

PHÂN TÍCH KẾT CẤU TẤM SANDWICH CHỊU UỐN THEO LÝ THUYẾT CHUYỂN VỊ BẬC CAO

TS. Trần Minh Tú

Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp
Trường Đại học Xây dựng

Tóm tắt: Mục đích của bài báo là đánh giá sai số giữa các mô hình tính theo các lý thuyết biến dạng cắt khác nhau trong phân tích ứng xử tĩnh của kết cấu tấm composite dạng sandwich. Lời giải giải tích được xây dựng theo phương pháp nghiệm Navier cho kết cấu tấm tựa bản lề trên chu vi. Các kết quả số được so sánh với các kết quả của một số tác giả khác đã công bố nhằm kiểm chứng lời giải của các mô hình tính mà bài báo đưa ra.

Summary: The goal of the present study is to assess the accuracy of few computational models based on different shear deformation theories in predicting static behaviors of sandwich plates. The performances of various models are evaluated on simply supported sandwich plates. The equations of equilibrium are obtained using the principle of minimum potential energy. Analytical solution method is based on Naviers technique by solving the boundary value problem. The accuracy of each model is established by comparing the present results with the elasticity solutions and the results are already available in the literature.

1. Mở đầu

Kết cấu sandwich là một trong những kết cấu được sử dụng rộng rãi nhất trong các ngành công nghiệp hàng không, vũ trụ, tàu, thuyền, ô tô,..., và nhiều lĩnh vực công nghiệp dân dụng khác. Kết cấu này có nhiều lợi thế so với kết cấu thông thường như độ bền và độ cứng uốn cao, trọng lượng nhẹ, cách âm, cách nhiệt tốt, giá cả hợp lý. Các kết cấu dầm và tấm sandwich điển hình thường bao gồm phần lõi dạng tổ ong, dạng bọt, hay bột gỗ nằm giữa hai lớp bề mặt đẳng hướng hoặc dị hướng. Các lớp bề mặt được thiết kế để chịu được chủ yếu ứng suất uốn, trong khi lớp lõi chủ yếu chịu ứng suất cắt. Bằng cách đưa lớp vật liệu bề mặt ra xa mặt trung bình, độ cứng uốn của kết cấu được tăng cường tương tự như dầm tiết diện chữ I. [1, 2, 3]

Lý thuyết tấm nhiều lớp cổ điển [8] phát triển trên cơ sở lý thuyết tấm cổ điển, bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang đã không còn thích hợp khi phân tích các kết cấu tấm nhiều lớp, và đặc biệt là tấm sandwich. Lý thuyết bậc nhất của Reissner-Mindlin [4;6] đã giả thiết trường chuyển vị biến thiên bậc nhất dọc theo chiều dày kết cấu, tuy nhiên cần phải xác định hệ số hiệu chỉnh cắt khi chiều dày tấm tăng lên. Để khắc phục hạn chế này của lý thuyết bậc nhất, lý thuyết chuyển vị bậc cao đã được đề xuất khi kể đến các số hạng bậc cao trong khai triển chuỗi Taylor hàm chuyển vị theo tọa độ chiều dày kết cấu. Số lượng các số hạng bậc cao là các ẩn số cần tìm phụ thuộc vào từng lý thuyết.

2. Các mô men chuyển vị

Để phân tích trường ứng suất và biến dạng trong kết cấu tấm sandwich chịu uốn, người ta thường sử dụng các mô hình chuyển vị sau đây:

a. Mô hình 1 [12]

$$\begin{aligned}u &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2 u_0^*(x, y) + z^3 \theta_y^*(x, y) \\v &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2 v_0^*(x, y) + z^3 \theta_x^*(x, y) \\w &= w_0(x, y) + z\theta_z(x, y) + zw_0^{*2}(x, y) + z^3 \theta_z^*(x, y)\end{aligned}\quad (1)$$

trong đó: u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của mặt trung bình theo các phương x, y, z .

θ_x, θ_y là các góc xoay của mặt pháp tuyến quanh hai trục y, x .

