

TÍNH TOÁN TẮM CHỊU UỐN LÀM BẰNG VẬT LIỆU CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN

Nguyễn Thị Bích Phượng¹, Trần Minh Tú², Phạm Thị Thu Hiền³

Tóm tắt: Bài báo nghiên cứu ứng xử tĩnh của tấm chữ nhật tựa khớp trên chu vi làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên, chịu tác dụng của tải trọng vuông góc với mặt trung bình. Mô đun đàn hồi kéo của vật liệu biến đổi liên tục theo chiều dày tấm và giả thiết dưới dạng hàm mũ, hệ số Poisson là hằng số theo chiều dày. Lý thuyết tấm cổ điển của Kirchhoff-Love được sử dụng để tìm nghiệm giải tích của độ võng và ứng suất trong tấm. Kết quả số cho thấy sự tương đồng với kết quả của tấm đẳng hướng khi đưa về trường hợp riêng. Các ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích vật liệu, tỉ số các mô đun đàn hồi kéo nén của vật liệu thành phần được khảo sát và so sánh với kết quả tính theo phương pháp phần tử hữu hạn công bố trên các tạp chí có uy tín.

Từ khóa: vật liệu chức năng, vật liệu có cơ tính biến thiên, lý thuyết tấm cổ điển, tấm chữ nhật chịu uốn

Summary: In this paper, the static response is presented for a simply supported functionally graded rectangular plate subjected to a transverse uniform load. The Young's module of FGM plate vary continuously throughout the thickness direction according to the volume fraction of constituents defined by power-law, the Poisson's ratios are assumed to be constant. The analytical solutions are obtained based on Kirchhoff-Love classical plate theory. The numerical illustrations show good agreements with results of isotropic plate in special cases. The influences of volume fraction distributions, E_c/E_m ratio are investigated and compared with finite element results.

Keywords: functionally graded materials, classical plate theory, bending of rectangular plates

Nhận ngày 06/7/2012, chỉnh sửa ngày 25/7/2012, chấp nhận đăng 30/8/2012

1. Mở đầu

Vật liệu composite truyền thống cấu tạo từ hai loại vật liệu khác nhau được sử dụng rộng rãi do những đặc tính nổi trội so với các vật liệu truyền thống. Tuy nhiên, tại bề mặt tiếp xúc giữa hai lớp vật liệu có sự không liên tục về ứng suất. Đặc biệt trong môi trường nhiệt độ cao, sự chênh lệch lớn giữa các hằng số giãn nở nhiệt của các vật liệu sẽ gây ra ứng suất dư lớn; trong vật liệu composite sẽ xuất hiện vết nứt, sự bong tách. Vật liệu có cơ tính biến thiên còn gọi là vật liệu biến đổi chức năng (Functionally Graded Materials - FGM) được một nhóm các nhà khoa học Nhật Bản phát minh lần đầu tiên vào năm 1984 để khắc phục những hạn chế đó. Vật liệu có cơ tính biến thiên là một loại composite thể hệ mới với chức năng được biến đổi theo chiều dày kết cấu để phù hợp với các yêu cầu cụ thể của người sử dụng. Đặc tính kháng

¹ThS, Khoa Xây dựng DD&CN, Trường Đại học Xây dựng.

²PGS.TS, Khoa Xây dựng DD&CN, Trường Đại học Xây dựng. E-mail: tpnt2002@yahoo.com

³KS, Khoa Xây dựng, Trường Đại học Thủy lợi.

nhệt nổi bật của loại vật liệu này là lý do để lựa chọn sử dụng trong những kết cấu làm việc ở nhiệt độ cao, chịu sự truyền nhiệt lớn như các thiết bị trong ngành luyện kim, trong lò phản ứng nhà máy điện nguyên tử, trong ngành hàng không dân dụng và công nghiệp vũ trụ...

Một trong những loại vật liệu có cơ tính biến thiên thông dụng nhất là vật liệu có các thành phần cấu thành biến đổi trơn từ ceramic chịu lửa sang kim loại. Ceramic trong vật liệu FGM sẽ cung cấp tính kháng nhiệt và bảo vệ kim loại khỏi bị ô xi hóa. Hỗn hợp ceramic và kim loại với tỉ lệ thể tích biến đổi trơn có thể dễ dàng chế tạo.

