

XÁC ĐỊNH CÁC VẾT NỨT TRONG DÀM BẰNG PHÂN TÍCH WAVELET

PGS TS. Trần Văn Liên

Trường Đại học Xây dựng

ThS. Trần Tuấn Khôi

Viện Thiết kế, Bộ Quốc phòng

Tóm tắt: Bài báo trình bày một phương pháp xác định số lượng, vị trí và độ sâu của các vết nứt trong dầm bằng phép phân tích và tổng hợp tín hiệu Wavelet của các số liệu đo về chuyển vị tĩnh của dầm. Các kết quả nhận được cho thấy đây là một phương pháp xác định vết nứt cho kết quả tốt và có thể ứng dụng hiệu quả trong thực tế.

Summary: This paper presents a detection method of location and size of cracks in multiple cracked beams by using the one-dimensional wavelet analysis of the static beam displacement. The obtained results were accurate and efficient for practice.

1. Mở đầu

Một dạng hư hỏng cục bộ hay gặp trong các cấu kiện dầm, cột, bản sàn của công trình là sự xuất hiện và hình thành các vết nứt. Các vết nứt trong các cấu kiện của công trình do nhiều nguyên nhân khác nhau gây ra và có hình thức rất đa dạng, không chỉ thể hiện ở bề mặt mà còn ở bên trong kết cấu. Sự hình thành và phát triển của vết nứt trong các kết cấu xây dựng làm giảm khả năng làm việc và tuổi thọ của công trình. Do đó, việc đánh giá chính xác vị trí và độ sâu vết nứt của các cấu kiện công trình là vấn đề quan trọng, cần thiết, đã và đang thu hút sự quan tâm của các nhà nghiên cứu xây dựng công trình.

Những nghiên cứu hiện nay về xác định hư hỏng không phá hủy của công trình phát triển theo ba hướng chủ yếu:

- Các phương pháp truyền thống dựa vào việc đo đạc các chuyển vị của kết cấu, dùng các thiết bị siêu âm,....

- Xác định hư hỏng dựa vào các đặc trưng động lực như tần số dao động riêng, dạng dao động riêng, hàm phổ phản ứng,... Do các đặc trưng động lực học của kết cấu có thể xác định được từ các đo đạc thực nghiệm nên việc xác định số lượng, vị trí và độ sâu của vết nứt hay các hư hỏng trong các kết cấu dựa vào các đặc trưng động lực này đã được phát triển rộng rãi [5, 6, 9, 11, 13]. Một ưu điểm khác của hướng nghiên cứu này là số tham số cần đo đạc để xác định số lượng, vị trí và độ sâu của vết nứt hay các hư hỏng trong các kết cấu có thể là ít hơn số tham số cần xác định [2] nhờ giải bài toán cực trị.

- Xác định hư hỏng dựa vào biến đổi Wavelet của tín hiệu. Đây là một hướng mới nghiên cứu mới, đang được phát triển mạnh. Ưu điểm của hướng nghiên cứu này là có thể phát hiện các điểm bập bênh, gãy, các điểm gián đoạn của các tín hiệu (ví dụ như chuyển vị của kết cấu...) vì nó mô tả được các yếu tố thời gian, biên độ của sự đột biến và sự gián đoạn của tín

hiệu. Rebertson A.N., Park K.C., Alvin K.F. [15] và Liew K.M. and Wang Q. [12] có thể xem là những người đi đầu trong việc áp dụng lý thuyết biến đổi Wavelet để xác định hư hỏng của dầm có một vết nứt. Helong Li, Xiaoyan Deng, Hongliang Dai [8] đã sử dụng kết hợp phương pháp khai triển mode thực nghiệm với biến đổi Wavelet để xác định hư hỏng trong kết cấu. Chih-Chieh Chang and Lien-Wen Chen [7] đã sử dụng biến đổi Wavelet trên cơ sở mô hình giải tích cho từng đoạn dầm nguyên vẹn. Loutridis, Douka, Trochidis [14] đã nhận dạng vết nứt của dầm có vết nứt mở hai phía dựa trên biến đổi Wavelet của dạng dao động riêng. Lương và Phan [4] đã phân tích độ nhạy cảm của dầm có vết nứt bằng phép biến đổi Wavelet. Khoa, Olatunbosun, Khiem [16] đã xác định vết nứt của dầm công xôn dựa vào biến đổi Wavelet của tín hiệu dao động có gián đoạn do các mặt tại vết nứt va đập vào nhau (hiện tượng thờ của các vết nứt). Các nghiên cứu trên đây mới chỉ dừng lại cho kết cấu đơn giản là dầm có một vết nứt.