$u_0^*, v_0^*, w_0^*, \theta_x^*, \theta_y^*, \theta_z^*$ là các thành phần bậc cao trong khai triển chuỗi Taylor.

b. Mô hình 2 [8]

Với giả thiết chuyển vị pháp tuyến là hằng số theo toạ độ chiều dày, phương trình (1) trở thành:

$$\begin{aligned}u &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2 u_0^*(x, y) + z^3 \theta_y^*(x, y) \\v &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2 v_0^*(x, y) + z^3 \theta_x^*(x, y) \\w &= w_0(x, y)\end{aligned}\quad (2)$$

c. Mô hình 3 [9]

Trường chuyển vị được giả thiết dưới dạng:

$$\begin{aligned}u &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \\v &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\w &= w_0(x, y)\end{aligned}\quad (3)$$

d. Mô hình 4 [9]

Theo mô hình này, trường chuyển vị giả thiết dưới dạng sau:

$$\begin{aligned}u &= u_0(x, y) + z \left\{ \theta_x(x, y) - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left[\theta_x(x, y) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \right\} \\v &= v_0(x, y) + z \left\{ \theta_y(x, y) - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left[\theta_y(x, y) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] \right\} \\w &= w_0(x, y)\end{aligned}\quad (4)$$

e. Mô hình 5 [9]

Khi giả thiết chuyển vị pháp trong mặt trung bình có thể phân tích thành hai thành phần chuyển vị pháp w_0^u do uốn và chuyển vị pháp w_0^c do cắt, trường chuyển vị có dạng:

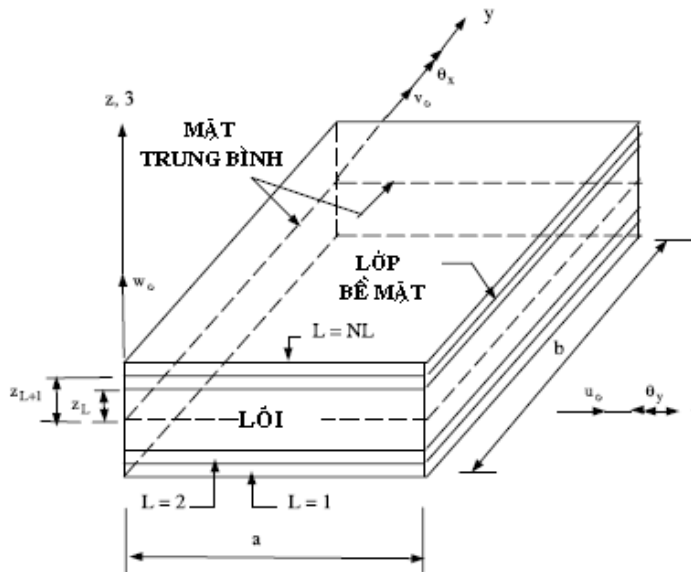
$$\begin{aligned}
u &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0^u}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial w_0^c}{\partial x} \\
v &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0^u}{\partial y} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial w_0^c}{\partial y} \\
w &= w_0^u(x, y) + w_0^c(x, y)
\end{aligned} \tag{5}$$

Với các mô hình chuyển vị kể trên Azar [1], Liaw và Little [3], Reissner [5] đã xây dựng lời giải giải tích theo mô hình chuyển vị bậc nhất với các kết quả số cho các kết cấu và vật liệu cụ thể. Mô hình chuyển vị bậc cao được Reddy [8], T.M.Tú [10],... sử dụng để xây dựng thuật toán phần tử hữu hạn cho tính toán số các kết cấu tấm và vỏ composite lớp.

Trong bài này, tác giả xây dựng lời giải giải tích với hai mô hình chuyển vị: bậc ba đầy đủ (mô hình 1) và bậc ba không đầy đủ (mô hình 2) cho kết cấu tấm sandwich chữ nhật tựa bản lề trên chu vi nhằm cung cấp thêm một kết quả để kiểm chứng với các lời giải phần tử hữu hạn trong một số trường hợp riêng.

3. Trường biến dạng và ứng suất

Xét tấm sandwich có lớp bề mặt gồm các lớp composite cốt sợi đồng phương, lớp lõi có chiều dày không đổi và lớn hơn nhiều so với chiều dày lớp bề mặt. Kích thước hình học của tấm sandwich thể hiện trên hình vẽ 1.



