

ĐỘ TIN CẬY PHỤ THUỘC THỜI GIAN CỦA CÔNG TRÌNH

GS.TS Nguyễn Văn Phó

PGS.TS Lê Ngọc Thạch

ThS. Chu Thanh Bình

Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp

Trường Đại học Xây dựng

Tóm tắt: Trong bài báo này các tác giả đề xuất một phương pháp mới để xác định độ tin cậy phụ thuộc thời gian của công trình. Ý tưởng chính của phương pháp như sau:

- Tải trọng là các quá trình ngẫu nhiên cơ bản có dạng $Q\left(\vec{x}, t, \vec{\theta}\right) = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^n \theta_i \varphi_i(t)$

trong đó φ_0, φ_i là các hàm tất định, θ_i là các biến ngẫu nhiên độc lập.

- Thay thế phương trình dao động ngẫu nhiên bằng phương trình dao động tất định bằng cách thay đại lượng ngẫu nhiên bởi kỳ vọng của chúng.

- Tính quãng an toàn M , kỳ vọng μ_M và độ lệch chuẩn σ_M

- Xác định độ tin cậy theo 2 phương pháp: Tính chỉ số độ tin cậy β và xấp xỉ độ tin cậy bởi tần số an toàn.

Một thí dụ đơn giản đã được xét để minh họa phương pháp đề xuất.

Summary: In this paper, the authors proposed a new method for the determination of time dependent reliability of structures. The main ideas of the method as follows:

- The load is a fundamental stochastic process that takes the form of

$Q\left(\vec{x}, t, \vec{\theta}\right) = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^n \theta_i \varphi_i(t)$ where φ_0, φ_i are deterministic functions and θ_i is

independent random variable.

- Substitute stochastic oscillation equations by deterministic oscillation equations.

- Determine safety margin M , expectation μ_M and standard deviation σ_M .

- Determine reliability by two methods: Calculate reliability index β and approximation to reliability by safety frequency.

A simple example is considered.

1. Mở đầu

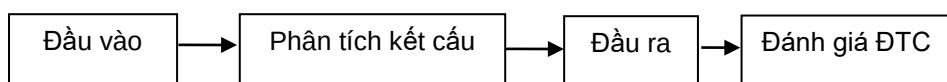
Định nghĩa tổng quát về độ tin cậy (ĐTC) của hệ thống đã được viện sỹ V.V.Bolotin nêu trong [1,2], trong đó các biến không gian, thời gian và phương trình trạng thái đã được đưa vào điều kiện của xác suất tin cậy. Do đó, độ tin cậy là một xác suất đồng thời phụ thuộc một hệ phương trình vi phân ngẫu nhiên và một hệ bất đẳng thức ngẫu nhiên.

Để giảm bớt khó khăn trong tính toán, người ta thường tìm ĐTC bằng cách tách thành 2 bước là giải phương trình trạng thái trước, sau đó đem kết quả thu được tính ĐTC. Trong các tài liệu về ĐTC phụ thuộc thời gian, người ta chỉ bàn đến cách tính ĐTC, chẳng hạn như sự

vượt ngưỡng của các quá trình ngẫu nhiên mà không xét đến giải phương trình trạng thái [7,8,9...]. Thật ra, trong đa số trường hợp, việc giải phương trình vi phân ngẫu nhiên còn khó hơn việc tìm xác suất tin cậy. Do có nhiều ứng dụng quan trọng khác nhau, dao động ngẫu nhiên của các cơ hệ và sự vượt ngưỡng của các quá trình ngẫu nhiên đã trở thành những lĩnh vực nghiên cứu riêng và đạt nhiều kết quả quan trọng [4,5,6...].

Một vấn đề khác, cũng chưa được quan tâm đúng mức là từ các đặc trưng bằng số đã cho của đầu vào (kỳ vọng, phương sai, hệ số tương quan) tìm các đặc trưng bằng số của quãng an toàn (thông qua biến trạng thái). Các khó khăn trên tăng gấp bội khi tính toán công trình. Để thấy rõ mối quan hệ giữa các vấn đề trên, ta xét sơ đồ tính toán ĐTC theo hình 1, trong đó:

- **Đầu vào:** Đối với công trình, đầu vào thường có 3 loại tham số: tải trọng, vật liệu và hình học trong đó tải trọng là các đại lượng ngẫu nhiên, vật liệu là các hằng số vật lý của vật liệu, hình học là các kích thước của kết cấu.
- **Phân tích kết cấu:** Giải các phương trình dao động ngẫu nhiên để tìm các biến trạng thái.
- **Đầu ra:** Theo điều kiện an toàn để xác định đầu ra là: chuyển vị, ứng suất, tần số, v.v...
- **Đánh giá ĐTC:** Giải bài toán vượt ngưỡng của quá trình ngẫu nhiên (vector trạng thái) đối với một miền nào đó (miền an toàn có thể tất định hay ngẫu nhiên).



Hình 1. Sơ đồ tính ĐTC

Việc tìm ĐTC phụ thuộc thời gian của công trình theo lược đồ chung đã nêu ở trên gặp rất nhiều khó khăn, do các nguyên nhân sau:

- Tính phức tạp của bài toán kết cấu (như nhiều bậc tự do, phi tuyến...)
- Các phương pháp giải phương trình vi phân ngẫu nhiên (kể cả phương pháp gần đúng) chưa đủ mạnh để giải các bài toán động lực kết cấu, trừ một số trường hợp riêng.
- Đòi hỏi một lượng thông tin lớn (hàm mật độ xác suất đồng thời, hàm tương quan... mà thực tế khó đáp ứng.
- Các phương pháp tính ĐTC hiện hành còn nhiều hạn chế, chưa đáp ứng được các yêu cầu của tính toán công trình.

Có lẽ trong tương lai gần, chúng ta không hy vọng có một phương pháp tính ĐTC phụ thuộc thời gian của công trình mà có thể khắc phục được các khó khăn trên. Tuy nhiên, do yêu cầu của thực tiễn là các công trình vẫn phải xây dựng nên để khắc phục các khó khăn nói trên, người ta không chờ các kết quả nghiên cứu của toán học mà người ta chủ động đề xuất một số phương pháp gần đúng dựa trên việc chấp nhận một số giả thiết. Song các giả thiết được thừa nhận phải đạt hai yêu cầu: được thừa nhận trong tính toán công trình và có thể giải bài toán (nghiệm đúng hay nghiệm số).

