

PHÂN TÍCH CHUYỂN VỊ TRONG DẦM CÓ VẾT NỨT VỚI ĐỘ CỨNG $EI(x)$ VÀ KHỐI LƯỢNG $m(x)$ PHÂN BỐ NGẪU NHIÊN

ThS. Dương Thế Hùng

Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên

GS.TS Lê Xuân Huỳnh

Trường Đại học Xây dựng

Tóm tắt: Bài báo trình bày các kết quả tính toán kết cấu dầm có độ cứng và khối lượng phân bố ngẫu nhiên theo phương pháp động lực học ngẫu nhiên. Dầm được xem xét có vết nứt với vị trí, chiều sâu đã biết. Sử dụng chương trình được lập trên nền Maple, bài báo trình bày các kết quả xác định giá trị kỳ vọng và phương sai của chuyển vị trong dầm có vết nứt với các điều kiện biên và lực kích thích thay đổi. Ngoài ra còn giới thiệu việc tính toán tần số dao động riêng để xác định vùng cộng hưởng của lực kích thích. Phương pháp trình bày trong bài báo có thể được sử dụng trong thực tế khi phân tích hoặc xây dựng cơ sở dữ liệu cho bài toán nhận dạng kết cấu có vết nứt.

Summary: This paper presents the calculation results of beams with determined locations and depths of cracks using the statistical method. By applying the TK.mw program, we can show expectation and variance of the node displacements in cracked beams following some illustrative examples with changes in boundary conditions and frequencies of input loads. In addition, we introduce the calculation results of resonant frequency of loads. The method presented in this paper can also be applied in reality to problems as to check building structures and get data for identification of structures with cracks.

1. Mở đầu

Dầm là kết cấu cơ bản, là đối tượng hay gặp trong lý thuyết và trong thực tế tính toán. Khi có vết nứt, các tính chất cơ lý và độ cứng của dầm không còn tính liên tục mà có những gián đoạn nhất định. Vết nứt được mô hình hoá thành những liên kết lò xo. Để đơn giản và phù hợp chung với sơ đồ tính của kết cấu, ta có thể xem những liên kết này là đàn hồi tuyến tính: chuyển vị tỷ lệ bậc nhất với lực tác động. Đối với dầm chịu uốn, vết nứt được mô phỏng bằng lò xo có độ cứng đàn hồi tương đương theo công thức [2]:

$$c_{\phi} = \frac{b_0 h_0^2 E_0}{36\pi\mu^2 (0,5033 - 0,9022\mu + 3,412\mu^2 - 3,18\mu^3 + 5,793\mu^4)} \quad (1)$$

trong đó: $\mu = 2 \frac{a}{h_0}$ với a là chiều sâu vết nứt; b_0 và h_0 là chiều rộng và chiều cao tiết diện

dầm hình chữ nhật tại vị trí vết nứt; E_0 là mô đun đàn hồi.

Mặt khác, các tham số trong kết cấu như kích thước hình học, đặc trưng vật lý thường được xác định thông qua việc đo đạc và ta thường lấy giá trị trung bình của một số mẫu thử để đem ra tính toán. Các đại lượng độ cứng và phân bố khối lượng sẽ được tính toán hoặc đo đạc thông qua việc xử lý thống kê số liệu. Dưới đây là một mô hình tính toán độ cứng và phân bố khối lượng là các biến ngẫu nhiên có tham số bé hay được các tác giả sử dụng [5], [6], [8], [9]:

$$\begin{cases} EI(x) = EI_0 [1 + \varepsilon_1 g_1(x)] \\ m(x) = m_0 [1 + \varepsilon_2 g_2(x)] \end{cases} \quad (2)$$

trong đó: EI_0 và m_0 biểu thị giá trị kỳ vọng của các đại lượng $EI(x)$ và $m(x)$; ε_i ($i = 1, 2$) là hằng số $0 < \varepsilon_i < 1$, được gọi là các tham số bé; $g_i(x)$ là hàm ngẫu nhiên có giá trị kỳ vọng bằng không và độ lệch chuẩn đơn vị với hàm tương quan là $R_{ij}(\xi)$ ($i, j = 1, 2$) đã biết.

Với mô hình dầm có tham số ngẫu nhiên về độ cứng $EI(x)$ và phân bố khối lượng $m(x)$, việc tính toán đòi hỏi phải tính theo mô hình ngẫu nhiên, nghĩa là, ta phải xác định các đặc trưng xác suất (là giá trị kỳ vọng và phương sai của nó) của các dữ liệu đầu ra như chuyển vị, ứng lực sau khi biết đặc trưng xác suất của dữ liệu đầu vào.

Việc xem xét dầm đồng thời có vết nứt và kể đến sự phân bố ngẫu nhiên của độ cứng và phân bố khối lượng là một vấn đề mới. Để phân tích sự làm việc đồng thời đó, bài báo này sẽ tính toán giá trị kỳ vọng và phương sai của chuyển vị trong một số mô hình kết cấu dầm như dầm có liên kết tại gối tựa khác nhau, dầm chịu tải trọng động, ... Ngoài ra, bài báo còn giới thiệu việc tính toán tần số dao động riêng để thấy được vùng cộng hưởng của lực kích thích khi dầm dao động.