Hình 1. Kích thước hình học tấm sandwich

Từ mô hình chuyển vị bậc ba đầy đủ (1), ta nhận được trường biến dạng có dạng sau:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= u_{,x} = \varepsilon_{x0} + z.k_x + z^2 \varepsilon_{x0}^* + z^3 k_x^* \\
\varepsilon_y &= u_{,y} = \varepsilon_{y0} + z.k_y + z^2 \varepsilon_{y0}^* + z^3 k_y^* \\
\varepsilon_z &= u_{,z} = \varepsilon_{z0} + z.k_z + z^2 \varepsilon_{z0}^* + z^3 k_z^* \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = \gamma_{xy0} + z.k_{xy} + z^2 \gamma_{xy0}^* + z^3 k_{xy}^* \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\gamma_{xz} = u_z + w_x = \gamma_{xz0} + z.k_{xz} + z^2\gamma_{xz0}^* + z^3k_{xz}^*$$

$$\gamma_{yz} = v_z + w_y = \gamma_{yz0} + z.k_{yz} + z^2\gamma_{yz0}^* + z^3k_{yz}^*$$

với:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} & \varepsilon_{y0} & \gamma_{xy0} \end{Bmatrix}^T &= \begin{Bmatrix} u_{0'x} & v_{0'y} & u_{0'y} + v_{0'x} \end{Bmatrix}^T \\ \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xo}^* & \varepsilon_{yo}^* & \gamma_{xy0}^* \end{Bmatrix}^T &= \begin{Bmatrix} u_{0'x}^* & v_{0'y}^* & u_{0'y}^* + v_{0'x}^* \end{Bmatrix}^T ; \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z0} & \varepsilon_{z0}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_z & 3\theta_z^* \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} k_x & k_y & k_z & k_{xy} \end{Bmatrix}^T &= \begin{Bmatrix} \theta_{x'x} & \theta_{y'y} & 0 & \theta_{y'x} + \theta_{x'y} \end{Bmatrix}^T \\ \begin{Bmatrix} k_x^* & k_y^* & k_z^* & k_{xy}^* \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \theta_{x'x}^* & \theta_{y'y}^* & 0 & \theta_{y'x}^* + \theta_{x'y}^* \end{Bmatrix}^T \quad (7) \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz0} & \gamma_{xz0} \end{Bmatrix}^T &= \begin{Bmatrix} \theta_y + w_{0'y} & \theta_x + w_{0'x} \end{Bmatrix}^T \\ \begin{Bmatrix} k_{xz} & k_{yz} \end{Bmatrix}^T &= \begin{Bmatrix} 2u_0^* + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} & 2v_0^* + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \end{Bmatrix}^T \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz0}^* & \gamma_{xz0}^* \end{Bmatrix}^T &= \begin{Bmatrix} 3\theta_y^* & 3\theta_x^* \end{Bmatrix}^T ; \begin{Bmatrix} k_{xz}^* & k_{yz}^* \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_z^*}{\partial x} & \frac{\partial \theta_z^*}{\partial y} \end{Bmatrix}^T \end{aligned}$$

Với vật liệu đàn hồi tuyến tính, ứng suất trong lớp thứ k được suy ra từ định luật Hooke:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{pmatrix} Q_{11}' & Q_{12}' & Q_{13}' & Q_{14}' & 0 & 0 \\ & Q_{22}' & Q_{23}' & Q_{24}' & 0 & 0 \\ & & Q_{33}' & Q_{34}' & 0 & 0 \\ & & & Q_{44}' & 0 & 0 \\ DX & & & & Q_{55}' & Q_{56}' \\ & & & & & Q_{66}' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_k \quad (8)$$

trong đó Q_{ij}' là các hằng số ma trận độ cứng lớp vật liệu thứ k trong hệ trục tọa độ tổng thể của kết cấu, được xác định qua ma trận biến đổi hệ cơ sở ứng suất, biến dạng và các hằng số ma trận độ cứng Q_{ij} của lớp vật liệu xác định theo các mô đun kỹ thuật [10].