Trong bài báo này, các tác giả đề nghị một phương pháp tính ĐTC phụ thuộc thời gian của công trình bằng cách thừa nhận một số giả thiết và một số quan niệm đã được sử dụng phổ biến trong tính toán công trình ở các lĩnh vực khác nhau. Ý tưởng chính của phương pháp như sau:

- Tải trọng là các quá trình ngẫu nhiên cơ bản [6], được biểu diễn dưới dạng các hàm của các đại lượng ngẫu nhiên θ và thời gian t .

- Không giải trực tiếp phương trình vi phân dao động ngẫu nhiên, mà giải phương trình dao động tắt định tương ứng bằng cách thay các đại lượng ngẫu nhiên bằng kỳ vọng của chúng để tìm kỳ vọng của quá trình đầu ra là các biến trạng thái, đó là các hàm của thời gian t .

- Dựa trên định nghĩa chỉ số độ tin cậy $\beta = \mu_M / \sigma_M$ với M là quãng an toàn và quan niệm đánh giá an toàn theo các giá trị cực trị, để loại bỏ yếu tố không gian và thời gian, đưa bài toán ĐTC xét với quá trình ngẫu nhiên về xét với đại lượng ngẫu nhiên.

- Tính ĐTC theo 2 phương pháp: tìm chỉ số ĐTC β và tính theo tần số an toàn, từ đó so sánh kết quả.

Một thí dụ đơn giản đã được xét để minh họa cho phương pháp đề xuất.

2. Độ tin cậy phụ thuộc thời gian

2.1. Định nghĩa tổng quát ĐTC của hệ thống [1,2]

Gọi $\vec{u}(\vec{x}, \vec{\theta}, t) = \left\{ \vec{u}_i(\vec{x}, \vec{\theta}, t) \right\}^T$ là vector biến trạng thái, $\vec{q}(\vec{x}, \vec{\theta}, t) = \left\{ \vec{q}_i(\vec{x}, \vec{\theta}, t) \right\}^T$ là vector tải

trọng ngoài, phương trình trạng thái của hệ thống là

$$L \vec{u}(\vec{x}, \vec{\theta}, t) = \vec{q}(\vec{x}, \vec{\theta}, t) \quad (1)$$

trong đó $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ là các biến không gian, $\vec{\theta} = \{\theta_i\}^T$ là các tham số ngẫu nhiên, t là thời gian, L là toán tử vi phân (hay đại số).

Điều kiện an toàn của kết cấu theo các kiến thức cơ học công trình phải được thể hiện đảm bảo trên các mặt: độ bền, độ cứng, ổn định và tránh cộng hưởng, v.v... Điều kiện an toàn của kết cấu trong các tiêu chuẩn thiết kế được thể hiện ở các trạng thái giới hạn. Chẳng hạn, trong ISO2394-1998 [3], trạng thái giới hạn được xét theo hai nhóm:

- Trạng thái cực hạn tương ứng với khả năng chịu lực tối đa hoặc trong một số trường hợp là tương ứng với biến dạng và chuyển vị lớn nhất.

- Trạng thái giới hạn sử dụng liên quan đến việc khai thác, sử dụng công trình bình thường.

Trong nhiều trường hợp, điều kiện an toàn không thành lập trực tiếp trên biến trạng thái $\vec{u}$ mà trên biến chất lượng $\vec{v}$. Chẳng hạn, trong phương trình (1), $\vec{u}$ là chuyển vị, song điều kiện an toàn lại đặt lên ứng suất σ_{ij} có dạng $f(\sigma_{ij}) \leq \sigma_0$. Do đó ta phải thực hiện phép biến đổi,

đưa biến $\vec{u}$ về biến $\vec{v}$ thông qua toán tử G

$$G \vec{u} = \vec{v} \quad (2)$$

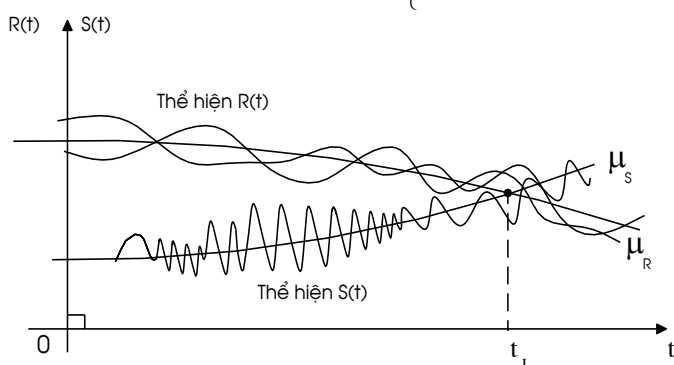
Vì vậy, với biến chất lượng $\vec{v}$, điều kiện an toàn là

$$f(\vec{v}) \in \Omega_0 \quad (3)$$

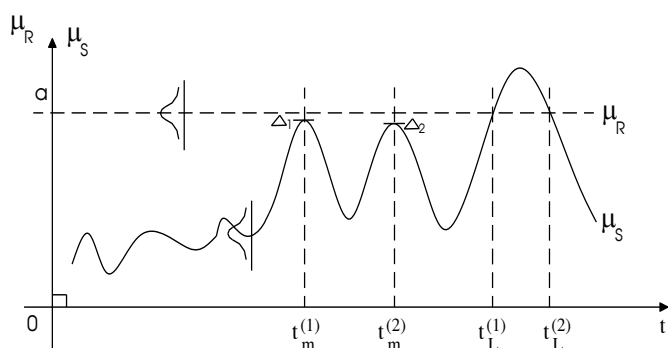
trong đó Ω_0 là miền an toàn, nói chung Ω_0 là hàm số của thời gian t . Điều kiện (3), về mặt toán học là một hệ bất đẳng thức của các tham số ngẫu nhiên, nó chia không gian $\vec{v}$ thành hai miền an toàn và không an toàn.