Các ví dụ tính toán dưới đây được thực hiện nhờ chương trình TK.mw [3], [4]. Chương trình TK.mw áp dụng cho hệ thanh phẳng, dưới dạng Symbolic, được viết trên nền Maple 12 [1], [10]. Kết quả nhận được giá trị kỳ vọng và phương sai của chuyển vị và nội lực.

Khi xem xét ảnh hưởng của vết nứt trong dầm, ta giả thiết vết nứt có vị trí và độ sâu đã được biết trước, nghĩa là, ta thực hiện bài toán kiểm tra dầm có vết nứt.

2. Mô hình tính toán dầm có vết nứt và có tham số ngẫu nhiên $EI(x)$, $m(x)$

2.1. Tính toán kết cấu thanh chịu uốn ngang phẳng có vết nứt

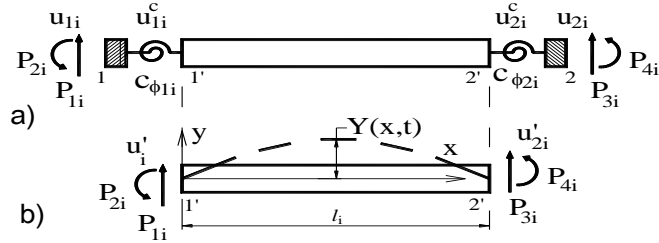
Xét phần tử thanh chịu uốn thứ "i" có vết nứt ở hai đầu như ở hình 1. Ta gọi phần tử loại 1 (PTL1) là đoạn nằm giữa hai mặt cắt 1-2 (hình 1a) và phần tử loại 2 (PTL2) là đoạn nằm giữa hai mặt cắt 1'-2' (hình 1b). u_{1i}, u_{2i} là góc xoay tại mặt cắt 1' và 2' của phần tử loại 2; u_{1i}^c, u_{2i}^c là góc xoay của lò xo tương đương tại vết nứt; u_{1i}, u_{2i} là góc xoay tại điểm 1 và 2 của phần tử loại 1; $P_{1i}, P_{2i}, P_{3i}, P_{4i}$ là các lực nút tương đương tại hai đầu phần tử.

Từ mô hình thanh chịu uốn ở hình 1, góc xoay tại mặt cắt 1, 2 sẽ được biểu diễn qua góc xoay tại mặt cắt 1', 2' theo công thức sau:

$$u_i = u_i' + u_i^c \quad (3)$$

u_i^c là góc xoay của lò xo tương đương tại vết nứt, được xác định theo công thức:

$$u_i^c = \frac{P_i}{C_{\phi i}} \quad (4)$$



Hình 1. Mô hình thanh chịu uốn có vết nứt

Ở đây, $c_{\phi i}$ là độ cứng tương đương của vết nứt, được tính toán theo công thức (1); P_i lấy giá trị bằng P_{2i} hoặc P_{4i} (là các giá trị mômen) trên hình 1.

Sau đó, sẽ xác định được ma trận độ cứng và lực nút tương đương của phần tử loại 1 theo phần tử loại 2 theo công thức [3]:

$$[D^{(1)}(\omega)] = ([I] + [B])^T [D^{(2)}(\omega)] ([I] + [B]) + [K_v] \quad (5)$$

$$\{\text{Lực nút PTL1}\} = ([I] + [B])^T \{\text{Lực nút PTL2}\} \quad (6)$$

trong đó: $[D^{(2)}(\omega)]$ - là ma trận độ cứng động lực của PTL2; I - là ma trận đơn vị cấp 4×4 . B và K_v - là ma trận có chứa các độ cứng tương đương của vết nứt tại hai đầu phần tử. Nhận thấy rằng vì độ cứng $EI(x)$ và phân bố khối lượng $m(x)$ là các đại lượng ngẫu nhiên theo công thức (1) nên ma trận độ cứng $[D^{(2)}(\omega)]$ là ma trận ngẫu nhiên có các "tích phân trọng số" đã biết [8]. Vì vậy, ma trận độ cứng $[D^{(1)}(\omega)]$ cũng là ma trận ngẫu nhiên.

Sau khi có ma trận độ cứng và lực nút tương đương của phần tử loại 1 và của cả hệ kết cấu, bằng phương pháp khai triển Neumann sẽ xác định được biểu thức kỳ vọng và phương sai của chuyển vị nút và của ứng lực, được trình bày sau đây.

