

XÂY DỰNG HÀM DẠNG CỦA PHẦN TỬ DẦM CHỊU UỐN CÓ NHIỀU VẾT NỨT VÀ ỨNG DỤNG VÀO PHÂN TÍCH CÁC DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA KẾT CẤU HỆ THANH

Trần Văn Liên¹, Trịnh Anh Hào²

Tóm tắt: Việc đánh giá sự làm việc của kết cấu có vết nứt cũng như việc xác định vết nứt trong kết cấu là một vấn đề quan trọng, cần thiết, thu hút sự quan tâm của các nhà nghiên cứu trên thế giới và ở Việt Nam. Bài báo trình bày các kết quả nghiên cứu về việc xác định hàm dạng dao động của phần tử dầm đàn hồi chịu uốn có nhiều vết nứt theo mô hình lò xo bằng phương pháp độ cứng động lực kết hợp với phương pháp ma trận chuyển. Từ đó đã xây dựng thuật toán và chương trình phân tích sự thay đổi các dạng dao động riêng của kết cấu hệ thanh khi xuất hiện vết nứt. Các kết quả nghiên cứu nhận được là mới, là cơ sở cho việc xây dựng một phương pháp hiệu quả để xác định vết nứt trong các kết cấu hệ thanh dựa trên phân tích các đặc trưng dao động.

Từ khóa: Vết nứt, độ cứng động lực, tần số dao động riêng, dạng dao động riêng

Abstract: Assessment of the behavior of damaged structures as well as determination of the location and the depth of cracks in multiple cracked structures are very important and have attracted attention many researchers. This article presents some results on the determination of the vibration shape function of a multiple cracked elastic beam element, which is modeled as an assembly of intact sub-segments connected by massless rotational springs, by using the combination of dynamic stiffness and transfer matrix methods. Algorithms and computer programs to analyse changes of natural mode shapes of multiple cracked beams have been determined. Numerical analysis of natural mode shapes of multiple cracked cantilever beams using the obtained expression shows a good agreement in comparison with the well-known analytical methods. The methodology approach and results presented in this article are new and are the basis for building an efficient method to identify cracks in frame structures.

Keywords: cracked beam, transfer matrix, natural frequency, mode shape.

Nhận ngày 06/6/2012, chỉnh sửa ngày 28/6/2012, chấp nhận đăng 30/8/2012

1. Đặt vấn đề

Sự hình thành và phát triển vết nứt hay hư hỏng trong các kết cấu xây dựng làm giảm khả năng làm việc và tuổi thọ của công trình, do đó, việc đánh giá chính xác sự xuất hiện vết nứt hay hư hỏng trong các kết cấu công trình là một vấn đề quan trọng, cần thiết, đã và đang thu hút sự quan tâm của các nhà nghiên cứu và xây dựng công trình trên thế giới và ở Việt Nam.

Những nghiên cứu hiện nay về việc xác định vết nứt hay hư hỏng trong kết cấu công trình bằng các phương pháp kiểm tra không phá hủy phát triển chủ yếu theo hướng sử dụng các đặc trưng động lực học của kết cấu như tần số dao động riêng, dạng dao động riêng, hàm

¹PGS.TS, Khoa Xây dựng DD&CN, Trường Đại học Xây dựng. E-mail: lientv@hotmail.com

²ThS, Công ty cổ phần đầu tư, tư vấn và thi công xây dựng Việt Nam.

phổ phản ứng... [1,2,3,5,6,9,13]. Một ưu điểm của hướng nghiên cứu này là số tham số cần đo đạc để xác định số lượng, vị trí và độ sâu của vết nứt hay hư hỏng trong các kết cấu có thể là ít hơn số tham số cần xác định nhờ giải bài toán cực trị [2].

Do các phương pháp giải tích chỉ giới hạn trong các kết cấu dầm đơn giản [1,6,9] và không áp dụng được cho các kết cấu hệ thanh phức tạp như dầm liên tục nhiều nhịp hay kết cấu khung, nên cho đến nay việc xác định các đặc trưng động lực học của kết cấu chủ yếu dựa vào phương pháp phần tử hữu hạn và sự phát triển gần đây của nó là phương pháp độ cứng động lực:

- Theo phương pháp phần tử hữu hạn, đối với các kết cấu hệ thanh có vết nứt, thanh được chia thành nhiều phần tử thanh nguyên vẹn liên kết với nhau tại các vết nứt. Nhằm khắc phục vấn đề này, Sato H. [12] đã kết hợp giữa phương pháp ma trận chuyển và phương pháp phần tử hữu hạn. Do phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp gần đúng nên các đặc trưng động lực học xác định theo phương pháp này là gần đúng, đặc biệt là đối với các tần số và dạng dao động bậc cao [2].