Nhiều nghiên cứu về phân tích ứng xử cơ học của tấm và vỏ làm từ vật liệu FGM đã được công bố trong những năm gần đây. Reddy [1] phân tích ứng xử tĩnh của tấm FGM với lời giải giải tích theo lý thuyết chuyển vị bậc nhất và bậc cao. Dựa vào lý thuyết tấm bậc nhất, Chi và Chung [4] xây dựng lời giải giải tích cho tấm chữ nhật FGM, bốn biên tựa khớp chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng ngang phân bố đều. Mô hình phần tử hữu hạn theo mô hình tấm mỏng cũng đã được He và cộng sự [5] xây dựng để nghiên cứu điều khiển dao động của tấm FGM với cảm biến và kích động áp điện. Praveen và Reddy [6] đã khảo sát ứng xử tĩnh và động của tấm FGM thép-gốm sử dụng phương pháp PTHH, có kể đến biến dạng cắt ngang, mô men quán tính. Woo và Meguid [7] sử dụng lý thuyết Von-Karman cho biến dạng lớn để tìm lời giải giải tích cho tấm và vỏ chịu tác dụng của tải trọng cơ học và nhiệt độ.

Với lý thuyết bậc nhất cải tiến, Zenkour [8] đã phân tích các ảnh hưởng của các thông số kích thước, vật liệu tấm đến độ võng và ứng suất trong tấm theo nghiệm Navier. Ganapathi và cộng sự gần đây cũng đã phát triển lời giải phần tử hữu hạn khi nghiên cứu ứng xử tĩnh và động của tấm FGM có chiều dày trung bình.

Ở Việt Nam, trong những năm gần đây những nghiên cứu về vật liệu FGM bắt đầu được nghiên cứu. Các công trình của Đào Văn Dũng, Đào Huy Bích, Hoàng Văn Tùng...[10-12] đã được công bố trên các tạp chí chuyên ngành trong và ngoài nước. Với mục đích cung cấp thêm một nguồn tham khảo với cách tiếp cận đơn giản nhất cho người sử dụng, bài báo này sẽ khảo sát trường chuyển vị và ứng suất trong tấm chữ nhật FGM chịu uốn bằng nghiệm Navier. Lý thuyết tấm cổ điển của Kirchhoff-Love với giả thiết mặt trung bình không bị giãn khi biến dạng được các tác giả sử dụng để có lời giải đơn giản, dễ kiểm chứng.

2. Mô hình tấm FGM

Xét tấm chữ nhật đàn hồi: Mặt phẳng trung bình tấm là mặt phẳng xy, phương chiều dày là z. Các hằng số vật liệu (mô đun đàn hồi kéo (nén) E, hệ số Poisson ν) biến thiên trơn theo chiều dày với qui luật cho trước, có nghĩa là $E=E(z)$, $\nu=\nu(z)$. Hàm đặc trưng cho các hằng số vật liệu tấm FGM giả thiết dưới dạng [4]:

$$V(z) = (V_c - V_m)g(z) + V_m \quad (1a)$$

trong đó: V_c là hằng số vật liệu của vật liệu mặt trên tấm (+h/2); V_m là hằng số vật liệu của vật liệu mặt dưới tấm (-h/2); $V(z)$ là hằng số vật liệu của vật liệu tại tọa độ z bất kỳ; $g(z)$ là hàm tỉ lệ thể tích (volume fraction).

Qui luật phân bố của hàm tỉ lệ thể tích là cơ sở để phân loại vật liệu FGM. Vật liệu (P-FGM), khi $g(z)$ thay đổi theo qui luật hàm lũy thừa; vật liệu (E-FGM), khi $g(z)$ thay đổi theo qui luật hàm e-mũ; vật liệu (S-FGM), khi $g(z)$ thay đổi theo qui luật hàm [4].

Nhiều nghiên cứu đã chỉ ra rằng, ảnh hưởng của hệ số Poisson đến biến dạng của tấm bé hơn nhiều so với mô đun đàn hồi kéo (nén), vì vậy có thể giả thiết hệ số Poisson là hằng số theo chiều dày tấm.