2.2. Biểu thức kỳ vọng và phương sai của chuyển vị nút

Sau khi nhận được ma trận độ cứng động lực của các phần tử, rồi chuyển về hệ tọa độ chung, ta tiến hành ghép nối các ma trận độ cứng này vào ma trận độ cứng động lực và véc tơ tải trọng nút tổng thể của cả hệ. Sử dụng các điều kiện biên (thường là sẽ xóa đi hàng và cột tương ứng với các điều kiện biên bằng không) ta nhận được ma trận độ cứng động lực và véc tơ lực nút rút gọn của cả kết cấu. Cuối cùng phương trình cân bằng của cả hệ có dạng:

$$[K(\omega)]\{Z(\omega)\} = \{F\} \quad (7)$$

trong đó: $Z(\omega)$ là véc tơ biên độ phức của chuyển vị nút cần phải xác định và ω là tần số dao động; $K(\omega)$ là ma trận độ cứng tổng thể, ma trận này có thể viết tách thành hai phần xác định và ngẫu nhiên như sau:

$$[K(\omega)] = [K^0(\omega)] + [\Delta K(\omega)] \quad (8)$$

Để giải phương trình (7), thông thường ta phải tiến hành nghịch đảo ma trận độ cứng động lực $K(\omega)$. Vì ma trận độ cứng động lực ở đây có chứa tham số ngẫu nhiên nên ta không thể nghịch đảo theo cách thông thường được. Ở đây, ta sử dụng phương pháp khai triển Neumann mà sẽ trình bày tóm tắt dưới đây.

Sử dụng phương trình (8), ta viết phương trình cân bằng (7) dưới dạng:

$$\left[K^0(\omega) + \Delta K(\omega) \right] \{ Z(\omega) \} = \{ F \} \quad (9)$$

Ký hiệu $Z_0(\omega)$ là nghiệm khi không có ngẫu nhiên, nghĩa là:

$$\{ Z^0 \} = \left[K^0 \right]^{-1} \{ F \} \quad (10)$$

Sử dụng khai triển Neumann [3], ta được:

$$K^{-1} = \left[K^0 + \Delta K \right]^{-1} = \left[K^0 (I_n + K^{0-1} \Delta K) \right]^{-1} = K^{0-1} - K^{0-1} \Delta K K^{0-1} + K^{0-1} \Delta K K^{0-1} \Delta K K^{0-1} + \dots \quad (11)$$

$$\text{Do đó:} \quad Z = K^{-1} F = Z^0 - T Z^0 + T^2 Z^0 + \dots \quad (12)$$

Với $T = K^{0-1} \Delta K$ là ma trận ngẫu nhiên.

Sau khi có giá trị Z theo (12), tùy mức độ phức tạp hoặc yêu cầu đặt ra, ta có thể lấy xấp xỉ bậc nhất hay bậc cao của khai triển Neumann. Nếu lấy xấp xỉ bậc nhất ta tính được biểu thức kỳ vọng và phương sai của Z như sau:

$$\text{Biểu thức kỳ vọng:} \quad E\{z\} = \{Z_0\} \quad (13)$$

Phương sai, đồng phương sai:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Z^T, Z] &= E[(Z - Z^0)(Z - Z^0)^T] = E[K^{0-1} \Delta K Z^0 (Z^0)^T \Delta K^T K^{0-1}] = \\ &= K^{0-1} E[\Delta K Z^0 (Z^0)^T \Delta K] K^{0-1} \end{aligned} \quad (14)$$

2.3. Xác định tần số dao động riêng

Việc tính toán tần số dao động riêng của dầm có tham số ngẫu nhiên khá phức tạp, trong phạm vi bài báo ta sẽ không xác định tần số dao động riêng của hệ có tham số ngẫu nhiên, mà để xác định ảnh hưởng của tần số kích thích, sẽ tiến hành xác định giá trị tần số dao động riêng của dầm khi bỏ qua ảnh hưởng của tham số ngẫu nhiên. Việc tính tần số dao động riêng được thực hiện bằng cách cho định thức của ma trận độ cứng (thành phần tiền định) của hệ bằng không. Thiết lập ma trận độ cứng của cả hệ, xuất phát từ ma trận độ cứng của phần tử loại 2 là $[D^{(2)}(\omega)]$, sẽ có dạng:

$$[D^{(2)}] = -\omega^2 [I_{ij}] + [J_{ij}] \quad (15)$$

trong đó:

$$I_{ij}(\omega) = \int_0^l m_0 N_i(x, \omega) N_j(x, \omega) dx; \quad J_{ij}(\omega) = \int_0^l EI_0 \frac{d^2 N_i(x, \omega)}{dx^2} \frac{d^2 N_j(x, \omega)}{dx^2} dx \quad (16)$$

l là chiều dài của phần tử; $N_i(x, \omega)$, $N_j(x, \omega)$ là hàm dạng phụ thuộc tần số ($i, j=1, \dots, 4$) được xác định qua việc thỏa mãn phương trình vi phân:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI_0 \frac{\partial Y^2(x, t)}{\partial x^2} \right] + m_0 \frac{\partial Y^2(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

