-filled steel tube beam-columns", *Journal of Engineering Mechanics*, 136(11):1329-1339.
- Eurocode 2: *Design of concrete structures; Part 1-1 General rules and rules for buildings*.
- Spacone E., Filippou E.C., Taucer F.F. (1996), "Fibre beam-column model for non-linear analysis of RC frames: Part II. Formulation," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25:727-742.
- Taucer F.F., Spacone E., Filippou F.C. (1991), *A Fiber Beam-Column Element for Seismic Response Analysis of Reinforced Concrete Structures*, Report No. UCB/EERC-91/17.
- Vecchio F.J., Emara M.B. (1992), "Shear deformations in reinforced concrete frames", *ACI Structural Journal*, 89(1):46-56.
- Kent D.C., Park R. (1971), "Flexural members with confined concrete", *Journal of Structural Division ASCE*, 97(7):1969-1990.
- Shakir-Khalil H., Zeghiche J. (1989), "Experimental behavior of concrete-filled rolled rectangular hollow-section columns", *The Structural Engineer*, 68(20):405-413.



**Hình 8.** Quan hệ lực - chuyển vị của cột CFT chữ nhật Shakir-Khalil [7] khi e = 60 mm