Tích phân các thành phần ứng suất dọc theo chiều dày tấm ta thu được các thành phần nội lực.

$$\begin{bmatrix} N_x & M_x & N_x^* & M_x^* \\ N_y & M_y & N_y^* & M_y^* \\ N_z & M_z & N_z^* & 0 \\ N_{xy} & M_{xy} & N_{xy}^* & M_{xy}^* \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \end{bmatrix} dz$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & S_x & Q_x^* & S_x^* \\ Q_y & S_y & Q_y^* & S_y^* \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \end{bmatrix} dz \quad (9)$$

Quan hệ nội lực - biến dạng có thể biểu diễn dưới dạng sau

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_x^* & N_y^* & N_z & N_z^* & M_x & M_y & M_x^* & M_y^* & M_z \end{Bmatrix}^T = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} & \varepsilon_{y0} & \varepsilon_{x0}^* & \varepsilon_{y0}^* & \varepsilon_{z0} & \varepsilon_{z0}^* & k_x & k_y & k_x^* & k_y^* & k_z \end{Bmatrix}^T \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xy} \\ N_{xy}^* \\ M_{xy} \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} & \varepsilon_{y0} & \varepsilon_{x0}^* & \varepsilon_{y0}^* & \varepsilon_{z0} & \varepsilon_{z0}^* & k_x & k_y & k_x^* & k_y^* & k_z \end{Bmatrix}^T + [B'] \begin{Bmatrix} \gamma_{xy0} \\ \gamma_{xy0}^* \\ k_{xy} \\ k_{xy}^* \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_x^* \\ S_x \\ S_x^* \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz0} \\ \gamma_{xz0}^* \\ k_{xz} \\ k_{xz}^* \end{Bmatrix} + [D'] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz0} \\ \gamma_{yz0}^* \\ k_{yz} \\ k_{yz}^* \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_y^* \\ S_y \\ S_y^* \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz0} \\ \gamma_{xz0}^* \\ k_{xz} \\ k_{xz}^* \end{Bmatrix} + [E'] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz0} \\ \gamma_{yz0}^* \\ k_{yz} \\ k_{yz}^* \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Biểu thức cụ thể của các ma trận [A], [A'], [B], [B'], [D], [D'], [E], [E'] được thể hiện trong [6].

4. Hệ phương trình cân bằng

Các phương trình cân bằng của tấm được thành lập bởi nguyên lý cực tiểu thế năng toàn phần [4].

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial N_x^*}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial y} - 2S_x &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial N_y^*}{\partial y} - 2S_y &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_z &= 0; & \frac{\partial Q_x^*}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^*}{\partial y} - 2M_z^* + \frac{h^2}{4} p_z &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0; & \frac{\partial M_x^*}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial y} - 3Q_x^* &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0; \quad \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial M_y^*}{\partial y} - 3Q_y^* = 0 \\ \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} - N_z + \frac{h}{2} p_z &= 0; \quad \frac{\partial S_x^*}{\partial x} + \frac{\partial S_y^*}{\partial y} - 3N_z^* + \frac{h^3}{8} p_z = 0\end{aligned}$$

Biểu diễn các thành phần biến dạng trong (10), (11) và (12) theo các thành phần chuyển vị trong (7) ta nhận được biểu thức các thành phần nội lực theo chuyển vị. Thay các thành phần nội lực biểu diễn theo chuyển vị vào (13) ta nhận được hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị.

5. Lờì giải giải tích

Với tám chữ nhật tựa bản lờ trên các cạnh, điều kiện biên gồm:

Trên cạnh $x = 0$ và $x = a$:

$$\begin{aligned}u_0 &= 0, \quad w_0 = 0, \quad \theta_y = 0, \quad \theta_z = 0, \quad M_x = 0, \quad v_0^* = 0, \\ w_0^* &= 0, \quad \theta_y^* = 0, \quad \theta_z^* = 0, \quad M_x^* = 0, \quad N_x = 0, \quad N_x^* = 0.\end{aligned}\quad (14)$$

Trên cạnh $y = 0$ và $y = a$:

$$\begin{aligned}u_0 &= 0, \quad w_0 = 0, \quad \theta_x = 0, \quad \theta_z = 0, \quad M_y = 0, \quad u_0^* = 0, \\ w_0^* &= 0, \quad \theta_x^* = 0, \quad \theta_z^* = 0, \quad M_y^* = 0, \quad N_y = 0, \quad N_y^* = 0.\end{aligned}\quad (15)$$