Xét dao động là điều hòa, hàm chuyển vị có dạng $Y(x, t) = y(x)e^{j\omega t}$ khi đó (17) trở thành:

$$\frac{dy^4}{dx^4} - b^4 y = 0 \quad (18)$$

với $b^4 = m_0 \omega^2 / EI_0$, khi đó hàm dạng $N_i(x, \omega)$, $N_j(x, \omega)$ được xác định theo công thức:

$$\{N(x, \omega)\} = [\Gamma(\omega)] \{s(x, \omega)\} \quad (19)$$

trong đó

$$[\Gamma(\omega)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{cS + Cs}{cC - 1} & -\frac{1}{2} \frac{1 + sS - cC}{cC - 1} & \frac{1}{2} \frac{cS + Cs}{cC - 1} & \frac{1}{2} \frac{sS + cC - 1}{cC - 1} \\ \frac{1}{2} \frac{sS + cC - 1}{b(cC - 1)} & \frac{1}{2} \frac{cS - Cs}{b(cC - 1)} & -\frac{1}{2} \frac{1 + sS - cC}{b(cC - 1)} & -\frac{1}{2} \frac{cS - Cs}{b(cC - 1)} \\ -\frac{1}{2} \frac{s + S}{cC - 1} & \frac{1}{2} \frac{C - c}{cC - 1} & \frac{1}{2} \frac{s + S}{cC - 1} & -\frac{1}{2} \frac{C - c}{cC - 1} \\ \frac{1}{2} \frac{C - c}{b(cC - 1)} & -\frac{1}{2} \frac{S - s}{b(cC - 1)} & -\frac{1}{2} \frac{C - c}{b(cC - 1)} & -\frac{1}{2} \frac{S - s}{b(cC - 1)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

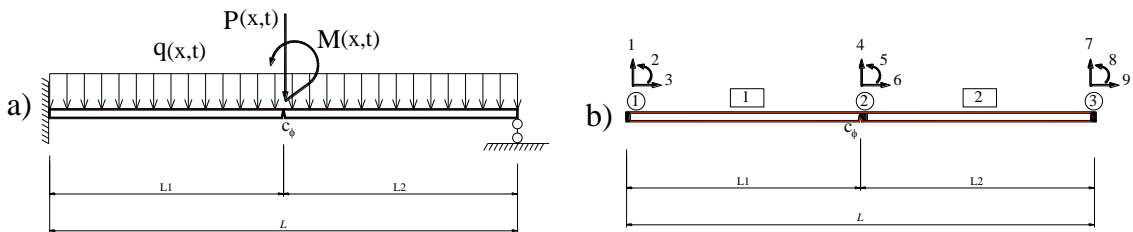
$$\text{với:} \quad \{s(x, \omega)\} = [\sin bx, \cos bx, \sinh bx, \cosh bx]^T \quad (21)$$

$$C = \cosh bl, c = \cos bl, S = \sinh bl, s = \sin bl \quad (22)$$

3. Ví dụ tính toán

Sau đây sẽ áp dụng mô hình phần tử như trên để tính cho dầm một vết nứt theo chương trình TK.mw [4]. Khi tính toán so sánh kết quả với TK.mw, kết quả giải bằng giải tích trong [2] chỉ nhận được giá trị kỳ vọng của chuyển vị trong dầm khi chịu tải trọng tĩnh ($\omega=0$).

Xét dầm có một vết nứt tại giữa nhịp, vết nứt được quy đổi về lò xo có độ cứng tương đương c_0 như hình 2a.



Hình 2. Dầm có một vết nứt và tham số $EI(x)$, $m(x)$ ngẫu nhiên

Trong ví dụ này sẽ tính giá trị kỳ vọng và phương sai của chuyển vị thẳng và chuyển vị xoay - vị trí chuyển vị số 4 và số 5 như trên hình 2b. Bài toán này có những số liệu đầu vào như sau:

- Độ cứng là hàm ngẫu nhiên theo quy luật: $EI(x) = e^\beta [(1 + \varepsilon_1 g_1(x))]$; $m(x) = e^{\beta+\gamma} [1 + \varepsilon_2 g_2(x)]$; trong đó β, γ là các số thực được biết trước; ε_i là tham số bé $0 < \varepsilon_i < 1$; $g_i(x)$ là hàm ngẫu nhiên, có giá trị trung bình bằng 0, có độ lệch chuẩn đơn vị và có hàm tương quan là $R_{ij}(\xi)$ đã biết ($i, j = 1, 2$).

- Giả thiết hàm tương quan $R_{ij}(\xi)$ của biến ngẫu nhiên $g_i(x)$ biến thiên theo luật: $R_{ij}(\xi) = c^2 e^{-(x_1 - x_2)^2 / d^2}$ ($i, j = 1, 2$), ở đây chọn $c = 1$, $d \rightarrow \infty$ theo [7].