Viện sỹ Nga V.V.Bolotin đã nêu định nghĩa tổng quát của độ tin cậy là xác suất

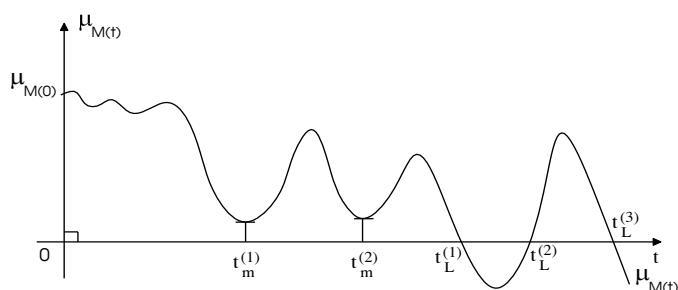
$$P(t) = P \left\{ \begin{array}{l} \vec{L}u(\vec{x}, \vec{\theta}, \tau) = \vec{q}(\vec{x}, \vec{\theta}, \tau) \\ \vec{G}u(\vec{x}, \vec{\theta}, \tau) = \vec{v}(\vec{x}, \vec{\theta}, \tau) \\ f \left[\vec{v}(\vec{x}, \vec{\theta}, \tau) \right] \in \Omega_0 \\ \forall \vec{x} \in V \\ \forall \tau \in [0, t] \end{array} \right\} \quad (4)$$



Hình 2. Hình ảnh bài toán ĐTC phụ thuộc thời gian.



Hình 3. Các thể hiện của $S(t), R(t)$ với $\mu_R = \text{const}$.



Hình 4. Kỳ vọng của quãng an toàn $M(t)$

trong đó V là miền hệ chiếm trong không gian 3 chiều $\vec{x} = \{x_1 \ x_2 \ x_3\}^T$.

Xác suất (4) là xác suất đồng thời thỏa mãn một hệ phương trình và bất phương trình. Điều kiện $\forall \tau \in [0, t]$ đòi hỏi các điều kiện phải thỏa mãn tại mọi điểm trước và cả ngay cả thời điểm đang xét.

Điều kiện $\forall \vec{x} \in V$ đòi hỏi các điều kiện phải thỏa mãn tại mọi điểm mà hệ thống chiếm trong không gian.

2.2. Trường hợp cơ bản (xét tại 1 điểm xác định của công trình)

Xét trường hợp cơ bản, quãng an toàn $M(t)$ được tách thành 2 thành phần: Khả năng chịu lực $R(t)$ và hiệu quả tải trọng $S(t)$, đó là 2 quá trình ngẫu nhiên, do đó, quãng an toàn $M(t) = R(t) - S(t)$ cũng là một quá trình ngẫu nhiên.

Xác suất an toàn là

$$P_s(t) = \text{Prob} \left[\begin{array}{l} R(\tau) - S(\tau) \geq 0 \\ 0 \leq \tau \leq t \end{array} \right]$$

Hình ảnh bài toán ĐTC phụ thuộc thời gian cho trường hợp cơ bản được biểu diễn trên hình 2.

Nói chung khả năng chịu lực $R(t)$ giảm theo thời gian còn hiệu quả tải trọng $S(t)$ tăng theo thời gian. Thời điểm $t=t_L$, tại đó $\mu_R = \mu_S$, là thời điểm phá hoại. Có thể có nhiều điểm t_L vì các hàm theo thời gian μ_R và μ_S là phi tuyến nhưng ta chỉ xét t_L là thời điểm đầu tiên. Trường hợp riêng, $R(t)$ là một quá trình dừng có $\mu_R = \text{const} = a$, còn $S(t)$ là một quá trình bất kỳ thể hiện trên hình 3: $t_L^{(1)}$ là thời điểm đầu tiên mà $\mu_R \leq \mu_S$, tại các điểm $t_m^{(1)}, t_m^{(2)}$ có $\Delta = \mu_R - \mu_S$ đủ nhỏ.

Trường hợp $M(t)$ không tách thành 2 thành phần $R(t)$ và $S(t)$, điều kiện an toàn là $M(t) \geq 0$, nên kỳ vọng μ_M là một hàm của t được biểu diễn trên hình 4. Khi đã biết $\mu_M(t)$ và Δ_i thì việc xác định các giá trị $t_m^{(i)}$ và $t_L^{(j)}$ là thực hiện được.

Các hình vẽ trên đây chỉ vẽ các kỳ vọng, các thể hiện của quá trình biến thiên quanh kỳ vọng.

2.3. Xác định "vị trí và thời điểm nguy hiểm"

Về nguyên tắc, phải xét an toàn tại $\forall \vec{x} \in V$ và $\forall \tau \in [0, t]$ rồi so sánh để chọn giá trị $\min$, do đó khối lượng tính toán lớn. Nếu kết cấu không được thiết kế theo "ĐTC đều", thì nhiều điểm (hay mặt cắt) của kết cấu có ĐTC xấp xỉ 1, tại các điểm đó chắc chắn an toàn. Vì vậy, ta chỉ cần xét tại các điểm (hay thời điểm) có ĐTC thấp hơn:

- **Điểm nguy hiểm:** Theo quan điểm tiền định, điểm nguy hiểm (hay tiết diện nguy hiểm) của công trình là vị trí có ứng suất (hay ứng lực) đạt cực trị (trong không gian ứng suất nhiều chiều thì ứng suất được thay bởi cường độ ứng suất), nơi có khả năng phương sai lớn (mối nối, thay đổi đột ngột tham số hình học hay vật liệu, khó thi công, khó duy tu bảo dưỡng v.v...).

- **Thời điểm nguy hiểm:** Khác với bài toán tĩnh, trong bài toán động lực ứng suất cực đại không nhất thiết đạt tại điểm tải trọng đạt cực đại. Thời điểm nguy hiểm là thời điểm $\mu_M(t) = 0$ (các $t_L^{(i)}$) và thời điểm $\mu_M(t)$ đủ bé (các $t_m^{(i)}$). Nếu xét biến trạng thái là các chuyển vị thì t_L và t_m bao gồm cả khoảng thời gian rơi vào miền cộng hưởng.