2.1 Tính chất vật liệu của tấm P-FGM

Trong nghiên cứu này, tỉ lệ thể tích của tấm P-FGM giả thiết tuân theo qui luật lũy thừa (power-law) [5]:

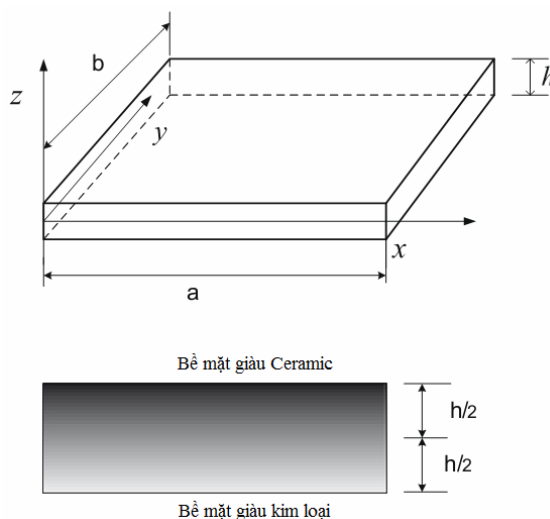
$$g(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (1)$$

trong đó: p là tham số vật liệu (chỉ số tỉ lệ thể tích); h là chiều dày tấm.

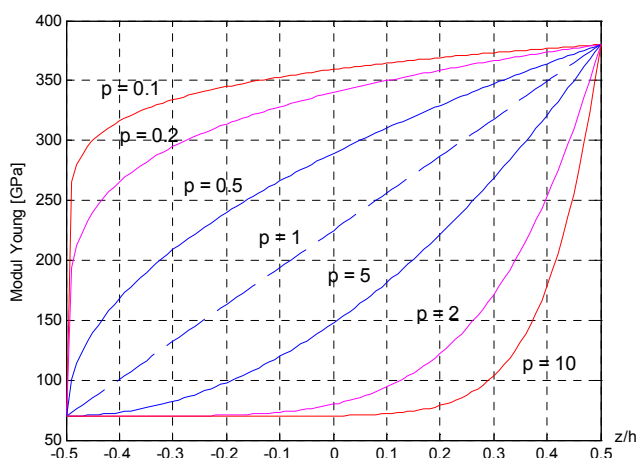
Tính chất vật liệu (mô đun đàn hồi kéo – nén) được định nghĩa dưới dạng [5]:

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c + E_m \quad (2)$$

với E_m là mô đun đàn hồi kéo (nén) của vật liệu mặt dưới ($z = -h/2$) và E_c là mô đun đàn hồi kéo (nén) của vật liệu mặt trên ($z = h/2$). Biến thiên của mô đun đàn hồi theo phương chiều dày biểu diễn trên hình 2, cho thấy mô đun đàn hồi tăng nhanh tại vị trí gần bề mặt trên của tấm khi $p > 1$ và gần bề mặt dưới khi $p < 1$ ($E_c = 380\text{GPa}$; $E_m = 70\text{GPa}$).



Hình 1. Tấm chữ nhật bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM)



Hình 2. Biến thiên của mô đun đàn hồi kéo (nén) trong tấm FGM

2.2 Phương trình quan hệ của tấm chữ nhật FGM

2.2.1 Trường ứng suất trong tấm FGM

Xét tấm chữ nhật FGM mỏng, đàn hồi, tuyến tính, chịu tác dụng của tải trọng vuông góc với mặt trung bình. Chiều dày tấm không đổi, với giả thiết Kirchhoff: đoạn thẳng pháp tuyến trước và sau biến dạng vẫn thẳng và vuông góc với mặt trung bình, độ dài không đổi; mặt trung bình không bị giãn, chuyển vị của điểm bất kỳ trong tấm được giả thiết dưới dạng sau [3]:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0}{\partial x}; v(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0}{\partial y}; w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (3)$$

trong đó: $w_0(x, y)$ là chuyển vị theo phương chiều dày của điểm trên mặt trung bình. Với giả thiết biến dạng bé, trường biến dạng biểu diễn dưới dạng sau:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Áp dụng định luật Hooke cho trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_x = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2} z \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu(z) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right]; \sigma_y = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2} z \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu(z) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right]$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{E(z)}{1+\nu(z)} z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

2.2.2 Phương trình cân bằng của tấm FGM

Tích phân các thành phần ứng suất dọc theo chiều dày tấm, ta nhận được các mô men uốn:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (6)$$