- Khi tính toán lấy các giá trị: $L1 = 2,5m$, $L2 = 2,5m$, tiết diện hình chữ nhật có $b_0h_0=(0,22 \times 0,35)m$. Môđun đàn hồi $E_0 = 24821128 \text{ kN/m}^2$; $\varepsilon_1 = 0,03$; $\varepsilon_2 = 0$; $\varepsilon_3 = 0$; khối lượng riêng $m_r=23,5631 \text{ kN/m}^3$;

- Giá trị các tham số β và γ được tính toán theo công thức:

$$\beta = \ln(E_0 b_0 h_0^3 / 12) = \ln(24821128 * 0,22 * 0,35^3 / 12) = 9,878705028;$$

$$\gamma = \ln(b_0 h_0 * m_r) - \beta = \ln(0,22 * 0,35 * 23,5631) - 9,878705028 = -9,282972;$$

- Tải trọng $q(x,t) = 5e^{j\omega t} \text{ kN/m}$; $P(x,t) = 10e^{j\omega t} \text{ kN}$; $M(x,t) = 20e^{j\omega t} \text{ kNm}$.

- Với độ sâu vết nứt $a = 5,37 \text{ cm}$ ta tính được $c_\phi = 123456 \text{ kNm}$; Với độ sâu vết nứt $a = 2,5 \text{ cm}$ ta tính được $c_\phi = 662910 \text{ kNm}$;

Ta sẽ tính toán hai bài toán: bài toán thứ nhất là dầm có một vết nứt có tham số $EI(x)$ ngẫu nhiên và bài toán thứ hai là dầm có một vết nứt và có $m(x)$ ngẫu nhiên.

3.1. Dầm có một vết nứt và tham số $EI(x)$ ngẫu nhiên

Với bài toán này thì số liệu đầu vào như trên cho $\varepsilon_2 = 0$ để không kể đến thành phần ngẫu nhiên của $m(x)$; Ta sẽ xác định giá trị kỳ vọng và phương sai của chuyển vị nút ứng với các trường hợp liên kết tại hai đầu của dầm khác nhau.

Trường hợp 1: Dầm con son

Bảng 1. Giá trị kỳ vọng và phương sai của chuyển vị cho trường hợp 1

Đại lượng	Tính theo TK.mw (Giá trị chuyển vị khi thay đổi tần số của lực kích thích ω)							Tính theo giải tích trong [2] khi $\omega=0$
	$\omega=0$ (rad/s)	$\omega=10$ (rad/s)	$\omega=14.47$ (rad/s)	$\omega=20$ (rad/s)	$\omega=50$ (rad/s)	$\omega=100$ (rad/s)	$\omega=200$ (rad/s)	
Chuyển vị số 4 (m)	-0.0065570	-0.0119390	2.0187724	0.0057888	-0.0004239	0.0024295	0.0001508	-0.0065570
Phương sai CV4 (m ²)	3.8695E-08	4.4262E-07	4.188E+02	4.9760E-08	1.3741E-09	6.2914E-08	1.3390E-11	Không có kết quả
Chuyển vị số 5 (rad)	-0.0036752	-0.0074758	1.4294581	0.0050924	0.0009378	0.0000725	0.0006727	-0.0036752
Phương sai CV5 (rad ²)	1.2505E-08	1.9305E-07	2.097E+02	1.8815E-08	2.0410E-10	3.7785E-09	1.7362E-09	Không có kết quả

Xét trường hợp dầm con son tại nút 1 là ngàm, nút 3 là đầu tự do. Chia dầm thành hai phần tử và 3 nút như trên hình 1b. Các chuyển vị 1,2 và 3 bằng không theo điều kiện biên của bài toán. Theo mô hình phần tử đã thiết lập ở [3], thì phần tử 1 tại nút 1 là liên kết cứng, tại nút 2 là liên kết nửa cứng với độ cứng lò xo theo ba phương có độ cứng $c_{v_{2i}} = c_u = \infty$ và c_ϕ . Phần tử thứ hai cả hai đầu là liên kết cứng. Tần số dao động riêng của dầm có giá trị bằng $\omega = 14.47212310 \text{ rad/s}$; Khi độ cứng lò xo $c_\phi = \infty$ thì giá trị tần số dao động riêng bằng $\omega = 14.57820275 \text{ rad/s}$.

Kết quả tính giá trị kỳ vọng và phương sai của chuyển vị nút số 4 và 5 ứng với tần số của lực kích thích ω khác nhau cho trong bảng 1.

Trường hợp 2: Dầm hai đầu khớp cố định

Dầm có hai đầu khớp thì các chuyển vị 1,3,7,9 bằng không theo điều kiện biên. Tần số dao động riêng đầu tiên trong trường hợp này là $\omega_1 = 39.70 \text{ rad/s}$; Khi không có vết nứt, tần số dao động riêng đầu tiên bằng $\omega_1 = 40.93 \text{ rad/s}$; Kết quả tính toán cho ở bảng 2.