Do chỉ xét tại các vị trí và thời gian nguy hiểm, ta đã loại yếu tố không gian và thời gian, đưa bài toán ĐTC đối với quá trình ngẫu nhiên về bài toán ĐTC với đại lượng ngẫu nhiên. Trong phân tích ngẫu nhiên nói chung, ta cần phải xác định các đại lượng khác như là hàm tương quan, mật độ phổ, v.v... nhưng trong tính ĐTC sau đây, ta chỉ cần tính kỳ vọng và phương sai của μ_M tại t_m và t_L .

2.4. Lực đồ tính ĐTC phụ thuộc thời gian

2.4.1. Bước 1: Chuẩn bị đầu vào

a) Tải trọng: Giả sử tải trọng là các đại lượng và quá trình ngẫu nhiên cơ bản [6] có dạng

$$Q\left(\vec{x}, t, \vec{\theta}\right) = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^n \theta_i \varphi_i(t) \quad (5)$$

trong đó φ_0, φ_i là các hàm tiền định, θ_i là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập. Tải trọng biểu diễn dưới dạng (5) là một lớp khá rộng các quá trình dừng và không dừng. Chẳng hạn, quá trình

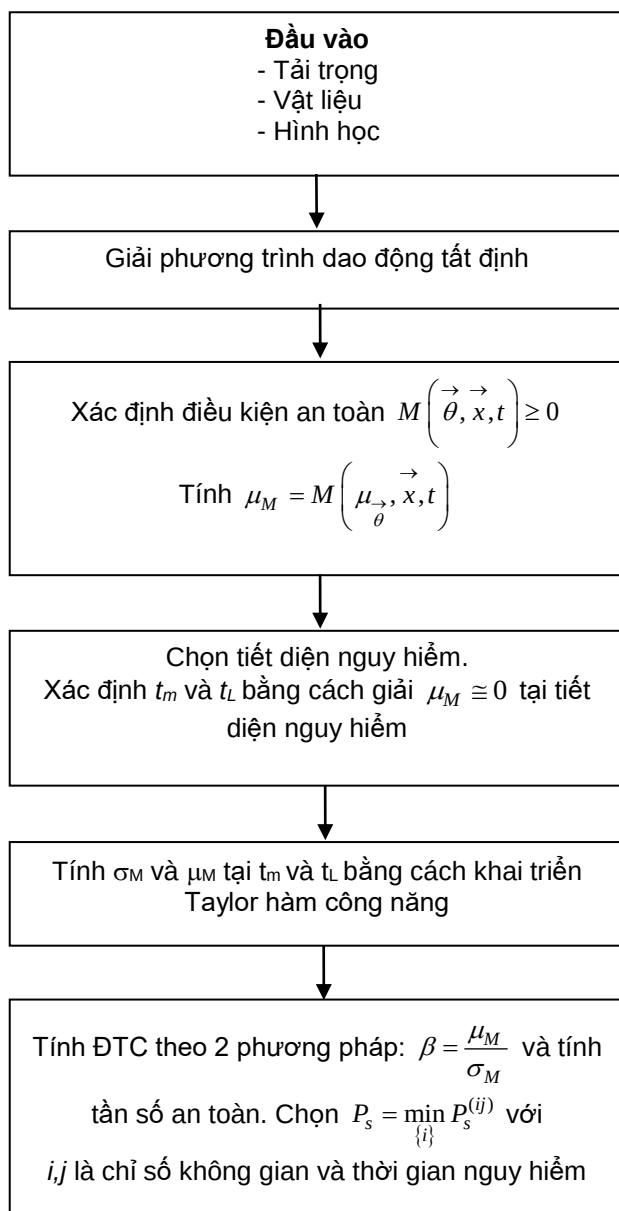
$Q\left(t, \vec{\theta}\right) = \theta_0 + \theta_1 \sin \omega t$ với $\mu_{\theta_1} = 0; \sigma_{\theta_1} = 1$ và $\mu_{\theta_0} = \mu_Q = \text{const}$ là một quá trình dừng, còn quá

trình $Q\left(t, \vec{\theta}\right) = \varphi_0(t) + \theta_1 \sin \omega t$ có $\mu_Q = \varphi_0(t)$ là một quá trình không dừng.

Theo Eurocode 1 (Part 1-4: General action- Wind actions): "Vận tốc gió và áp lực do vận tốc gió gây ra, gồm thành phần trung bình và thành phần nhiễu động. Thành phần trung bình là một đại lượng tất định (kỳ vọng), thành phần nhiễu động là một đại lượng ngẫu nhiên có kỳ vọng bằng 0 và độ lệch chuẩn σ ". Do đó, có thể biểu diễn vận tốc gió dưới dạng $\vec{v}(t) = v_0(t) + \theta_1 \varphi(t)$. Trong Eurocode 1 cũng đã xử lý thống kê số liệu để đưa ra v_0 , θ_1 và xét trên các phân bố cực trị.

b) Các tham số vật liệu và hình học là các đại lượng ngẫu nhiên có các đặc trưng bằng số.

2.4.2. Bước 2: Tìm kỳ vọng của quãng an toàn và xác định t_L và t_m



Hình 5. Sơ đồ khối của thuật toán

Theo [10,11,12,...], nếu bài toán là ổn định theo các thông số ban đầu và phương sai của các biến ngẫu nhiên là bé hơn 20% kỳ vọng của nó thì ta có thể chấp nhận mệnh đề gần đúng: "Kỳ vọng của hàm bằng hàm của các kỳ vọng", trừ trường hợp thỏa mãn bất đẳng thức Lencent [11]. Do đó, ta phải giải bài toán dao động tất định tương ứng bằng cách thay đại lượng ngẫu nhiên bởi các kỳ vọng của chúng, để tìm kỳ vọng của các biến trạng thái X_i : $\mu_{X_i} = X_i(\mu_{\theta_i}, t)$ và của quãng an toàn $M = M(X_i, t)$, từ đó giải phương trình $\mu_M \equiv 0$ ta tìm được các giá trị t_L và t_m .

2.4.3. Bước 3: Tìm σ_{X_i} và σ_M

Tại các thời điểm t_L và t_m thì $X_i = \eta_i(\vec{\theta})$, do vậy ta tìm σ_{X_i} bằng cách khai triển Taylor quanh kỳ vọng để giữ lại các thành phần bậc 0, bậc nhất và bậc hai, từ đó tìm σ_{X_i} [13,14,15,...]. Đối với quãng an toàn M , việc tìm σ_M cũng tương tự như đối với σ_{X_i} .