Dựa trên kết quả phân tích chuyển vị của kết cấu hệ thanh có nhiều vết nứt, đã được nghiên cứu trong các tài liệu [1,2,3,10,13], bài báo này trình bày các nghiên cứu về việc xác định số lượng, vị trí và độ sâu của các vết nứt trong các dầm có nhiều vết nứt bằng phép phân tích và tổng hợp tín hiệu Wavelet của các số liệu đo về chuyển vị tĩnh của dầm. Các kết quả nghiên cứu nhận được là mới, là cơ sở cho việc xây dựng một phương pháp đơn giản và hiệu quả nhằm xác định vết nứt trong các kết cấu hệ thanh.

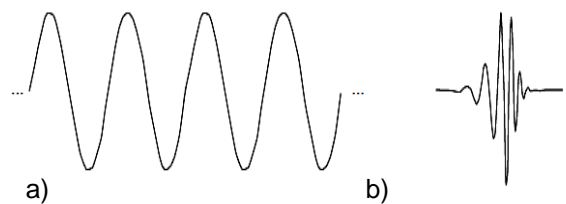
2. Phân tích Wavelet

2.1. Phân tích Fourier và phân tích Wavelet

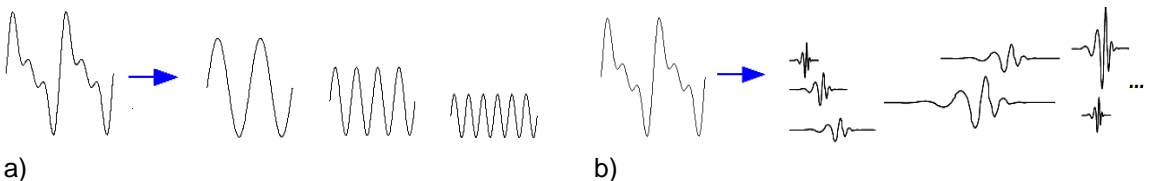
Khi xử lý tín hiệu, phân tích Fourier có một nhược điểm lớn là khi biến đổi sang miền tần số, thông tin thời gian đã bị mất. Khi nhìn vào một biến đổi Fourier của tín hiệu, ta không thể nào biết được thời gian diễn ra sự kiện. Nếu một thuộc tính tín hiệu không thay đổi nhiều theo thời gian, nó được gọi là tín hiệu dừng, thì các nhược điểm trên không có ảnh hưởng quan trọng.

Tuy nhiên, nhiều tín hiệu có chứa các thông số động như trôi, nghiêng, biến đổi đột ngột, khởi đầu và kết thúc của các sự kiện. Những đặc tính này thường là phần quan trọng nhất của tín hiệu và phân tích Fourier *không thích hợp để phát hiện* chúng.

Wavelet (sóng lặn) là dạng sóng có thời gian duy trì hữu hạn với giá trị trung bình bằng 0. Nếu sóng sin (hình 1.a) là trơn tru và có thể dự đoán, không có khoảng thời gian giới hạn, nó kéo dài từ $-\infty$ đến $+\infty$, thì sóng Wavelet (hình 1.b) lại bất thường và bất đối xứng, có khoảng thời gian duy trì hữu hạn.



Hình 1.



Hình 2.

Phân tích Fourier chia tách tín hiệu thành các sóng sin với các tần số khác nhau (hình 2a). Tương tự, phân tích Wavelet chia tách tín hiệu thành tổng các tín hiệu đồng dạng có tỷ lệ và thời gian trễ khác nhau (hình 2b). Nhìn vào hình sóng sin và sóng Wavelet, ta thấy rằng đối với các tín hiệu thay đổi nhanh, bất thường thì việc phân tích tín hiệu với một Wavelet là tốt hơn với một sóng sin trơn. Đồng thời, các đặc tính cục bộ được miêu tả tốt hơn với các Wavelet vốn có tính cục bộ. Do đó, phân tích Wavelet có ưu thế hơn phân tích Fourier truyền thống vì nó mô tả được các yếu tố thời gian, biên độ của đột biến và sự gián đoạn của tín hiệu. Phân tích Wavelet có khả năng thể hiện các đặc tính của dữ liệu mà các kỹ thuật phân tích khác không có như các điểm bập bênh, các điểm gãy, các điểm gián đoạn với độ dốc lớn,... Hơn nữa, vì đạt được cách nhìn khác với dữ liệu so với các kỹ thuật cổ điển nên phân tích Wavelet có thể thực hiện nén, hoặc khử nhiễu tín hiệu mà không có suy giảm nhận thấy được.

Hiện nay, phân tích Wavelet là một công cụ hữu hiệu để giải quyết các vấn đề trong nhiều lĩnh vực khác nhau như xử lý tín hiệu, hình ảnh máy tính, nén dữ liệu, xử lý ảnh, đồ họa, ADN, kỹ thuật quân sự,....