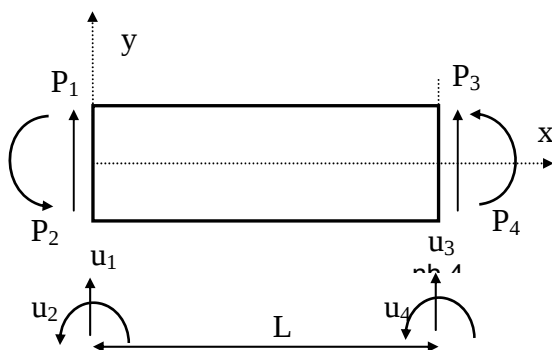
- Theo phương pháp độ cứng động lực, đối với các kết cấu dạng thanh có vết nứt, thanh cũng được chia thành nhiều phần tử thanh nguyên vẹn liên kết với nhau tại các vết nứt [7]. Kết hợp phương pháp độ cứng động lực và phương pháp ma trận chuyển, trong các công trình [2,8], tác giả đã xây dựng được mô hình phần tử thanh thẳng 3 chiều có nhiều vết nứt chịu kéo, nén, uốn, xoắn theo phương pháp độ cứng động lực. Mô hình này đã được ứng dụng để xác định số lượng, vị trí và độ sâu của thanh có nhiều vết nứt dựa trên các tần số riêng đo được từ thực nghiệm. Tuy vậy, việc xác định dạng dao động riêng ứng với các tần số riêng đo được còn chưa được giải quyết.

Để xác định được các dạng dao động riêng thì cần thiết phải xác định hàm dạng dao động cho phần tử dầm chịu uốn có nhiều vết nứt với vị trí và độ sâu bất kỳ, đồng thời có kể đến các hệ số cản khác nhau. Vấn đề này khá phức tạp và chưa thấy công bố trong công trình nào.

Bài báo này trình bày các kết quả nghiên cứu về việc xác định các hàm dạng dao động của phần tử dầm đàn hồi chịu uốn có nhiều vết nứt theo mô hình lò xo bằng phương pháp độ cứng động lực kết hợp với phương pháp ma trận chuyển. Từ đó đã xây dựng thuật toán và chương trình phân tích sự thay đổi dạng dao động riêng của các kết cấu hệ thanh khi có sự xuất hiện của các vết nứt. Các kết quả nhận được là mới, là cơ sở cho việc phân tích sự làm việc của kết cấu có vết nứt và cũng là cơ sở cho việc đề xuất một phương pháp hiệu quả xác định các vết nứt trong kết cấu dựa trên phân tích các đặc trưng dao động.

2. Hàm dạng của phần tử dầm nguyên vẹn chịu uốn

Trong phương pháp phần tử hữu hạn [4], hàm dạng của phần tử dầm nguyên vẹn chịu uốn là nghiệm phương trình cân bằng tĩnh khi không có tải trọng ngoài (hình 1)



Hình 1. Phần tử dầm nguyên vẹn chịu uốn

$$EI_z \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad (1)$$

cùng với các điều kiện biên

$$w(0) = 1; w'(0) = 0; w(L) = 0; w'(L) = 0 \quad (2a)$$

$$w(0) = 0; w'(0) = 1; w(L) = 0; w'(L) = 0 \quad (2b)$$

$$w(0) = 0; w'(0) = 0; w(L) = 1; w'(L) = 0 \quad (2c)$$

$$w(0) = 0; w'(0) = 0; w(L) = 0; w'(L) = 1 \quad (2d)$$

Nghiệm của các bài toán biên này là các hàm dạng N_1, N_2, N_3, N_4 , gọi là các hàm Hermit:

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; N_2(x) = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; N_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3)$$

Khi cho trước các giá trị $u_1; u_2; u_3; u_4$ tại hai đầu nút phần tử dầm thì chuyển vị ngang của dầm là:

$$w(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + N_3(x)u_3 + N_4(x)u_4 \quad (4)$$