2.4.4. Bước 4: Tính ĐTC

Tính ĐTC theo 2 phương pháp:

a) Tính chỉ số ĐTC $\beta = \mu_M / \sigma_M$:

Phương pháp này có ưu điểm đơn giản, không đòi hỏi nhiều thông tin, chỉ cần tìm được σ_M và μ_M , song có những nhược điểm là phụ thuộc vào dạng toán học của M và sai số do tính gần đúng σ_M và μ_M .

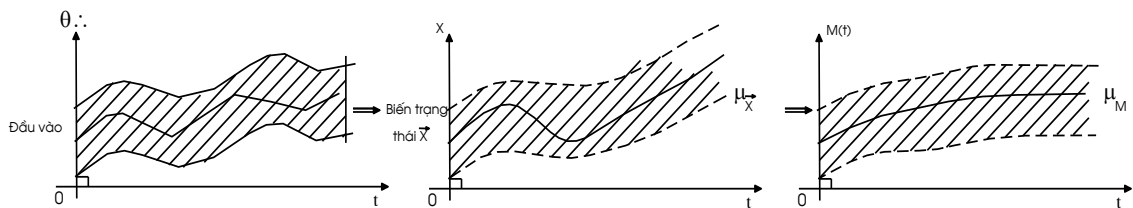
b) Tính ĐTC theo ước lượng xác suất của tần số an toàn [16,17,23,24,25,26]: Phương pháp này khắc phục được các thiếu sót của phương pháp trên, song khối lượng tính toán lớn. Ngày nay do kỹ thuật tính toán phát triển, máy tính có thể tính hàng tỷ phép tính trong 1 giây, khó khăn về khối lượng tính toán có thể khắc phục. Mặt khác thuật toán trình bày ở đây không phải là thuật toán tính lặp (không dùng kết quả bước trước để dùng vào bước sau), nên không có tích lũy sai số.

2.5. Sơ đồ khối của phương pháp

Từ các nghiên cứu trên, ta nhận được sơ đồ khối của phương pháp thể hiện trên hình 5.

3. Cơ sở lý luận của phương pháp

3.1. Dựa vào kỳ vọng để xét biến thiên quanh kỳ vọng



Hình 6. Hình ảnh đầu vào và đầu ra

Các bài toán được xét ở đây là các bài toán được “*thành lập đúng đắn*”, tức là các bài toán ổn định theo các thông số ban đầu; ở đây ta không xét các bài toán “*thành lập không đúng đắn*” [18,19]. Vì vậy, khi đầu vào biến thiên trong một miền nào đó quanh kỳ vọng thì đầu ra (biến trạng thái và hàm công năng) cũng biến thiên quanh kỳ vọng và nằm trong một miền xác định tương ứng (hình 6). Do đó, việc căn cứ theo kỳ vọng (là nghiệm bài toán tất định) để theo dõi sự biến thiên của quá trình quanh kỳ vọng là hợp lý. Điều này cũng phù hợp với cách làm quen thuộc trong tính toán công trình: căn cứ theo các số liệu quan sát đo đạc tìm giá trị trung bình, đưa vào sơ đồ tính toán tất định, sau đó khắc phục các sai số (do tính toán tất định với kỳ vọng) bằng cách dùng các hệ số điều chỉnh (tải trọng, vật liệu, hình học).

3.2. Tính toán theo phân phối cực trị

Việc tính toán công trình theo các giá trị cực trị (tải trọng, nội lực, đáp ứng, v.v...) đã được đề cập đến trong nhiều tài liệu; việc xử lý thống kê với các giá trị cực trị cũng được dùng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực [20,21,...]. Xét theo cực trị thì khối lượng tính toán giảm, song không ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng, vì ĐTC của hệ đạt giá trị bằng giá trị min của điểm yếu nhất.

3.3. Sai số trong tính toán σ_{X_i} và σ_M

Thông thường để xác định σ_{X_i} và σ_M , người ta dùng phép khai triển Taylor quanh giá trị trung bình, giữ lại các thành phần bậc 1 hoặc 2, bỏ qua các thành phần bậc cao hơn. Khi tính toán, các tham số của công trình nói chung được thừa nhận là sai số bé so với giá trị trung bình (không quá 20%), nên sai số do bỏ các thành phần bậc cao trong khai triển Taylor là có thể chấp nhận được.

3.4. Sai số do rời rạc hóa

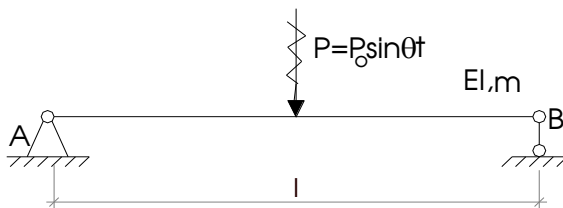
Việc tính toán công trình trên máy tính được thực hiện tại các giá trị rời rạc của các tham số đầu vào. Sự không tương đương của các giá trị rời rạc của đầu vào đã được khắc phục

bằng các trọng số [16,22]. Rời rạc hóa (thưa hay dày) là theo tính chất cơ học, vật lý của đại lượng. Vì vậy sai số do rời rạc hóa là có thể chấp nhận được.

3.5 Sai số do xấp xỉ ĐTC là tần suất

Như ta đã biết, theo định nghĩa ban đầu của xác suất thì độ tin cậy là giới hạn của tần suất khi số phép thử tăng lên vô hạn. Trong thực hành, số phép thử không thể là vô hạn, nên tùy theo độ chính xác đòi hỏi để xác định số phép thử. Đây cũng tương tự như phương pháp Monte Carlo. Trong phương pháp Monte Carlo quan hệ giữa số phép thử và độ chính xác đã được chứng minh. Để tiện việc tính toán giải tích, người ta thường xấp xỉ tần suất bằng một đường cong trơn gọi là hàm mật độ hay hàm phân phối xác suất. Do đó, việc trở lại tính toán độ tin cậy theo định nghĩa ban đầu của nó cũng là một cách có thể chấp nhận được, không bị sai số do xấp xỉ hàm.