2.2. Cơ sở toán học của phân tích Wavelet

Phân tích Wavelet bắt đầu bằng việc chọn một hàm Wavelet cơ bản $\psi(x)$ (gọi là Wavelet mẹ), nó sẽ được kéo dãn hoặc nén bởi tỷ lệ a và dịch chuyển trong không gian bởi dịch mức b để tạo ra một tập hợp các hàm $\psi_{a,b}(x)$

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (1)$$

Biến đổi Wavelet liên tục (Continuous Wavelet Transform – CWT) là tổng trên toàn miền thời gian của tín hiệu được nhân bởi tỷ lệ và dịch mức của Wavelet cơ bản tạo ra tập hợp các hệ số $C(a,b)$ có dạng

$$C(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{a,b}(x) dx \quad (2)$$

trong đó a, b là các số thực và a phải dương. Các hệ số cho biết mức độ tương quan giữa một hàm Wavelet và tín hiệu được phân tích. Vì thế, các thay đổi đột ngột trong $f(x)$ sẽ tạo ra các hệ số Wavelet có biên độ lớn, đây chính là đặc điểm để đưa ra cơ sở của phương pháp nhận dạng vết nứt.

Biến đổi ngược của Wavelet cho phép tái tạo tín hiệu ban đầu từ các hệ số $C(a,b)$ có dạng:

$$f(x) = \frac{1}{K_{\psi}} \int_{a=-\infty}^{\infty} \int_{b=-\infty}^{\infty} C(a,b) \psi_{a,b}(x) \frac{dbda}{a^2} \quad (3)$$

Việc tính toán các hệ số Wavelet ở mọi tỷ lệ là một công việc phức tạp và phát sinh nhiều dữ liệu. Người ta đã chứng minh có thể chọn một tập con các tỷ lệ và vị trí dựa trên hàm mũ cơ số hai, còn gọi là *các vị trí và mức dyadic*, thì phân tích Wavelet sẽ có hiệu quả hơn mà vẫn đảm bảo chính xác. Phép biến đổi Wavelet như vậy gọi là phép *biến đổi Wavelet rời rạc* (Discrete Wavelet Transform - DWT).

Sử dụng các giá trị rời rạc của tỷ lệ và dịch mức:

$$a = 2^j ; b = k.2^j \quad (4)$$

để thực hiện biến đổi Wavelet rời rạc có dạng:

$$C_{j,k} = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(2^{-j}x - k)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{j,k}(x)dx \quad (5)$$

trong đó: $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - k)$ (6)

là các hàm Wavelet rời rạc, j là số mức, $1/a = 2^{-j}$ là độ phân giải, k là thời gian rời rạc.

Tín hiệu được tái tạo lại từ các hệ số thông qua biến đổi Wavelet rời rạc ngược như sau

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) \quad (7)$$

Xét ở cấp phân tích là J , sử dụng phương trình (5) ta thu được tập hợp các hệ số chi tiết

$$cD_J(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{J,k}(x)dx \quad (8)$$

Sử dụng tỷ lệ dyadic ở cấp J , phương trình (7) cho ta tập hợp các hệ số xấp xỉ

$$cA_J(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_{J,k}(x)dx \quad (9)$$

Phiên bản rời rạc của dạng tái tạo trở thành

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^J \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} cD_j(k)\psi_{j,k}(x) \right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} cA_J(K)\phi_{j,k}(x) \quad (10)$$

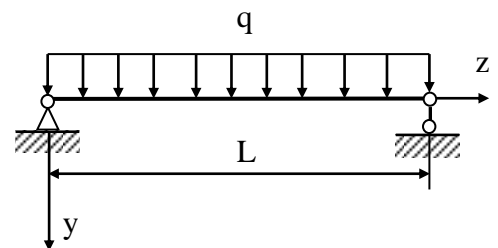
Để xác định vết nứt trong kết cấu, ta chỉ cần quan tâm đến các chi tiết của tín hiệu.

3. Phân tích Wavelet của độ võng dầm có nhiều vết nứt

Xét một dầm đơn giản bằng thép có tiết diện hình chữ nhật $b \times h = 8 \times 12 \text{ cm}^2$, chiều dài $L = 3 \text{ m}$, mô đun đàn hồi $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$, hệ số Poisson $\mu = 0,2$ chịu tải trọng ngang phân bố đều với cường độ $q = 15 \text{ kN/m}$ (hình 3).

Các vết nứt trong dầm được mô hình hóa bằng các lò xo với độ cứng được xác định theo các công thức thực nghiệm. Kết hợp với phương pháp ma trận chuyển, trong các tài liệu [1,2,3,10,13], các tác giả đã trình bày việc xây dựng ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng quy về nút của phần tử thanh phẳng, không gian có nhiều vết nứt theo mô hình phần tử hữu hạn. Đồng thời một chương trình phân tích kết cấu hệ thanh có nhiều vết nứt chịu tải trọng tĩnh và động cũng đã được lập ra trên nền MatLab.