Các hàm chuyển vị được chọn dưới dạng chuỗi kép Fourier thoả mãn điều kiện biên (14) và (15):

$$\begin{aligned}u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad u_0^* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn}^* \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}; \quad v_0^* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn}^* \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad w_0^* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn}^* \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \theta_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad \theta_x^* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{xmn}^* \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \theta_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{ymn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}; \quad \theta_y^* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{ymn}^* \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ \theta_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{zmn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad \theta_z^* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{zmn}^* \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\end{aligned}\quad (16)$$

Khai triển tải trọng dưới dạng:

$$p_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{zmn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\quad (17)$$

Thay (16), (17) vào hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị (nhận được từ (13)) ta thu được phương trình:

$$[H]_{12 \times 12} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \\ u_0^* \\ v_0^* \\ w_0^* \\ \theta_x^* \\ \theta_y^* \\ \theta_z^* \end{Bmatrix}_{12 \times 1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_z \\ 0 \\ 0 \\ p_z \frac{h}{2} \\ 0 \\ 0 \\ p_z \frac{h^2}{4} \\ 0 \\ 0 \\ p_z \frac{h^2}{8} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

với giá trị bất kỳ của m, n. Các số hạng của ma trận [H] được xác định với sự trợ giúp của phần mềm tính toán MAPLE 10

6. Kết quả số

Các ví dụ số dưới đây được thực hiện nhằm tính toán trường chuyển vị và trường ứng suất trong tấm sandwich theo các mô hình chuyển vị khác nhau. Với mô hình bậc nhất, lấy hệ số hiệu chỉnh cắt bằng 5/6. Các vật liệu sử dụng khi tính toán có các hằng số đàn hồi sau [9]:

- *Lớp bề mặt*: $E_1=131 \text{ GPa}$; $E_2=E_3= 10,34 \text{ GPa}$; $G_{12}=G_{23}=6,895 \text{ GPa}$; $G_{13}=6,205 \text{ GPa}$;

$\nu_{12}=\nu_{13}=0,22$; $\nu_{23}=0,49$.

- *Lớp lõi*: $E_1=E_2=E_3= 2G=6,9 \cdot 10^{-3} \text{ GPa}$; $G_{12}=G_{13}=G_{23}= 3,45 \cdot 10^{-3} \text{ GPa}$; $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0$.

Các đại lượng không thứ nguyên tính theo:

$$\bar{u} = u \left(\frac{100h^3 E_2}{p_0 a^4} \right) ; \quad \bar{v} = v \left(\frac{100h^3 E_2}{p_0 a^4} \right) ; \quad \bar{w} = w \left(\frac{100h^3 E_2}{p_0 a^4} \right) ;$$

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x \left(\frac{h^2}{p_0 a^2} \right) ; \quad \bar{\sigma}_y = \sigma_y \left(\frac{h^2}{p_0 a^2} \right) ; \quad \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} \left(\frac{h^2}{p_0 a^2} \right) ;$$

Các thành phần chuyển vị và ứng suất lớn nhất xác định tại các điểm có tọa độ:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{u}(0, b/2, \pm h/2) & \sigma_x, \sigma_y(a/2, b/2, \pm h/2) \\ \mathbf{v}(a/2, 0, \pm h/2) & s_{xy}(, 0, \pm h/2) ; \mathbf{w}(a/2, b/2, 0) \end{array}$$

Kết quả được so sánh với:

a. *Lời giải giải tích của Kant và Swaminathan [9] theo các mô hình:*

- Mô hình 3 - mô hình chuyển vị bậc nhất.

- Mô hình 4 - mô hình chuyển vị bậc nhất cải biên (áp đặt thoả mãn điều kiện biên ứng suất cắt ngang mặt trên và dưới bằng không).

- Mô hình 4 - dựa trên lý thuyết chuyển vị bậc nhất, phân tích chuyển vị theo phương chiều dày thành hai thành phần: chuyển vị do uốn và chuyển vị do lực cắt (thoả mãn điều kiện ứng suất cắt ngang mặt trên và dưới bằng không).

b. Lời giải của Pagano [14]

Pagano dựa vào lý thuyết đàn hồi ba chiều xây dựng lời giải giải tích cho tấm composite lớp và tấm sandwich.

Ví dụ 1: Tấm sandwich vuông ($0^\circ/0^\circ/0^\circ$) chiều dày h. Chiều dày mỗi lớp bề mặt là h/10.

Chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên tính với các tỷ số kích thước a/h khác nhau thể hiện trong bảng 1.

Bảng 1. Độ võng và ứng suất không thứ nguyên của tấm sandwich vuông ($0^\circ/0^\circ/0^\circ$) chịu tải trọng vuông góc phân bố hình sin

a/h	Mô hình	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\sigma}_{xy}$
4	Pagano [14]	-	1,512	0,2533	0,1437
	Mô hình 1 (Tác giả)	7,0549	1,5131	0,2646	0,1377
	Mô hình 2 (Tác giả)	7,1540	1,5028	0,2388	0,1406
	Mô hình 3 [9]	7,0873	1,4182	0,2365	0,1383
	Mô hình 4 [9]	5,6205	1,5765	0,0780	0,0623
	Mô hình 5 [9]	4,7666	0,8918	0,1562	0,0907
10	Pagano [14]	-	1,152	0,1099	0,0707
	Mô hình 1 (Tác giả)	2,0757	1,1520	0,1100	0,0679
	Mô hình 2 (Tác giả)	2,0842	1,1491	0,1039	0,0682
	Mô hình 3 [9]	2,0629	1,1300	0,1030	0,0679
	Mô hình 4 [9]	1,6458	1,1746	0,0581	0,0464
	Mô hình 5 [9]	1,5604	1,0457	0,0798	0,0552
20	Pagano [14]	-	1,110	0,0700	0,0511
	Mô hình 1 (Tác giả)	1,1928	1,1107	0,0701	0,0511
	Mô hình 2 (Tác giả)	1,1934	1,1088	0,0678	0,0500
	Mô hình 3 [9]	1,1876	1,1039	0,0679	0,0502
	Mô hình 4 [9]	1,0704	1,1164	0,0552	0,0441
	Mô hình 5 [9]	1,0524	1,0830	0,0612	0,0466
50	Pagano [14]	-	1,099	0,0569	0,0446
	Mô hình 1 (Tác giả)	0,9290	1,1051	0,0577	0,0444
	Mô hình 2 (Tác giả)	0,9286	1,0983	0,0572	0,0443
	Mô hình 3 [9]	0,9284	1,0980	0,0565	0,0445
	Mô hình 4 [9]	0,9090	1,1001	0,0545	0,0435
	Mô hình 5 [9]	0,9063	1,0947	0,0554	0,0439

Có thể thấy rằng các kết quả mà bài báo đưa ra theo mô hình chuyển vị bậc cao có sai số nhỏ ($\approx 0,1\%$) khi so sánh với kết quả của Pagano với mọi giá trị của tỉ số a/h . Khi so sánh với các kết quả tính theo mô hình 2, 4, 5 của Kant (bậc nhất và bậc nhất cải biên) cho thấy sai số lớn khi tỉ số a/h nhỏ (tấm dày).

Ví dụ 2: Tấm sandwich vuông với lớp bề mặt gồm hai lớp composite đồng phương, lệch trục và bất đối xứng $[30^\circ/-30^\circ/0^\circ/-30^\circ/30^\circ]$. Tỉ số chiều dày lớp lõi và chiều dày lớp bề mặt $h_{lo}/h_{bm}=4$. Chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên tính với các tỷ số kích thước a/h khác nhau thể hiện trong bảng 2.

Bảng 2. Độ võng và ứng suất không thứ nguyên của tấm sandwich vuông $[30^\circ/-30^\circ/0^\circ/-30^\circ/30^\circ]$ chịu tải trọng vuông góc phân bố hình sin