Thay biểu thức (5) vào (6), ta nhận được các mô men nội lực dưới dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

trong đó: các hệ số C_{ij} là tích phân của các hằng số vật liệu của vật liệu tấm FGM

$$C_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2 E(z)}{1-\nu(z)^2} dz; C_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2 E(z) \nu(z)}{1-\nu(z)^2} dz; C_{66} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2 E(z)}{1-\nu(z)^2} \left(\frac{1-\nu(z)}{2} \right) dz \quad (8)$$

Phương trình cân bằng của tấm dưới tác dụng của tải trọng phân bố vuông góc với mặt trung bình có dạng [3]:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = p(x, y) \quad (9)$$

Biểu diễn mô men uốn nội lực theo (8), thay vào (9), ta nhận được phương trình cân bằng theo chuyển vị:

$$C_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (2C_{12} + 4C_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + C_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (10)$$

3. Lời giải Navier cho tấm chữ nhật FGM tựa khớp trên chu vi

Giả thiết độ võng và tải trọng ngang dưới dạng chuỗi lượng giác kép thỏa mãn điều kiện biên dưới dạng:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (11)$$

$$p(x, y) = \sum_m \sum_n p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (12)$$

trong đó:

$$p_{mn} = \iint p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (13)$$

Nếu tải trọng $p(x, y)$ phân bố đều: $p(x, y) = p_0$, thì hệ số p_{mn} có dạng [3]:

$$p_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn} \text{ với } m, n = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (14)$$

Thay (11), (12) vào phương trình cân bằng (10), ta nhận được hệ số w_{mn} , như vậy hàm độ võng sẽ được xác định theo (11), hàm nội lực xác định theo (7) và hàm ứng suất xác định theo (5).

4. Kết quả số và thảo luận

Khảo sát ứng xử cơ học của tấm chữ nhật FGM Ceramic (nhôm ô-xit - alumina) / Metal (Nhôm-aluminum) tựa khớp trên chu vi chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều p_0 . Mặt trên của tấm giàu ceramic, mặt dưới giàu kim loại (hình 1). Tính chất các vật liệu thành phần [9]:

$E_c = 380\text{GPa}$ (Nhôm ô xit - ceramic); $E_m = 70\text{GPa}$ (Nhôm - kim loại);

Hệ số Poisson $\nu = 0,3$ cho cả hai vật liệu (15)

Biến thiên của tỉ lệ thể tích giả thiết theo qui luật hàm mũ (1b), biến thiên của mô đun đàn hồi kéo (nén) giả thiết theo (2); hệ số Poisson không đổi theo chiều dày tấm. Để khảo sát số các lớp bài toán, các tác giả đã viết chương trình tính độ võng, nội lực và ứng suất trong tấm bằng ngôn ngữ lập trình Matlab.

Ví dụ 1: Tấm vuông ($a/b=1$), mỏng ($a/h=100$), đẳng hướng ($\nu=0 - E(z)=E_c$) chịu tác dụng của tải trọng ngang phân bố đều. Độ võng không thứ nguyên tại tâm của tấm ($a/2; b/2$) và mô

men uốn lớn nhất không thứ nguyên được so sánh với kết quả giải tích tính theo Timoshenko [3], theo Zenkour [8] (lý thuyết tấm Mindlin) và tính bằng Phần tử hữu hạn theo Ganapathi [9] thể hiện trên bảng 1, có thể thấy rằng các kết quả là tương đồng.

Bảng 1. Độ võng và mô men uốn lớn nhất không thứ nguyên của tấm vuông đồng nhất ($a/h=100$) liên kết khớp trên chu vi

Giá trị không thứ nguyên	Timoshenko [3]	Zenkour [8]	Ganapathi [9]	Bài báo
$\bar{w}_{\max} = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2) p_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$	0,00406	0,00406	0,00406	0,00406
$\bar{M}_{x\max} = \frac{1}{p_0 a^2} M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$	0,0479	0,0479	0,0479	0,0479

Ví dụ 2: Tấm vuông có kích thước: $a=b=1\text{m}$; chiều dày $h=0,001\text{m}$; làm bằng vật liệu FGM nhôm/ô xit nhôm có các hằng số vật liệu như (15), chịu tác dụng của tải trọng ngang phân bố đều $p_0 = 0,1\text{MPa}$.