Dựa trên các kết quả phân tích chuyển vị của kết cấu hệ thanh có nhiều vết nứt, dưới đây ta sẽ trình bày các kết quả xác định số lượng, vị trí và độ sâu của các vết nứt trong các dầm bằng phép phân tích và tổng hợp tín hiệu Wavelet của các số liệu đo về chuyển vị tĩnh của dầm.



Hình 3.

3.1. Phân tích Wavelet chuyển vị tĩnh của dầm theo số lượng điểm đo

Xét dầm có 1 vết nứt tại vị trí $z=1m$ tính từ gối cố định với độ sâu 30% ($a/(h/2)=0,3$). Trên hình 4 là kết quả xác định vị trí vết nứt sử dụng bốn loại Wavelet: db4 (hình 4a), bior 6.8 (hình 4b), sym4 (hình 4c), coif3 (hình 4d) với số lượng điểm đo chuyển vị lần lượt là 51, 101, 201, và 501 điểm có khoảng cách cách đều nhau. Ta có một số nhận xét:

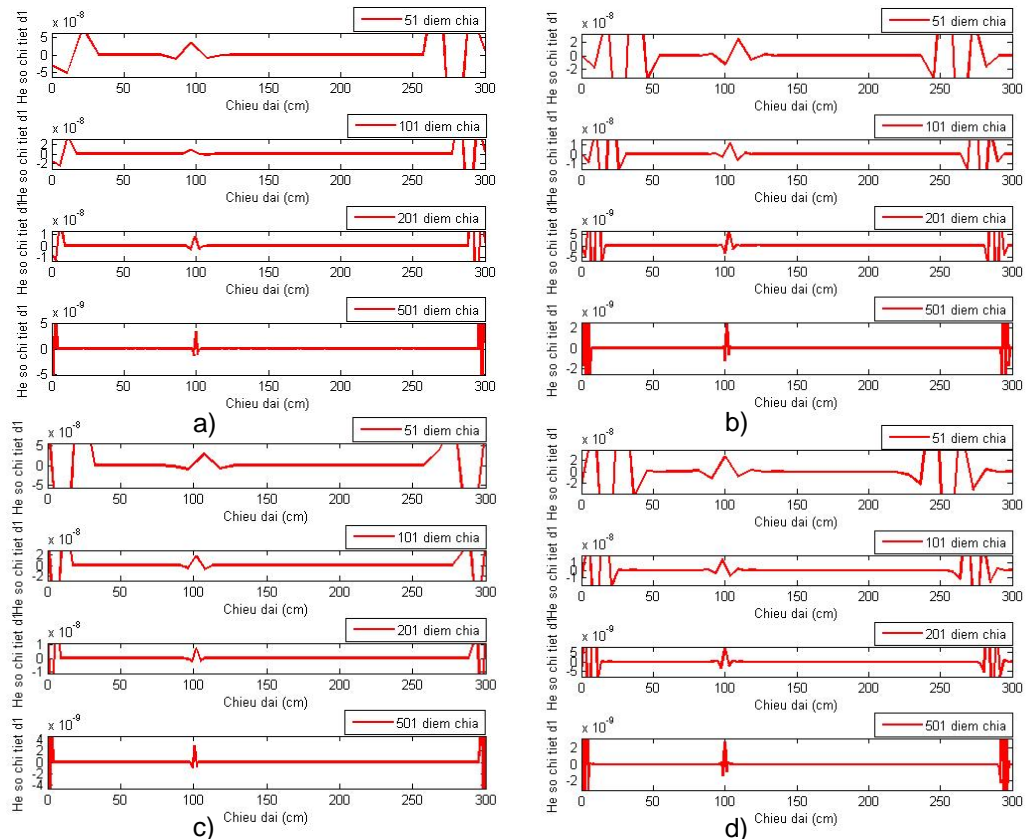
- Khi tăng số điểm đo thì kết quả phân tích càng rõ nét, thông thường ta có thể chọn số điểm đo từ 51 cho đến 201 điểm chia là đủ.
- Trong các loại Wavelet được lựa chọn thì Wavelet db4 cho kết quả rõ nét nhất.
- Ngoài ra tại 2 đầu nút các Wavelet đều có giá trị đoạn, tín hiệu phân tích không được rõ nét bởi dữ liệu đưa vào là hữu hạn trong khi đó để Wavelet có được kết quả tốt thì tín hiệu đưa vào phải đảm bảo tính liên tục tại các điểm nút.