a/h	Mô hình	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\sigma}_{xy}$
4	Mô hình 1 (Tác giả)	13,0331	1,0173	0,5014	-0,5856
	Mô hình 2 (Tác giả)	13,2427	1,0105	0,4981	-0,5930
	Mô hình 3 [9]	8,1972	0,5576	0,3002	-0,3694
	Mô hình 4 [9]	8,0144	0,6495	0,2744	-0,3269
	Mô hình 5 [9]	2,5977	0,2803	0,1510	-0,1948
10	Mô hình 1 (Tác giả)	2,9391	0,4217	0,2049	-0,2621
	Mô hình 2 (Tác giả)	2,9519	0,4240	0,2105	-2,6181
	Mô hình 3 [9]	1,9692	0,3531	0,1699	-0,2139
	Mô hình 4 [9]	1,9047	0,3847	0,1610	-0,1992
	Mô hình 5 [9]	1,0182	0,3222	0,1415	-0,1787
20	Mô hình 1 (Tác giả)	1,2838	0,3521	0,1568	-0,1994
	Mô hình 2 (Tác giả)	1,2867	0,3525	0,1583	-0,1985
	Mô hình 3 [9]	1,0300	0,3367	0,1471	-0,1850
	Mô hình 4 [9]	1,0107	0,3462	0,1445	-0,1806
	Mô hình 5 [9]	0,7884	0,3304	0,1396	-0,1755
50	Mô hình 1 (Tác giả)	0,8031	0,3365	0,1424	-0,1793
	Mô hình 2 (Tác giả)	0,8042	0,3360	0,1423	-0,1781
	Mô hình 3 [9]	0,7627	0,3338	0,1403	-0,1762
	Mô hình 4 [9]	0,7594	0,3354	0,1398	-0,1754
	Mô hình 5 [9]	0,7237	0,3328	0,1391	-0,1746

Bảng 2 cho thấy khi tấm dày ($a/h = 4-10$) sự sai lệch về kết quả giữa mô hình bậc cao (mô hình 1 và 2) và mô hình bậc nhất (mô hình 3, 4, 5) là lớn. Khi tấm mỏng dần (tỉ số a/h tăng lên) thì độ sai lệch này giảm dần. Điều này hoàn toàn phù hợp với thực tế tính toán, lý thuyết tấm cổ điển chỉ phù hợp với tấm mỏng, lý thuyết tấm bậc nhất chỉ phù hợp với tấm có chiều dày trung bình.

7. Kết luận

Bài báo đã đưa ra lời giải giải tích khi phân tích tĩnh kết cấu tấm sandwich chịu uốn theo lý thuyết chuyển vị bậc cao. Lời giải có độ tin cậy khi so sánh với lời giải đàn hồi của Pagano trong trường hợp vật liệu lớp bề mặt có cấu hình đối xứng vuông góc. Kết quả số cũng cho thấy sự cần thiết phải sử dụng lý thuyết chuyển vị bậc cao khi tính toán các kết cấu tấm sandwich là những kết cấu có chiều dày lớn. Các kết quả này có thể được sử dụng để kiểm chứng với các lời giải số khác khi nghiên cứu các kết cấu tấm composite dạng sandwich.

Tài liệu tham khảo

1. Azar J. J. (1968), *Bending theory of multilayer orthotropic sandwich plates*, *AIAA J.* 6:2166-2169.
2. Bau-Madsen N. K. (1993), "Large deflections of sandwich plates - an experimental investigations", *Composite Structures* 23:47-52
3. Liaw B. D., Little R. W. (1967), "Theory of bending multilayer sandwich plates", *AIAA J.* 5:301-304.
4. Reddy, J. N. (1996), *Energy and Variational Methods in Engg. Mechanics*, John Wiley, New York.
5. Reissner E. (1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *ASME J. Appl. Mech.* 12(2):69-77.
6. Ronald F. Gibson. (1994), *Principles of Composite Material Mechanics*, McGraw-Hill, Inc. Singapore.
7. Whitney JM., Pagano NJ. (1970), "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates", *ASME J. Appl. Mech.* 37(4):1031-6.
8. Reddy JN. (1984), "A simple higher order theory for laminated composite plates", *ASME J. Appl. Mech.* 51,745-52.
9. Kant T., Swaminathan K. (2001), "Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory", *Composite Structure*, 53,73-85.
10. Trần Ích Thịnh (1994), *Cơ học Vật liệu Composite*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.
11. Trần Minh Tú (2006), *Tính toán độ bền và độ ổn định của kết cấu tấm, vỏ composite lớp có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ và độ ẩm*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Trường ĐHBK Hà Nội
12. Vinson J. R. (1999), *The behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials*, Technomic Publishing Company, Inc.USA.
13. Whitney, J. M. (1987), *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, Technomic Publishing Company, Inc.USA.
14. Pagano, N.J. (1996), "Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending". *Journal of Composite Materials*, 3, 389-411.