Trong phương pháp độ cứng động lực, Leung A.Y.T [10] chọn hàm dạng của phần tử dầm nguyên vẹn chịu uốn là nghiệm phương trình dao động tự do không cản

$$EI_z \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

cùng với các điều kiện biên (2a-d). Nghiệm của bài toán biên này là các hàm dạng N_1, N_2, N_3, N_4 dưới đây:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\lambda x}{L} & \sin \frac{\lambda x}{L} & \cosh \frac{\lambda x}{L} & \sinh \frac{\lambda x}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 - F_4/2\lambda^2 & F_2L/2\lambda^2 & -F_3/2\lambda^2 & F_1/2\lambda^2 \\ -F_6/2\lambda^3 & L/2\lambda + F_4L/2\lambda^3 & -F_5/2\lambda^3 & -F_3L/2\lambda^3 \\ 1/2 + F_4/2\lambda^2 & -F_2L/2\lambda^2 & F_3/2\lambda^2 & -F_1/2\lambda^2 \\ F_6/2\lambda^3 & L/2\lambda - F_4L/2\lambda^3 & F_5/2\lambda^3 & F_3L/2\lambda^3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

trong đó $\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho A L^4}{EI}$ là tham số động lực; ω là tần số dao động (rad/s); $F_i (i=1,...,6)$ là các hàm số:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\lambda(\sinh \lambda - \sin \lambda) / \delta; F_2 = -\lambda(\cosh \lambda \sin \lambda - \sinh \lambda \cos \lambda) / \delta \\ F_3 &= -\lambda^2(\cosh \lambda - \cos \lambda) / \delta; F_4 = \lambda^2(\sinh \lambda \sin \lambda) / \delta \\ F_5 &= \lambda^3(\sinh \lambda + \sin \lambda) / \delta; F_6 = -\lambda^3(\cosh \lambda \sin \lambda + \sinh \lambda \cos \lambda) / \delta \\ \delta &= \cosh \lambda \cos \lambda - 1 \end{aligned} \quad (7)$$

Khi $\omega = 0$, tương ứng với bài toán tĩnh, từ các hàm dạng (6) ta nhận được các hàm dạng Hermit (3).

Nếu như trong trường hợp dầm nguyên vẹn chịu uốn, việc xác định các hàm dạng là bước đầu tiên để thành lập ma trận độ cứng động lực của phần tử thì trong trường hợp dầm chịu uốn có nhiều vết nứt theo mô hình lò xo, việc xác định hàm dạng là khá phức tạp, phải dựa vào kết quả xây dựng ma trận độ cứng động lực theo phương pháp ma trận chuyển.

3. Ma trận độ cứng động lực của phần tử dầm chịu uốn có nhiều vết nứt

Xét dầm chịu uốn trong mặt phẳng Oxy có chiều dài L , diện tích tiết diện A , mômen quán tính I_z , mô đun đàn hồi E , mật độ khối lượng ρ . Phương trình dao động tự do của dầm có dạng [11]:

$$EI_z \left[\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \mu_1 \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} \right] + \rho A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu_2 \frac{\partial w}{\partial t} \right] = 0 \quad (8)$$

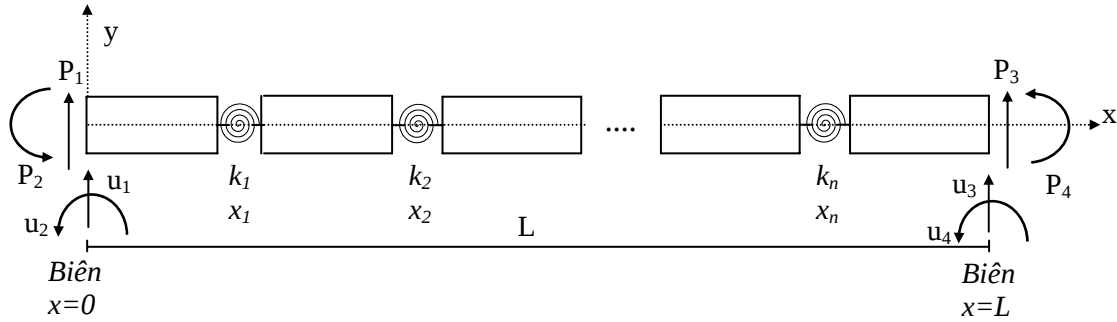
với μ_1 là hệ số cản nhớt của vật liệu, μ_2 là hệ số cản của môi trường. Đặt $w(x,t) = \Phi(x,\omega)e^{i\omega t}$ với $\Phi(x,\omega)$ là biên độ của chuyển vị ngang trên dầm, ta có:

$$\frac{d^4 \Phi(x, \omega)}{dx^4} - \lambda^4 \Phi(x, \omega) = 0 \quad (9)$$

trong đó: $\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI_z} \left(1 - \frac{i\mu_2}{\omega}\right)$; $i = \sqrt{-1}$ là tham số động lực học (ω là tần số dao động, rad/s), nếu $\lambda = 0$ tức $\omega = 0$ ta có trường hợp biến dạng tĩnh, với $\omega \neq 0$ thì $\Phi(x, \omega)$ là biên độ chuyển vị động; $\hat{E} = E(1 + i\mu_1\omega)$ là modul đàn hồi phức, dưới đây để cho dễ theo dõi ta vẫn dùng ký hiệu E như khi không có cản.

Giả sử dầm bị nứt tại các điểm $x_j, j=1,2,...,n$ trong đó $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} = L$ với các độ sâu a_j . Sử dụng mô hình lò xo của vết nứt, ta có mô hình dầm như hình 2 với các độ cứng lò xo k_j^z được tính theo công thức quy đổi [1,2]. Như vậy, cùng với phương trình (9) ta có các quan hệ tương thích tại các vị trí vết nứt x_j

$$\begin{aligned} \Phi(x_j - 0) &= \Phi(x_j + 0); \Phi''(x_j - 0) = \Phi''(x_j + 0); \Phi'''(x_j - 0) = \Phi'''(x_j + 0) \\ \Phi'(x_j - 0) + EI_z \alpha_j \Phi''(x_j - 0) &= \Phi'(x_j + 0); \alpha_j = 1/k_j^z; j = 1, 2, ..., n \end{aligned} \quad (10)$$



Hình 2. Phần tử dầm có nhiều vết nứt chịu uốn

Ta đưa vào các chuyển vị nứt $U = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4\}$ tại $x = 0$ và $x = L$

$$u_1 = \Phi(0); u_2 = \Phi'(0); u_3 = \Phi(L); u_4 = \Phi'(L) \quad (11)$$

và các lực nứt tương ứng

$$u_1 = \Phi(0); u_2 = \Phi'(0); u_3 = \Phi(L); u_4 = \Phi'(L) \quad (12)$$

Sử dụng các ký hiệu

$$\begin{aligned} \bar{Z}_j^+ &= \{Z_{j,1}^+, Z_{j,2}^+, Z_{j,3}^+, Z_{j,4}^+\}^T = \{\Phi(x_j + 0); \Phi'(x_j + 0); EI_z \Phi''(x_j + 0); -EI_z \Phi''(x_j + 0)\}^T; j=0,1,...,n \\ \bar{Z}_j^- &= \{Z_{j,1}^-, Z_{j,2}^-, Z_{j,3}^-, Z_{j,4}^-\}^T = \{\Phi(x_j - 0); \Phi'(x_j - 0); -EI_z \Phi''(x_j - 0); EI_z \Phi''(x_j - 0)\}^T; j=1,2,...,n+1 \end{aligned} \quad (13)$$

khi đó

$$\begin{aligned} Z_{0,1}^+ &= \Phi(0) = u_1; Z_{0,2}^+ = \Phi'(0) = u_2; Z_{0,3}^+ = EI_z \Phi''(0) = P_1; Z_{0,4}^+ = -EI_z \Phi''(0) = P_2 \\ Z_{n+1,1}^- &= \Phi(L) = u_3; Z_{n+1,2}^- = \Phi'(L) = u_4; Z_{n+1,3}^- = -EI_z \Phi''(L) = P_3; Z_{n+1,4}^- = EI_z \Phi''(L) = P_4 \end{aligned} \quad (14)$$

và các hàm Krylov

$$K_1(x) = \frac{\cosh x + \cos x}{2}; K_3(x) = \frac{\cosh x - \cos x}{2}; K_2(x) = \frac{\sinh x + \sin x}{2}; K_4(x) = \frac{\sinh x - \sin x}{2} \quad (15)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (9) trên đoạn $j=1,2,\dots,n+1$ với $x \in (x_{j-1}, x_j)$ có dạng

$$\Phi_j(x) = K_1(\lambda \bar{x}) Z_{j-1,1}^+ + \frac{K_2(\lambda \bar{x})}{\lambda} Z_{j-1,2}^+ + \frac{K_4(\lambda \bar{x})}{EI_z \lambda^3} Z_{j-1,3}^+ - \frac{K_3(\lambda \bar{x})}{EI_z \lambda^2} Z_{j-1,4}^+; \quad \bar{x} = x - x_{j-1} \quad (16)$$