3.2. Phân tích Wavelet của độ võng dầm theo độ sâu vết nứt

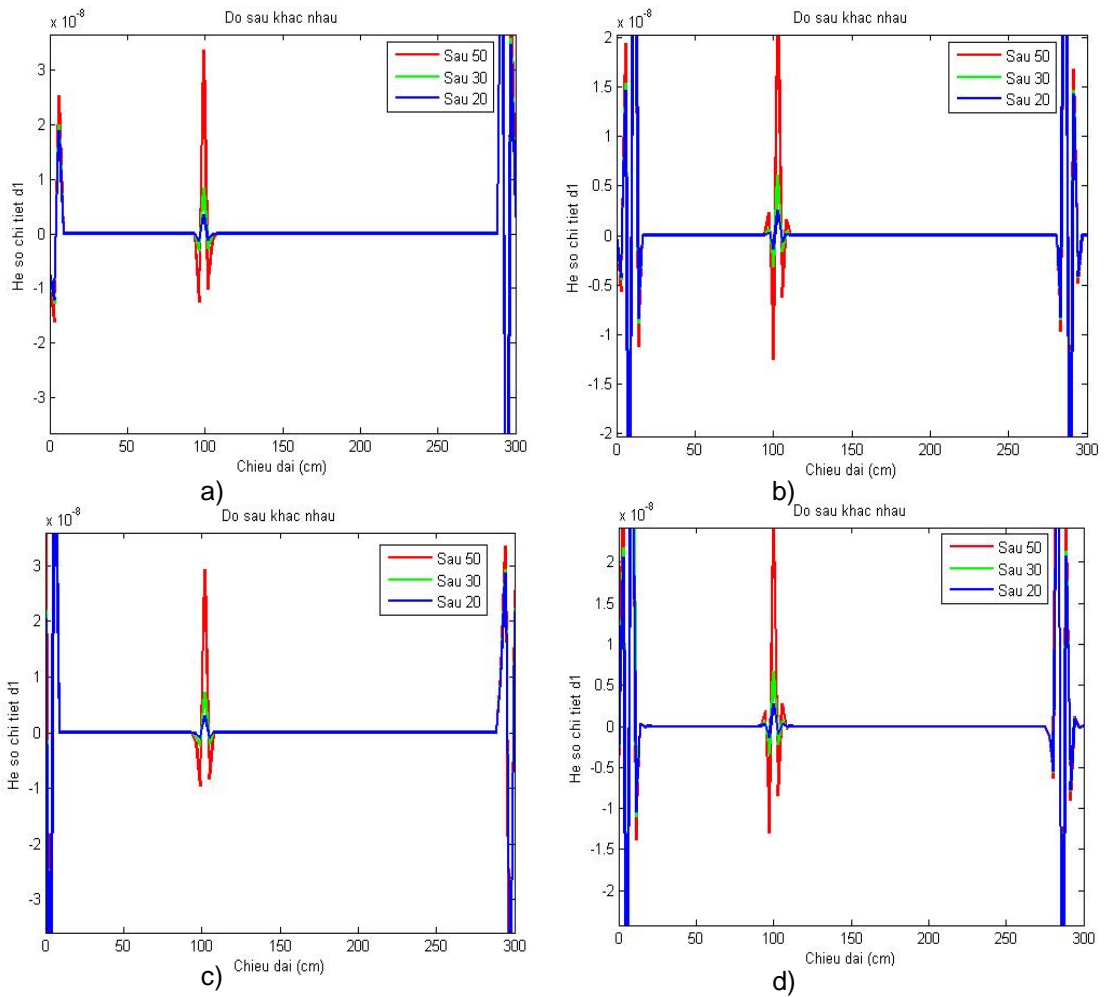
Xét dầm có 1 vết nứt tại vị trí $z = 1m$ với các độ sâu vết nứt là 20%, 30% và 50%. Số lượng điểm đo chuyển vị là 201 điểm với khoảng cách cách đều nhau. Trên hình 5 là kết quả xác định độ sâu vết nứt sử dụng bốn loại Wavelet: db4 (hình 5a), bior 6.8 (hình 5b), sym4 (hình 5c), coif3 (hình 5d). Ta có một số nhận xét:

- Khi chiều sâu càng tăng thì kết quả phân tích càng rõ nét. Như vậy dựa vào phân tích Wavelet ta có thể xác định được chiều sâu của vết nứt.

- Kết quả phân tích theo cả bốn loại Wavelet đều rõ nét.