4. Thí dụ



Hình 7. Dầm đơn giản chịu lực

Xét một dầm đơn giản bằng thép hình chữ I N^o40 ($I_x=19062 \text{ (cm}^4\text{)}$, $A= 72.6 \text{ (cm}^2\text{)}$), chiều dài $L=5\text{m}$, trọng lượng trên mét dài là 0.57 kN/m , chịu lực cưỡng bức tuần hoàn $P_0 \sin \Omega t$ (hình 7). Cho biết $E=2.1 \times 10^8 \text{ (kN/m}^2\text{)}$, $\nu=0.3$, biên độ của lực cưỡng bức $P_0 = 100 \text{ kN}$, tần số dao động cưỡng bức $\Omega=0.75\omega_1$ với ω_1 là tần số dao động riêng thứ

nhất của kết cấu, $\sigma_0=30 \times 10^4 \text{ kN/m}^2$ là ứng suất nguy hiểm của vật liệu. Yêu cầu xác định độ tin cậy theo điều kiện bền cho dầm chịu lực theo hai phương pháp đã nói ở trên.

Kỳ vọng và độ lệch chuẩn của các đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn cho như sau:

$$\sigma_E = 0.05\mu_E; \sigma_{R_0} = 0.1\mu_{P_0}; \sigma_{\sigma_0} = 1 \times 10^4 \text{ kN/m}^2.$$

Trong bài toán này, ta xét tải trọng tác dụng lên dầm gồm trọng lượng bản thân phân bố đều theo chiều dài và lực cưỡng bức tuần hoàn $P_0 \sin \Omega t$ đặt chính giữa dầm.

Chu kỳ và tần số dao động riêng của dầm là $T_1 = 0.019177\text{(s)}$, $\omega_1 = 327.64\text{(rad/s)}$. Sử dụng quan hệ $\Omega=0.75\omega_1$ ta tìm được chu kỳ và tần số dao động cưỡng bức là $T_\Omega = 0.02557\text{(s)}$, $\omega_\Omega = 245.73\text{(rad/s)}$. Sau đó ta tiến hành phân tích kết cấu chịu tải trọng cưỡng bức tuần hoàn với lực cưỡng bức là $P_0 \sin \Omega t$. Trong một chu kỳ, ta rời rạc thời gian với bước $\Delta t=2.56 \times 10^{-5}$. Kết quả nội lực và chuyển vị đưa ra cũng theo bước thời gian như vậy. Trong trường hợp này nội lực và chuyển vị tại các thời gian khác nhau tồn tại dưới dạng nghiệm số nên ta thay quá trình tính đạo hàm riêng bằng giá trị gần đúng

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_i} \approx \frac{\Delta \varphi}{\Delta X_i} = \frac{\varphi(X_i + \Delta X_i) - \varphi(X_i)}{\Delta X_i}$$

Về mặt toán học, các gia số ΔX_i được chọn càng nhỏ thì càng chính xác, thông thường để tiện cho việc tính toán ta lấy $\Delta X_i = \sigma_{X_i}$. Về nguyên tắc, phải xét an toàn tại $\forall \bar{x} \in V$ và $\forall \tau \in [0, t]$ rồi so sánh để chọn giá trị *min*, do đó khối lượng tính toán lớn. Tuy nhiên, với sơ đồ kết cấu và tải trọng tác dụng trên dầm như hình 7, ta nhận thấy *tiết diện nguy hiểm* trong trường hợp này tại tiết diện giữa dầm, nơi đặt tải trọng tập trung cưỡng bức. *Thời điểm nguy*

hiểm là thời điểm mà tại $t_m^{(1)} = \frac{T}{4}$ và $t_m^{(2)} = \frac{3T}{4}$, trong đó T là chu kỳ của dao động cưỡng bức. Do vậy ứng suất tại mắt cắt ngang nguy hiểm nhất của dầm tại các thời điểm $t_m^{(1)} = \frac{T}{4}$ và $t_m^{(2)} = \frac{3T}{4}$ được xác định là $\sigma(t) = \frac{M_x}{I_x} \cdot \frac{h}{2}$.

4.1. Tính chỉ số độ tin cậy β

Điều kiện bền của dầm được biểu diễn dưới dạng $\frac{M_x}{I_x} \cdot \frac{h}{2} - \sigma_0 \leq 0$. Độ tin cậy của dầm theo điều kiện bền là $P_s = P_{rob} \left(\frac{M_x}{I_x} \cdot \frac{h}{2} \leq \sigma_0 \right)$ hay $P_f = P_{rob} \left(\frac{M_x}{I_x} \cdot \frac{h}{2} > \sigma_0 \right)$. Hàm trạng thái giới hạn có dạng $M(t) = \sigma_0 - \frac{M_x}{I_x} \cdot \frac{h}{2}$. Đặt $R = \frac{M_x}{I_x} \cdot \frac{h}{2}$, R là hàm của các biến ngẫu nhiên E, P_0 . Vậy chỉ số độ tin cậy theo điều kiện bền sẽ tìm được theo công thức: $\beta = \frac{\mu_{\sigma_0} - \mu_R}{\sqrt{\sigma_{\sigma_0}^2 + \sigma_R^2}}$. Kỳ vọng của R phụ thuộc vào nội lực lớn nhất M_x của dầm. Độ lệch chuẩn của R được xác định theo công thức

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{h}{2I_x} \frac{\Delta M_{x,E}}{\Delta E} \sigma_E \right)^2 + \left(\frac{h}{2I_x} \frac{\Delta M_{x,P_0}}{\Delta P_0} \sigma_{P_0} \right)^2}$$

Tiến hành chạy chương trình Sap 2000 với các số gia của các biến E, P_0 được chọn đúng bằng độ lệch chuẩn của các biến ngẫu nhiên $\Delta X_i = \sigma_{X_i}$. Kết quả tính toán là $\mu_R = 267486.41 \text{ kN/m}^2$, $\sigma_R = 30036.39 \text{ kN/m}^2$. Chỉ số độ tin cậy theo điều kiện bền cho phân tử ở trạng thái ứng suất đơn của dầm khi chịu lực cưỡng bức tuần hoàn là $\beta = 1.027$, do đó xác suất an toàn theo điều kiện bền là $P_s = 0.8478$.