a. Khảo sát ảnh hưởng của chỉ số tỉ lệ thể tích

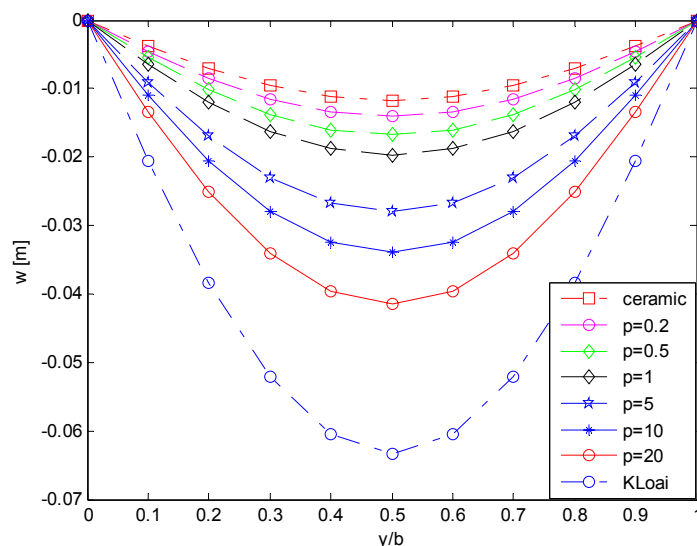
Độ võng và độ võng không thứ nguyên tại tâm của tấm ($a/2; b/2$) khi tham số p thay đổi ($p=0; 0,2; 0,5; 1; 5; 10; 20$) thể hiện trên bảng 2. Biểu đồ độ võng tại mặt cắt $x=a/2$ với các chỉ số tỉ lệ thể tích p khác nhau biểu diễn trên hình 3.

Bảng 2. Độ võng tại tâm của tấm vuông, mỏng ($a/h=100$), tựa khớp trên chu vi, chịu tải trọng ngang phân bố đều, làm bằng vật liệu FGM (nhôm ôxit - nhôm)

	$p=0$ (ceramic)	$p=0.2$	$p=0.5$	$p=1$	$p=5$	$p=10$	$p=20$	$p=0$ (kim loại)
w [m]	0,0117	0,014	0,0167	0,0197	0,028	0,0339	0,0415	0,0634
Bài báo								
$\bar{w}_{ktn}$	0,0041	0,0049	0,0058	0,0069	0,0097	0,0118	0,0144	0,0221
Bài báo								
$\bar{w}_{ktn}$ [9]	0,0041	0,0049	0,0058	0,0069	0,0097	0,0118	0,0144	0,0221

Có thể thấy rằng khi chỉ số tỉ lệ thể tích tăng lên, độ võng lớn nhất của tấm cũng tăng, đồng nghĩa với độ cứng của tấm giảm. Khi tỉ lệ thể tích $p=0$ (cho 2 trường hợp $E_1=E_c$ và $E_1=E_m$) kết quả sẽ tương ứng với trường hợp tấm làm bằng vật liệu đẳng hướng. Độ võng không thứ nguyên tại tâm của tấm khi so sánh với kết quả tính theo phương pháp phần tử hữu hạn của Ganapathi [9] là tương đồng cho thấy độ tin cậy của lời giải.

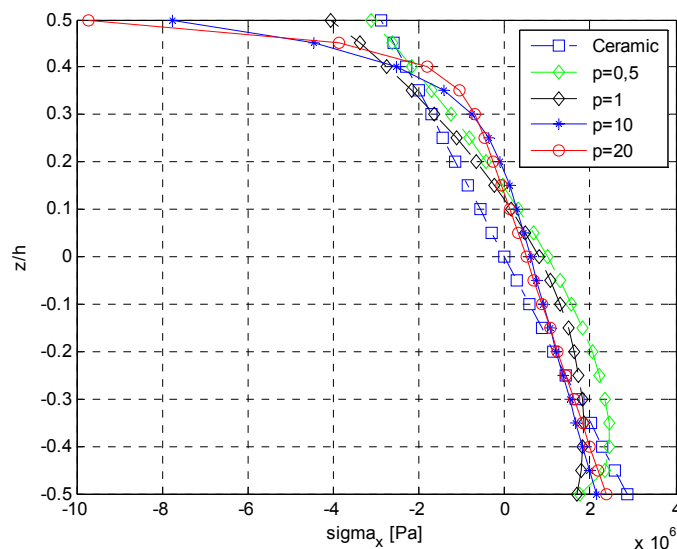
Biến thiên ứng suất pháp σ_{xx} tại tâm của tấm ($x=a/2; y=b/2$) theo tọa độ chiều dày tấm với các chỉ số tỉ lệ thể tích khác nhau biểu diễn trên hình 4. Từ biểu đồ ứng suất pháp ta thấy ứng suất nén tại bề mặt trên của tấm tăng lên khi chỉ số tỉ lệ thể tích tăng, vị trí mặt trung hòa chia đôi chiều dày tấm với vật liệu đẳng hướng, đối với vật liệu FGM đã thay đổi (ở vị trí $z \neq 0$).