Hình 4. Xác định vết nứt theo số lượng điểm chia khác nhau



Hình 5. Xác định vết nứt theo độ sâu vết nứt khác nhau

3.3. Phân tích Wavelet của độ võng dầm theo số lượng vết nứt có độ sâu như nhau

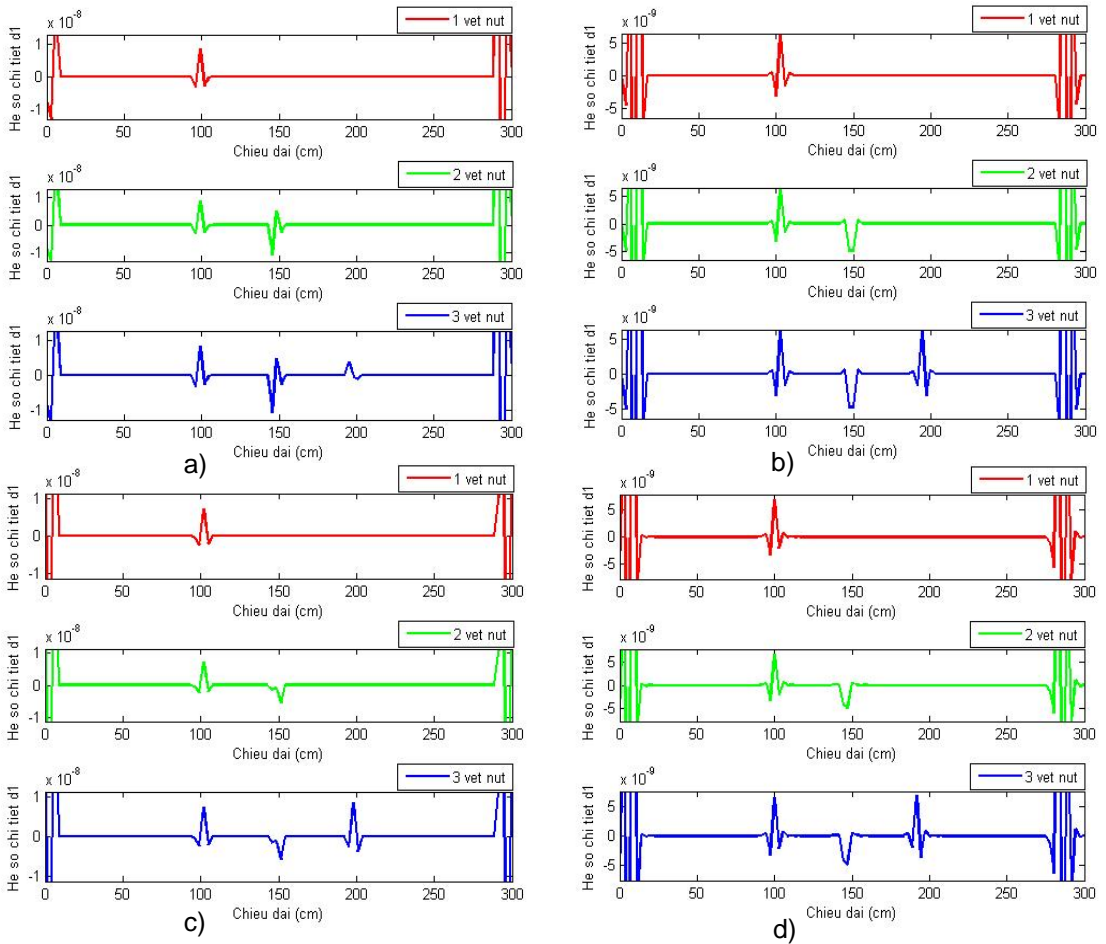
Xét dầm có lần lượt là 1,2,3 vết nứt với độ sâu như nhau là 30%:

- 1 vết nứt tại vị trí $z = 1m$.
- 2 vết nứt tại vị trí $z = 1m$ và $z = 1,5m$.
- 3 vết nứt tại vị trí $z = 1m$, $z = 1,5m$ và $z = 2m$.

Trên hình 6 là kết quả xác định vết nứt sử dụng 4 loại Wavelet: db4 (hình 6a), bior 6.8 (hình 6b), sym4 (hình 6c), coif3 (hình 6d) với số lượng điểm chia đều là 201 điểm. Ta có một số nhận xét:

- Tất cả các loại Wavelet đều xác định được vị trí vết nứt và cho kết quả khá tốt. Tuy vậy, biên độ của phân tích Wavelet tại các vết nứt thứ 2 và 3 là không lớn như đối với vết nứt thứ nhất.

- Trong các Wavelet thì Wavelet db4 cho kết quả rõ nét nhất.