4.2. Tính độ tin cậy theo điều kiện bền bằng cách tính tần số xuất hiện sự kiện an toàn

Giả thiết các tham số E, σ_0, P_0 là các tham số ngẫu nhiên chuẩn. Các tham số còn lại là tất định. Ta chọn các giá trị rời rạc của các đại lượng ngẫu nhiên và giá trị hàm mật độ tương ứng là:

- Mô đun đàn hồi E được rời rạc hóa tại năm điểm: $E_1 = 1.764 \times 10^8$, $E_2 = 1.932 \times 10^8$, $E_3 = 2.1 \times 10^8$, $E_4 = 2.268 \times 10^8$, $E_5 = 2.436 \times 10^8 \text{ (kN/m}^2\text{)}$ với giá trị hàm mật độ xác suất tương ứng là: 3.214×10^{-9} , 1.44×10^{-8} , 2.375×10^{-8} , 1.44×10^{-8} , 3.214×10^{-9} .

- Giới hạn chảy của vật liệu được rời rạc hóa tại năm điểm: $\sigma_0^{(1)} = 28$, $\sigma_0^{(2)} = 29$, $\sigma_0^{(3)} = 30$, $\sigma_0^{(4)} = 31$, $\sigma_0^{(5)} = 32 \text{ (kN/cm}^2\text{)}$ với giá trị hàm mật độ xác suất tương ứng là: 0.054 , 0.242 , 0.3989 , 0.242 , 0.054 .

- Biên độ của lực kích thích P_0 được rời rạc hóa tại năm điểm: $P_0^{(1)} = 90$, $P_0^{(2)} = 95$, $P_0^{(3)} = 100$, $P_0^{(4)} = 105$, $P_0^{(5)} = 110 \text{ (kN)}$ với giá trị hàm mật độ xác suất tương ứng là: 0.0108 , 0.0484 , 0.0798 , 0.0484 , 0.0108 .

Số đầu vào tất định là $5 \times 5 \times 5 = 125$ trường hợp. Ứng suất tại mặt cắt ngang nguy hiểm nhất của dầm được xác định theo công thức $\sigma_{\max}(t) = \frac{M_x}{I_x} \cdot \frac{h}{2}$ và quãng an toàn là $M = \sigma_0 - \sigma_{\max}(t)$. Kết quả tính toán quãng an toàn $M = \sigma_0 - \sigma_{\max}(t)$ cho trong bảng 1.

Bảng 1. Quãng an toàn M khi E , σ_0 , P_0 là các tham số ngẫu nhiên chuẩn

	$\sigma_0^{(1)}$	$\sigma_0^{(2)}$	$\sigma_0^{(3)}$	$\sigma_0^{(4)}$	$\sigma_0^{(5)}$
$E_1, P_0^{(1)}$	-3.17	-2.17	-1.17	-0.17	0.83
$E_1, P_0^{(2)}$	-4.89	-3.89	-2.89	-1.89	-0.89
$E_1, P_0^{(3)}$	-6.62	-5.62	-4.62	-3.62	-2.62
$E_1, P_0^{(4)}$	-8.34	-7.34	-6.34	-5.34	-4.34
$E_1, P_0^{(5)}$	-10.06	-9.06	-8.06	-7.06	-6.06
$E_2, P_0^{(1)}$	1.16	2.16	3.16	4.16	5.16
$E_2, P_0^{(2)}$	-0.32	0.68	1.68	2.68	3.68
$E_2, P_0^{(3)}$	-1.81	-0.81	0.19	1.19	2.19
$E_2, P_0^{(4)}$	-3.29	-2.29	-1.29	-0.29	0.71
$E_2, P_0^{(5)}$	-4.77	-3.77	-2.77	-1.77	-0.77
$E_3, P_0^{(1)}$	3.91	4.91	5.91	6.91	7.91
$E_3, P_0^{(2)}$	2.58	3.58	4.58	5.58	6.58
$E_3, P_0^{(3)}$	1.25	2.25	3.25	4.25	5.25
$E_3, P_0^{(4)}$	-0.08	0.92	1.92	2.92	3.92
$E_3, P_0^{(5)}$	-1.40	-0.40	0.60	1.60	2.60
$E_4, P_0^{(1)}$	5.81	6.81	7.81	8.81	9.81
$E_4, P_0^{(2)}$	4.59	5.59	6.59	7.59	8.59
$E_4, P_0^{(3)}$	3.37	4.37	5.37	6.37	7.37
$E_4, P_0^{(4)}$	2.14	3.14	4.14	5.14	6.14
$E_4, P_0^{(5)}$	0.92	1.92	2.92	3.92	4.92
$E_5, P_0^{(1)}$	7.20	8.20	9.20	10.20	11.20
$E_5, P_0^{(2)}$	6.06	7.06	8.06	9.06	10.06
$E_5, P_0^{(3)}$	4.91	5.91	6.91	7.91	8.91
$E_5, P_0^{(4)}$	3.77	4.77	5.77	6.77	7.77
$E_5, P_0^{(5)}$	2.62	3.62	4.62	5.62	6.62

Để tính xác suất mất an toàn, ta có hai cách tính như sau:

* Theo ước lượng xác suất cổ điển $P_f = \frac{M < 0}{\text{Tongso}} = \frac{831}{4913} = 0.169$, do đó xác suất an toàn là: $P_s = 1 - P_f = 0.831$.

* Theo biểu đồ tần số, ta xác định được biểu đồ tần số của M như hình 8. Từ đó tính được xác suất mất an toàn là $P_f = 0.299$, do đó xác suất an toàn là $P_s = 1 - P_f = 0.701$.

Như vậy, ta có ba kết quả độ tin cậy $P_S = \{0.8478, 0.831, 0.701\}$ trong đó độ tin cậy tính theo chỉ số β gần với kết quả theo ước lượng xác suất cổ điển. Sai số lớn nhất giữa các kết quả là 17.32%. Tất nhiên khi số lượng giá trị rời rạc của các tham số tăng lên thì sai số giữa các kết quả sẽ giảm dần.

5. Kết luận

Phương pháp nêu trong bài này có thể dùng để giải một lớp rộng các bài toán độ tin cậy của công trình có xét đến yếu tố thời gian. Vì sử dụng nghiệm của bài toán dao động tắt dần, nên có thể đánh giá được ĐTC cho lớp rộng các bài toán có nghiệm tắt dần tương ứng mà không phải giải bài toán dao động ngẫu nhiên. Đây cũng là một thuận lợi lớn của phương pháp đề xuất.