Bảng 2. Giá trị kỳ vọng và phương sai của chuyển vị cho trường hợp 2

Đại lượng	Tính theo TK.mw (Giá trị chuyển vị khi thay đổi tần số của lực kích thích ω)						Tính theo giải tích trong [2] khi $\omega=0$	
	$\omega=0$ (rad/s)	$\omega=10$ (rad/s)	$\omega=20$ (rad/s)	$\omega=39.7$ (rad/s)	$\omega=100$ (rad/s)	$\omega=200$ (rad/s)		$\omega=300$ (rad/s)
Chuyển vị số 4 (m)	-0.0038063	-0.0040620	-0.0050899	-42.215899	0.0006724	0.0001138	-0.0000099	-0.0038063
Phương sai CV4 (m ²)	1.0400E-08	1.3578E-08	3.4177E-08	1.77E+08	3.4061E-11	5.4570E-12	1.1904E-10	Không có kết quả
Chuyển vị số 5 (rad)	0.0005815	0.0005899	0.0006227	1.2230393	0.0006083	-0.0003104	0.0001302	0.0005815
Phương sai CV5 (rad ²)	1.5778E-10	1.6474E-10	2.0069E-10	1.49E+05	6.469E-10	1.4721E-09	1.07E-10	Không có kết quả

Trường hợp 3: Dầm một đầu ngàm một đầu gối tựa di động

Dầm một đầu ngàm một đầu gối tựa di động thì chuyển vị 1,2,3,7 bằng không theo điều kiện biên. Tần số dao động riêng đầu tiên có giá trị: $\omega_1= 62.64rad/s$, $\omega_2= 206.44rad/s$, $\omega_3= 421.72rad/s$; Khi không có vết nứt, ba tần số dao động riêng đầu tiên bằng $\omega_1= 63.95rad/s$; $\omega_2= 207.25rad/s$, $\omega_3= 432.41rad/s$. Kết quả tính cho ở bảng 3.

Bảng 3. Giá trị kỳ vọng và phương sai của chuyển vị cho trường hợp 3

Đại lượng	Tính theo TK.mw (Giá trị chuyển vị khi thay đổi tần số của lực kích thích ω)						Tính theo giải tích trong [2] khi $\omega=0$
	$\omega=0$ (rad/s)	$\omega=62.64$ (rad/s)	$\omega=100$ (rad/s)	$\omega=206.44$ (rad/s)	$\omega=300$ (rad/s)	$\omega=421.72$ (rad/s)	
Chuyển vị số 4 (m)	-0.0013686	-22.53898	0.0007251	9.7174318	0.0001188	0.9554292	-0.0013686
Phương sai CV4 (m ²)	1.3147E-09	1.296E+08	4.5988E-10	1.51E+09	3.6525E-11	1.1825E+07	Không có kết quả
Chuyển vị số 5 (rad)	0.0002179	-3.8633848	0.0006550	-31.88647	0.0000142	0.4913397	0.0002179
Phương sai CV5 (rad ²)	1.4800E-11	3.81E+06	1.9979E-10	1.62E+10	1.7993E-10	3.1242E+06	Không có kết quả

Trường hợp 4: Dầm hai đầu ngàm

Đối với dầm hai đầu ngàm, các chuyển vị 1,2,3,7,8,9 bằng không theo điều kiện biên. Ta có kết quả tần số dao động riêng đầu tiên có giá trị: $\omega_1= 90.76rad/s$; Khi không có vết nứt, tần số dao động riêng bằng $\omega_1= 92.8rad/s$. Kết quả tính toán giá trị kỳ vọng và phương sai của chuyển vị nứt số 4 và 5 cho ở bảng 4.

Bảng 4. Giá trị kỳ vọng và phương sai của chuyển vị cho trường hợp 4

Đại lượng	Tính theo TK.mw (Giá trị chuyển vị khi thay đổi tần số của lực kích thích ω)						Tính theo giải tích trong [2] khi $\omega=0$
	$\omega=0$ (rad/s)	$\omega=50$ (rad/s)	$\omega=90.76$ (rad/s)	$\omega=100$ (rad/s)	$\omega=200$ (rad/s)	$\omega=300$ (rad/s)	
Chuyển vị số 4 (m)	-0.0008561	-0.0012196	-6.7485098	0.0038780	0.0001919	0.0000550	-0.0008561
Phương sai CV4 (m ²)	4.9795E-10	2.1794E-09	2.46E+06	2.881E-07	1.3398E-11	2.273E-11	Không có kết quả
Chuyển vị số 5 (rad)	0.0004046	0.0004298	0.3334070	0.0002037	0.0006335	-0.000274	0.0004046
Phương sai CV5 (rad ²)	8.9168E-11	1.1207E-10	5.99E+03	1.88E-09	1.5412E-09	2.3402E-09	Không có kết quả

Từ các trường hợp 1, 2, 3, 4 có một số nhận xét:

- So sánh giá trị kỳ vọng của chuyển vị tính theo TK.mw và theo giải tích trong [2] ta thấy hai kết quả trùng nhau.