Hình 6. Xác định vết nứt theo số lượng vết nứt có độ sâu như nhau

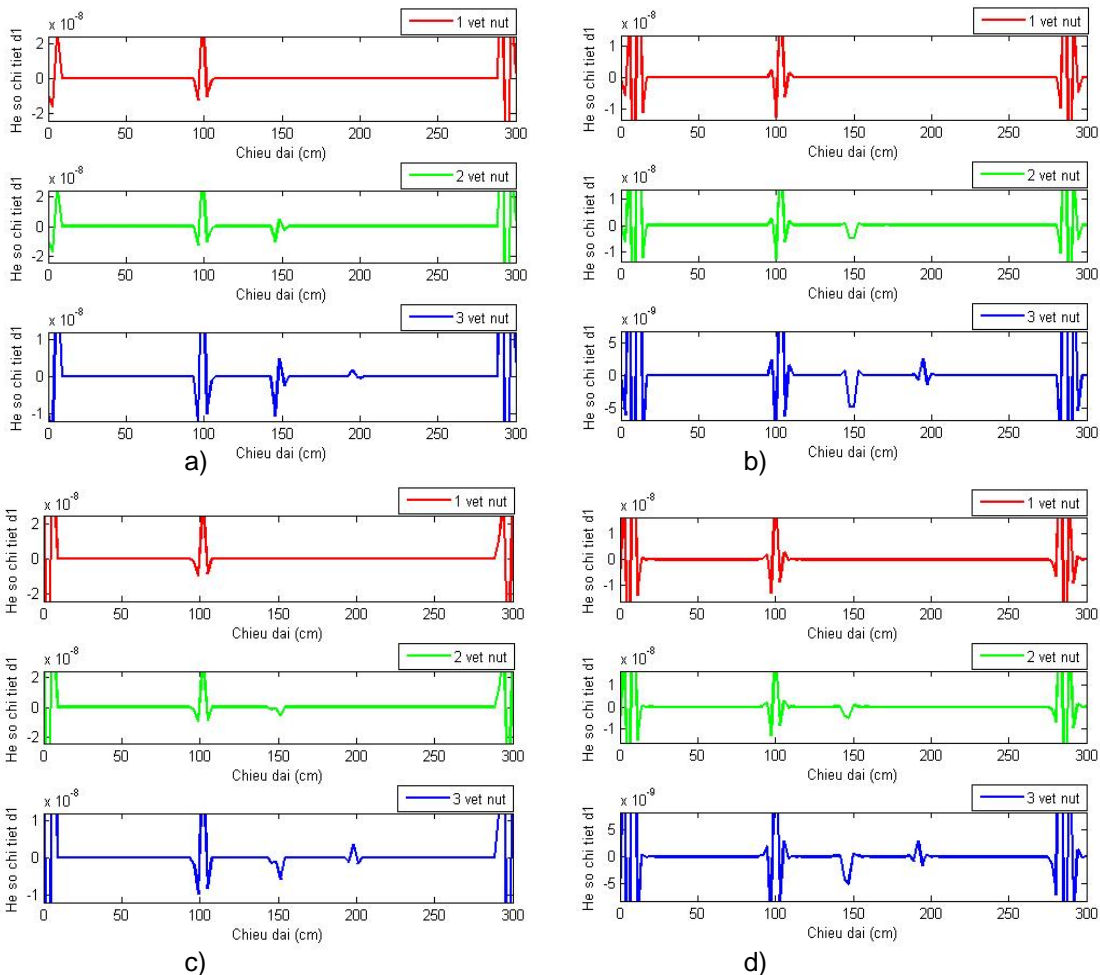
3.4. Phân tích Wavelet của độ võng dầm theo số lượng vết nứt có độ sâu khác nhau

Xét dầm có lần lượt là 1,2,3 vết nứt với độ sâu vết nứt khác nhau:

- 1 vết nứt tại $z = 1m$, độ sâu 50%.
- 2 vết nứt: vết nứt thứ nhất tại $z = 1m$ độ sâu 50%, vết nứt thứ hai tại $z = 1.5m$ độ sâu 30%.
- 3 vết nứt: vết nứt thứ nhất tại $z = 1m$ độ sâu 50%, vết nứt thứ hai tại $z = 1.5m$ độ sâu 30% và vết nứt thứ ba tại $z = 2m$ độ sâu 20%.

Trên hình 7 là kết quả xác định vết nứt sử dụng 4 loại Wavelet: db4 (hình 7a), bior 6.8 (hình 7b), sym4 (hình 7c), coif3 (hình 7d) với số lượng điểm chia đều là 201 điểm. Ta có một số nhận xét:

- Tất cả các loại Wavelet đều xác định được vị trí vết nứt. Tuy vậy, việc xác định độ sâu của từng vết nứt chưa được tốt vì biên độ của phân tích Wavelet không hẳn tỷ lệ với độ sâu như trong trường hợp dầm có 1 vết nứt. Trong những trường hợp này, muốn xác định được độ sâu của vết nứt thì sẽ có những phân tích riêng.
- Trong các Wavelet thì Wavelet db4 cho kết quả rõ nét nhất.



Hình 7. Xác định vết nứt theo số lượng vết nứt có độ sâu khác nhau

4. Kết luận

Bài báo đã trình bày việc xác định số lượng, vị trí và độ sâu của các vết nứt trong các dầm bằng phép phân tích và tổng hợp tín hiệu Wavelet của các số liệu đo về chuyển vị tĩnh của dầm:

- Khi tăng số lượng điểm đo thì kết quả phân tích Wavelet các tín hiệu là chuyển vị tĩnh của dầm càng rõ nét. Thông thường ta có thể chọn số lượng điểm đo từ 51 cho đến 201 điểm chia là đủ.

- Phân tích Wavelet hoàn toàn cho phép có thể xác định số lượng, vị trí và độ sâu của vết nứt, đặc biệt đối với trường hợp dầm có 1 vết nứt. Tuy vậy tại hai đầu của phần tử thì tín hiệu có gián đoạn do tín hiệu đưa vào là hữu hạn nên tại những điểm này cần phải có xem xét đặc biệt.