Hình 3. Biểu đồ độ võng tấm FGM chịu uốn tại mặt cắt $x=a/2$ với chỉ số thể tích p khác nhau

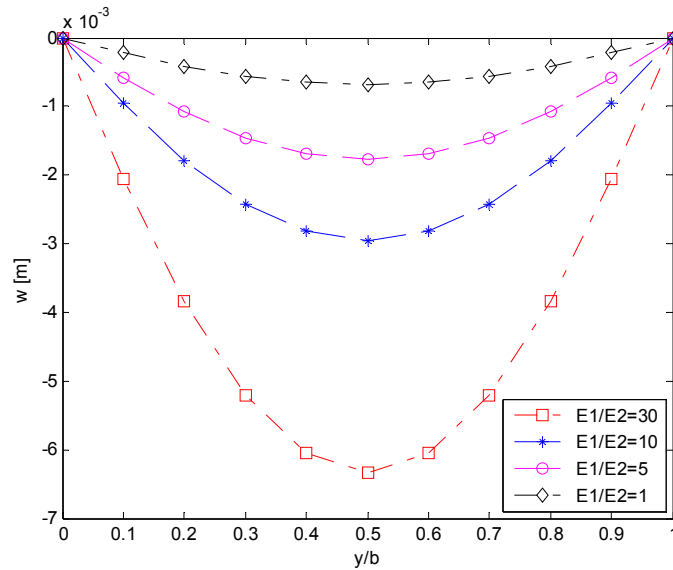
b. Ảnh hưởng của tỉ số mô đun đàn hồi vật liệu lớp bề mặt trên và dưới của tấm FGM (tỉ số E_c/E_m)

Hình 5 biểu diễn biểu đồ độ võng tại mặt cắt $x=a/2$ của tấm FGM vuông, với các tỉ số $E_c/E_m = 1, 5, 10, 20, 30$ khác nhau thể hiện tính dị hướng của vật liệu. Có thể nhận ra rằng khi tỉ số E_c/E_m của vật liệu tăng thì độ võng của tấm cũng tăng do độ cứng của tấm giảm. Độ võng tại tâm của tấm với trường hợp $E_c/E_m = 10$ lớn gấp khoảng 5 lần so với độ võng của tấm đẳng hướng ($E_c/E_m = 1$).

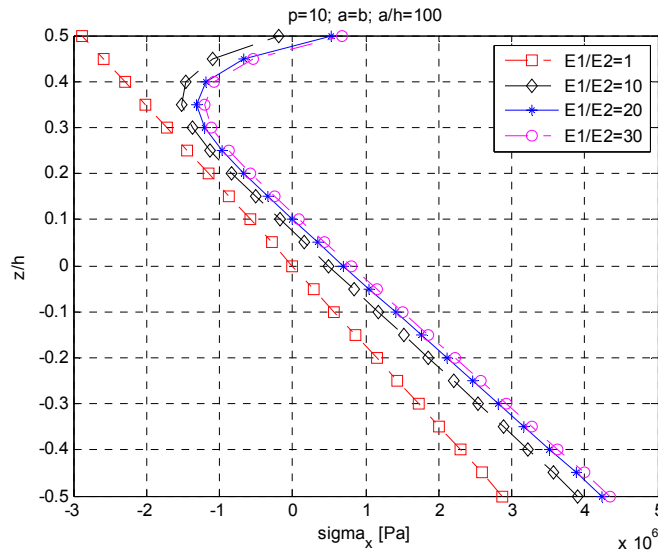


Hình 4. Biến thiên của ứng suất pháp σ_x theo tọa độ chiều dày tấm vuông chịu uốn bởi tải trọng phân bố đều

Biến thiên ứng suất pháp σ_{xx} tại tâm của tấm ($x=a/2$; $y=b/2$) theo tọa độ chiều dày tấm với tính dị hướng vật liệu thay đổi biểu diễn trên hình 6. Quan sát biểu đồ ứng suất pháp ta thấy ứng suất kéo tại bề mặt dưới của tấm tăng lên khi tỉ số E_c/E_m của vật liệu tăng.