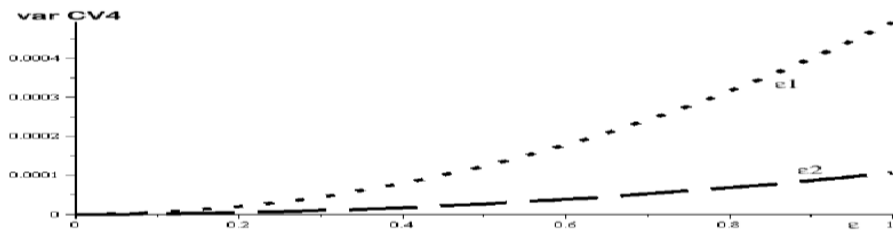
- Trị số kỳ vọng và phương sai của chuyển vị nút lớn nhất ở trường hợp 1 (dầm con son) và nhỏ nhất ở dầm hai đầu ngàm.

- Giá trị tần số dao động riêng cho bốn trường hợp dầm có liên kết khác nhau, kết quả tính cho thấy trị số tần số dao động riêng của dầm có vết nứt luôn nhỏ hơn so với dầm không có vết nứt. Ứng với tần số gần giá trị tần số dao động riêng xảy ra cộng hưởng, khi đó kỳ vọng của chuyển vị nút số 4 và 5 và phương sai của nó có giá trị rất lớn.

- Sự thay đổi giá trị tần số lực kích thích đến kỳ vọng và phương sai của chuyển vị là lớn nên trong các bài toán thực tế cần phải khảo sát ảnh hưởng của các yếu tố này.

3.2. So sánh bài toán dầm có một vết nứt khi có $EI(x)$ ngẫu nhiên với bài toán dầm có một vết nứt khi có $m(x)$ ngẫu nhiên

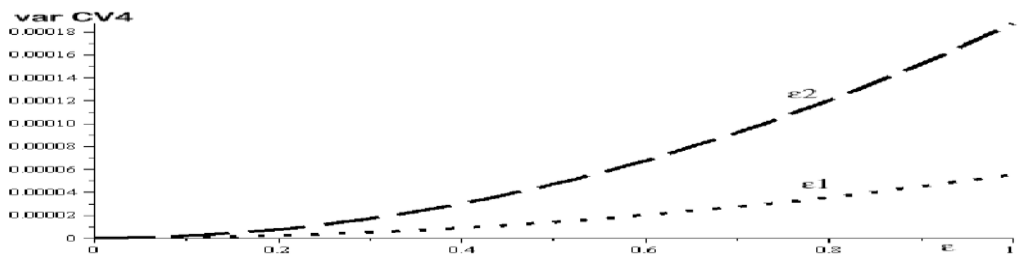
Ở bài toán thứ nhất dầm có một vết nứt và có $EI(x)$ ngẫu nhiên ta cho $\varepsilon_2 = 0$, còn ở bài toán dầm có một vết nứt có $m(x)$ ngẫu nhiên ta cho $\varepsilon_1 = 0$, khi đó giá trị kỳ vọng của chuyển vị sẽ không thay đổi, chỉ có thành phần phương sai của chuyển vị thay đổi. Do đó, để so sánh dầm có một vết nứt khi có $EI(x)$ ngẫu nhiên hoặc $m(x)$ ngẫu nhiên ta sẽ so sánh giá trị phương sai của chuyển vị.



Hình 3. Phương sai của chuyển vị số 4 thay đổi theo ε_1 và ε_2 khi $\omega = 10\text{rad/s}$

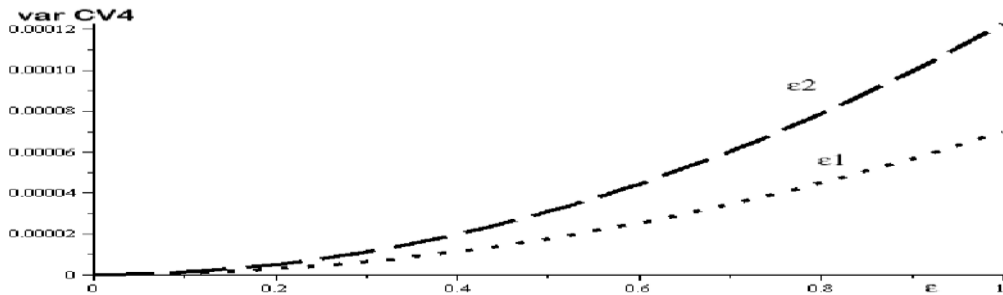
Hình 3 là đồ thị của phương sai của chuyển vị số 4 ứng với tần số $\omega=10\text{rad/s}$. Trục hoành là sự biến thiên của giá trị ε từ 0 đến 1. Trục tung là giá trị phương sai của chuyển vị số 4 tính cho trường hợp 1 (dầm con son). Đồ thị có nét chấm chấm là phương sai ứng với sự thay đổi tham số ε_1 ; Đồ thị có nét gạch gạch là phương sai ứng sự thay đổi tham số ε_2 . Nhìn vào đồ thị ta thấy khi có tham gia của ε_1 (ứng với $EI(x)$) phương sai có giá trị lớn hơn khi có sự tham gia của ε_2 (ứng với $m(x)$).