Điều kiện an toàn của công trình là một hệ bất đẳng thức ngẫu nhiên, song ta chỉ xét cho 1 bất đẳng thức để tìm hàm công năng M . Việc đưa xác suất phụ thuộc một hệ bất đẳng thức về tính xác suất phụ thuộc một bất đẳng thức đã được nêu trong [22].

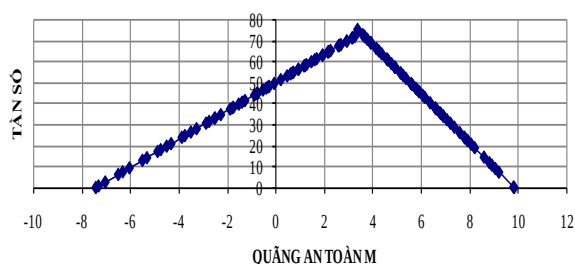
Trong bài toán có đồng thời 3 loại tham số: tắt dần, ngẫu nhiên và mờ cùng tham gia thì phương pháp nêu trong bài vẫn áp dụng được, việc phân tích ĐTC đã được nêu trong [16,...].

Các ý tưởng và phương pháp nêu trong bài báo này có thể ứng dụng trong các bài toán khác nhau khi có biến thời gian tham gia như bài toán xác định tuổi thọ, xác định hiện tượng mỏi, từ biến của vật liệu...

Tài liệu tham khảo

1. V.V. Bolotin (1965), *Statistical methods in structural mechanics*, Moscow (in Russian).
2. V.V. Bolotin (1982), *Methods of Probability Theory and Reliability Theory in the Calculation of Structures*, Moscow (in Russian).
3. International Standard ISO 2394 (1998), *General Principles on Reliability for Structure*
4. Nguyen Dong Anh, Ngo thi Hong Hue (2007), "Investigation of high order stochastic differential equations using averaging method", *Vietnam Journal of Mechanics*, №3-2007.
5. Tikhonov (1970), *Random Processes overshoots*, Moscow, Nauka (in Russian).
6. E.C Pereverzev (1987), *Stochastic Processes in Parameter Reliability Model*, Kiev, Nauka-Dumka (in Russian).
7. Robert E. Melchers (1999), *Structural reliability analysis and prediction*, Second edition, John Wiley and sons, NewYork-Singapore-Toronto.
8. Sayan Gupta (2004), *Reliability analysis of randomly vibrating structures with parameter uncertainties*, Indian Institute of Sience Bangalore, India.
9. Lin-lin Zhang, Jie Li, Yongbo Peng (2008), "Dynamic response and reliability analysis of tall buildings subject to wind loading", *Journal of Wind Engineering*, 96-2008.
10. K.B Rojiami, D.L. Beili (1984), "Optimum design of steel structure by using reliability criterion", *New derections in optimum structural design*, John Wiley and sons, NewYork-Singapore-Toronto.

BIỂU ĐỒ TẦN SỐ



Hình 8. Biểu đồ tần số của quãng an toàn khi E , σ_0 , P_0 là các tham số ngẫu nhiên chuẩn

11. Iu.M.Ermoliev (1976), *Methods of stochastic programming*, Moscow, Nauka (in Russian).
12. G.Agus, A.Barrata, F.Casiati (1984), *Probabilistic methods in structural engineering*, Champman and Hall, London-NewYork.
13. O. Ditleven, H.O Madse (1996), *Structural Reliability methods*, John Wiley and Sons.
14. Andrzej S. Nowak, Kevin R. Collins (2000), *Reliability of Structures*, Mc Graw Hill.
15. E.Ventzel (1964), *Probabilistic theory*, Nauka-Moscow.
16. Nguyễn Văn Phó, Nguyễn Xuân An (2009), "Một phương pháp phân tích kết cấu trong tình trạng biến đổi khí hậu", *Tạp chí Khoa học-Công nghệ Xây dựng*, Đại học Xây dựng, N^o4-2009.
17. Nguyễn Văn Phó (2010), "Về các phương pháp tính độ tin cậy của công trình", *Tạp chí kết cấu và công nghệ xây dựng*, số 5-2010.
18. Trần Văn Liên (2003), *Bài toán ngược của Cơ học và một số ứng dụng*, Luận án TS Kỹ thuật, Đại học Xây dựng, Hà nội.
19. A.N. Tikhonov, Ia.V.Arcenhiia (1979), *Methods for solution of incorreced problems*, Nauka, Moscow (in Russian).
20. Achintya Haldar, Sankaran Mahadevan (2000), *Probability, Reliability and Statistical Methods in Engiecring Design*, John Wiley and Sons Inc., NewYork-Toronto-Singapore.
21. V.A.Svetlitsky (2002), *Statistical Dynamics and Reliability Theory for Mechanical Structures*, Springer.
22. Nguyen Van Pho (2003), "A new method for determination of the reliability index of distributed parameter system", *Vietnam Journal of mechanics*, Vol 25, N^o4.
23. Chu Thanh Bình, Lê Ngọc Thạch (2006), "Nghiên cứu một số vấn đề dao động uốn của dầm theo quan điểm ngẫu nhiên", *Tuyển tập công trình Hội nghị khoa học toàn quốc Cơ học vật rắn lần thứ 8*, Thái Nguyên.
24. Nguyen Van Pho, Le Ngoc Thach, Chu Thanh Binh (2007), "On the reliability problems of structures subjected to dynamic loads", *Vietnam Journal of Mechanics*, VAST, Vol.29, N^o3.
25. Chu Thanh Bình (2008), "Reliability problems of Plates on Oscillation", *Proceedings of the International Conference on Computational Solid Mechanics*, Hochiminh City, Vietnam.
26. Nguyễn Văn Phó, Lê Ngọc Thạch, Chu Thanh Bình (2010), "Phương pháp phân tích độ tin cậy của công trình dao động chịu tác dụng của các quá trình ngẫu nhiên", *Tạp chí Kết cấu và công nghệ xây dựng*, số 3, II-2010.