- Đối với trường hợp dầm có 1 vết nứt, khi độ sâu vết nứt tăng lên thì biên độ của phân tích Wavelet càng lớn, như vậy có thể dùng Wavelet để phân tích về độ sâu.

- Đối với trường hợp dầm có nhiều vết nứt thì phân tích Wavelet hoàn toàn có thể xác định được số lượng và vị trí của các vết nứt, tuy nhiên để khảo sát độ sâu của từng vết nứt đối với trường hợp dầm có nhiều vết nứt thì cần có các khảo sát cụ thể hơn, chẳng hạn tăng số điểm đo,...

- Trong trường hợp đo đạc có sai số, thì trước khi đưa vào phân tích Wavelet ta cần phải lọc tín hiệu. Công việc này là quen thuộc với người phân tích và nằm ngoài phạm vi của bài báo.

- Trước khi tiến hành phân tích Wavelet, nên khảo sát sơ bộ để chọn loại Wavelet thích hợp. Trong bài toán kết cấu hệ thanh, ta có thể chọn hai loại Wavelet là db4 và bior 6.8.

Tiến hành phân tích tương tự đối với các trường hợp dầm con son, dầm có hai đầu ngàm,..., kết cấu khung chịu các dạng tải trọng khác nhau, ta nhận thấy mặc dù phần tử có thể chịu nhiều dạng liên kết và dạng tải trọng khác nhau, nhưng nếu ta đo được chuyển vị tĩnh của dầm thì hoàn toàn xác định được số lượng, vị trí và độ sâu vết nứt trong các kết cấu hệ thanh. Như vậy qua các phân tích trên, phân tích Wavelet hoàn toàn có thể xác định được số lượng, vị trí và độ sâu vết nứt trong các kết cấu hệ thanh.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Tiến Khiêm, Trần Văn Liên (2000), "Phân tích dầm chịu uốn có nhiều vết nứt", *Tuyển tập báo cáo Hội nghị kết cấu xây dựng- 2000*, Hà nội 12/2000.
2. Trần Văn Liên (2003), *Bài toán ngược trong cơ học và một số ứng dụng*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Xây dựng.
3. Trần Văn Liên, Nguyễn Tiến Khiêm (2002), "Phân tích tĩnh kết cấu khung có nhiều vết nứt", *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ 7*, Hà nội.
4. Nguyễn Thị Hiền Lương, Lý Vĩnh Phan (2009), "Phân tích độ nhạy cảm của dầm có vết nứt bằng phép biến đổi Wavelet", *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc 8-9/4/2009*, tập 1, trang 115.
5. Adams R.D., Cawley P., Pie C.J., Stone B.J.A. (1978), "A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures", *Journal of mechanical engineering science*, 20, 93-100.
6. Cawley P., Adams R.D. (1979), "The location of defects in structures from measurements of natural frequencies", *J. of strain analysis*.Vol 14 No 2.
7. Chih-Chieh Chang, Lien-Wen Chen (2005), "Detection of the location and size of cracks in the multiple cracked beam by spatial wavelet based approach", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 19, Issue 1 , January 2005, pages 139-155.
8. Helong Li, Xiaoyan Deng, Hongliang Dai (2007), "Structural damage detection using the combination method of EMD and wavelet analysis", *Mechanic system and signal processing*, 21, 298-306.
9. Nguyen Xuan Hung (1999), *Dynamics of structures and its application in structural identification*, Institute of Applied Mechanics, National Center for Natural Science and Technology
10. N. T. Khiem, T.V. Lien (2001), "A simplified method for natural frequency analysis of multiple cracked beam", *Journal of Sound and Vibration* 245(4), 737-751.
11. Nguyen Tien Khiem, Dao Nhu Mai (1997), "Natural frequency analysis of cracked beam", *Journal of Mechanics*, NCNST of Vietnam, 19(2), 28-38.
12. Liew K.M., Wang Q. (1998), "Application of wavelet theory for crack identification in structures", *Journal of Engineering Mechanics*, February.
13. Tran Van Lien, Nguyen Tien Khiem (2001), "Static diagnosis of multiple cracked beam". *Vietnam Journal of Mechanics*, NCNST of VN. Vol 23. No 4.

14. Loitriduis S., Douka E., Trochidis A. (2003), "Crack identification in double-cracked beams using wavelet analysis", *Journal of Sound and Vibration*.
15. Robertson A.N., Park K.C., Alvin K.F. (1998), "Identification of structural dynamics models using Wavelet-generated impulse response data", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 120, 261-266.
16. Viet Khoa Nguyen, Olatunbosun, Khiem N.T. (2007), "Wavelet based Method for remote monitoring of structural health by analysing the nonlinearity in dynamic response of damaged structures caused by crack – breathing phenomenon", *Technische mechanik*, Band 28, Heft 3-4.