Tương tự như trên hình 3, ở hình 4 là đồ thị của phương sai ứng với tần số $\omega=20\text{rad/s}$. Nhìn vào đồ thị, ta thấy khi có tham gia của ε_1 (ứng với $EI(x)$) phương sai có giá trị nhỏ hơn khi có sự tham gia của ε_2 (ứng với $m(x)$).



Hình 4. Phương sai của chuyển vị số 4 thay đổi theo ε_1 và ε_2 khi $\omega=20\text{rad/s}$

Ở hình 5 là đồ thị của phương sai ứng với tần số $\omega=100\text{rad/s}$. Nhìn vào đồ thị, ta thấy khi có tham gia của ε_1 (ứng với $EI(x)$) phương sai có giá trị nhỏ hơn khi có sự tham gia của ε_2 (ứng với $m(x)$).



Hình 5. Phương sai của chuyển vị số 4 thay đổi theo ε_1 và ε_2 khi $\omega=100\text{rad/s}$

Nhận xét kết quả tính toán:

- Giá trị phương sai của chuyển vị thay đổi theo tham số bé của hàm ngẫu nhiên độ cứng $EI(x)$ (ứng với ε_1) hoặc hàm ngẫu nhiên phân bố khối lượng $m(x)$ (ứng với ε_2).

- Sự biến thiên của giá trị phương sai theo trị số tham số bé ε_1 hoặc ε_2 phụ thuộc vào tần số ω . Ở tần số thấp ($\omega \leq 10\text{rad/s}$) thì ảnh hưởng của $EI(x)$ lớn hơn ảnh hưởng của $m(x)$. Khi ở tần số cao $\omega \geq 20\text{rad/s}$ ảnh hưởng của $EI(x)$ bé hơn ảnh hưởng của $m(x)$.

4. Kết luận

Trên đây ta thực hiện các bài toán khi cho tần số dao động của lực kích thích thay đổi, điều kiện biên thay đổi để nhận được giá trị kỳ vọng và phương sai của chuyển vị thông qua chương trình TK.mw. Ngoài ra, tính toán cho thấy tần số dao động riêng của dầm có vết nứt luôn nhỏ hơn so với dầm không có vết nứt. Ở một tần số xác định sự ảnh hưởng của thành phần ngẫu nhiên do độ cứng $EI(x)$ đến giá trị phương sai của chuyển vị nứt sẽ khác với sự ảnh hưởng của thành phần ngẫu nhiên do khối lượng $m(x)$. Việc tính toán theo mô hình ngẫu nhiên sẽ cho ta giá trị kỳ vọng và phương sai của chuyển vị hay ứng lực để đánh giá độ tin cậy của kết cấu. Các kết quả của bài toán trên đây có thể phục vụ cho tính toán kiểm tra và làm cơ sở dữ liệu cho bài toán nhận dạng kết cấu có vết nứt.

Tài liệu tham khảo

1. Phan Bá Châu (2005), *Sử dụng Maple trong toán sơ cấp và cao cấp*, Nxb Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
2. Lê Ngọc Hồng và nhóm tác giả (2002), *Nghiên cứu khả năng làm việc tĩnh của kết cấu khung bị giảm yếu sau thiết kế*, Đề tài KHCN cấp Bộ, Trường Đại học Xây dựng, Hà Nội.
3. Dương Thế Hùng (2009), "Xây dựng ma trận độ cứng của phần tử thanh có liên kết nửa cứng và có tham số ngẫu nhiên", *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc Kỷ niệm 30 năm Viện Cơ học và 30 năm Tạp chí Cơ học*, Nxb Khoa học tự nhiên và công nghệ, trang 57-65.

4. Dương Thế Hùng (2009), “Tính toán kết cấu thanh có tham số ngẫu nhiên”, *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc Kỷ niệm 30 năm Viện Cơ học và 30 năm Tạp chí Cơ học*, Nxb Khoa học tự nhiên và công nghệ, trang 66-73.
5. Deodatis, G. (1991), “Weighted integral method I: Stochastic stiffness matrix”, *Journal of Engineering mechanics* 117, 1851-64.
6. Deodatis, G. (1991), “Weighted integral method II: Response Variability and Reliability”, *Journal of Engineering mechanics* 117, 1865-77.
7. Isaac Elishakoff, Yongjian Ren (2003), *Finite Element Methods for Structures with Large Stochastic Variations*, Oxford University Press.
8. Sondipon Adikari, C.S. Manohar (1999), “Dynamic analysis of framed structures with statistical uncertainties”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 44, 1157-78.
9. Takada, T. (1990), “Weighted integral method in stochastic finite element analysis”, *Journal of Probabilistic Engineering Mechanics* 5, 145-56.
10. www.maplesoft.com