Hình 5. Biểu đồ độ võng tấm FGM chịu uốn tại mặt cắt $x=a/2$ với các tỉ số E_1/E_2 khác nhau



Hình 6. Biến thiên của ứng suất pháp σ_x theo tọa độ chiều dày tấm vuông chịu uốn bởi tải trọng phân bố đều với các tỉ số E_1/E_2 thay đổi

5. Kết luận

Ứng xử tĩnh của tấm chữ nhật tựa đơn trên làm bằng vật liệu có cơ tính thay đổi FGM chịu tác dụng của tải ngang phân bố đều đã được nghiên cứu trên cơ sở lý thuyết tấm cổ điển Kirchhoff-Love. Nghiệm giải tích tường minh dưới dạng nghiệm Navier đã được xây dựng nhằm khảo sát ảnh hưởng của chỉ số thể tích, tính dị hướng vật liệu FGM đến độ võng, ứng suất, và biến dạng trong tấm. Với giả thiết mô đun đàn hồi kéo nén của các vật liệu thành phần là hàm mũ theo chiều dày, ứng suất và độ võng trong tấm đã được tính toán với các tỉ lệ pha trộn nhôm ô xit và nhôm khác nhau. Các kết quả được so sánh với kết quả tính theo phương pháp phần tử hữu hạn của Ganapathi; khi đưa về trường hợp riêng với tấm đồng nhất để so sánh với các kết quả cổ điển của Timoshenko cho thấy tính tương đồng của các lời giải.

Độ võng lớn nhất, sự phân bố ứng suất pháp theo tọa độ chiều dày tấm, vị trí mặt trung hòa của tấm FGM chịu uốn là nguồn tham khảo tin cậy khi tính toán tấm FGM bằng các mô hình khác.

Tài liệu tham khảo

1. Reddy J. N (2009), *Mechanics of laminated composites plates: Theory and analysis*, CRC Press.
2. Reddy J. N (2000), "Analysis of functionally graded material", *International Journal of Numerical Methods*. 47, 663-684
3. Timoshenko SP, Woinowsky-Krieger S (1959), *Theory of plates and shells*. New-York. McGraw-Hill.
4. Shyang-Ho Chi, Yen-Ling Chung (2006), "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load – Part I: Analysis", *International Journal of Solids and Structures* 43, 3657-3674.
5. He XQ, Ng TY, Sivashankera (2001), "Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators", *Int. J. Solids Struct.* 38 - 1641-55
6. Praveen, G.N, Reddy, JN (1998), "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates", *Int. J. Solids Struct.* 35 - 4457-76
7. Woo, J. Megrid, S.A (2001), "Nonlinear analysis of functionally graded material plates and shallow shells", *Int. J. Solids Struct.* 38 - 7409-21
8. Asharf M. Zenkour (2006), "Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates", *Applied Mathematical Modeling*, 30 - 67-84.
9. M. K. Singha, T. Prakash, M. Ganapathi (2011), *Finite element analysis functionally graded material plates under transverse load*, 47 - 453-460.
10. Dao Huy Bich, Vu Do Long (2010), "Non-linear dynamical analysis of imperfect functionally graded material shallow shells", *Vietnam Journal of Mechnics VAST* 32(1), pp. 65-79.
11. Đào Văn Dũng, Nguyễn Thị Nga (2010), "Nonlinear Stability Analysis of Imperfect FGM plates with Poisson ratio $\nu=\nu(z)$ Subjected to Mechanical and Thermal Loads" *Tuyển tập các công trình khoa học. Hội nghị khoa học toàn quốc CHVRBD lần thứ X*, Thái Nguyên.
12. Đào Văn Tùng (2011), *Ổn định nhiệt đàn hồi của tấm và vỏ composite biến đổi chức năng*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật, ĐHQG Hà Nội.