Tại đầu phải $\bar{Z}_j^-$ của đoạn thanh j , ta có

$$\bar{Z}_j^- = T_j \bar{Z}_{j-1}^+ \quad \text{với } j=1,2,\dots,n+1 \quad (17)$$

trong đó ma trận T_j được gọi là *ma trận chuyển của đoạn dầm nguyên vẹn*

$$T_j(\lambda, \ell) = \begin{bmatrix} K_1(\lambda \ell) & \lambda^{-1} K_2(\lambda \ell) & K_4(\lambda \ell)/EI_z \lambda^3 & -K_3(\lambda \ell)/EI_z \lambda^2 \\ \lambda K_4(\lambda \ell) & K_1(\lambda \ell) & K_3(\lambda \ell)/EI_z \lambda^2 & -K_2(\lambda \ell)/EI_z \lambda \\ -\lambda^3 EI_z K_2(\lambda \ell) & -\lambda^2 EI_z K_3(\lambda \ell) & -K_1(\lambda \ell) & \lambda K_4(\lambda \ell) \\ \lambda^2 EI_z K_3(\lambda \ell) & \lambda EI_z K_4(\lambda \ell) & \lambda^{-1} K_2(\lambda \ell) & -K_1(\lambda \ell) \end{bmatrix} \quad (18)$$

với $\ell_j = x_j - x_{j-1}$. Sử dụng các véc tơ $\bar{Z}_j^-, \bar{Z}_j^+$, ta viết lại điều kiện (10) dưới dạng ma trận

$$\bar{Z}_j^+ = J_j \bar{Z}_j^- \quad \text{với } j=1,2,\dots,n \quad (19)$$

trong đó ma trận $J_j = J_j(\alpha_j)$ được gọi là *ma trận chuyển tại vị trí vết nứt*

$$J_j(\alpha_j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_j \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Từ (19), (17) ta có:

$$\bar{Z}_j^+ = J_j T_j \bar{Z}_{j-1}^+ \quad \text{với } j=1,\dots,n \quad (21)$$

$$\text{dẫn đến:} \quad \bar{Z}_n^+ = J_n T_n J_{n-1} T_{n-1} \dots J_1 T_1 \bar{Z}_0^+ \quad (22)$$

Nhân cả hai vế của phương trình này với ma trận T_{n+1} và áp dụng (17), ta nhận được

$$\bar{Z}_{n+1}^- = T_{n+1} J_n T_n J_{n-1} \dots J_2 T_2 J_1 T_1 \bar{Z}_0^+ = Q \bar{Z}_0^+ \quad (23)$$

trong đó ma trận Q được gọi là *ma trận chuyển của dầm có n vết nứt bên trong*

$$Q = T_{n+1} J_n T_n J_{n-1} \dots J_2 T_2 J_1 T_1 \quad (24)$$

Ta viết ma trận Q dưới dạng $Q = \begin{bmatrix} [Q_1] & [Q_2] \\ [Q_3] & [Q_4] \end{bmatrix}$ với

$$[Q_1] = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}; [Q_2] = \begin{pmatrix} Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{23} & Q_{24} \end{pmatrix}; [Q_3] = \begin{pmatrix} Q_{31} & Q_{32} \\ Q_{41} & Q_{42} \end{pmatrix}; [Q_4] = \begin{pmatrix} Q_{33} & Q_{34} \\ Q_{43} & Q_{44} \end{pmatrix} \quad (25)$$

và chú ý các ký hiệu đã đưa vào ở trên, từ (23) cho ta các quan hệ

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = [Q_1] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + [Q_2] \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = [Q_3] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + [Q_4] \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Từ đó có thể rút ra quan hệ giữa các lực nút P và chuyển vị nút U của phần tử dầm chịu uốn có nhiều vết nứt như sau:

$$[K_e]\{U\} = \{P\} \quad (27)$$

trong đó:

$$[K_e] = \begin{pmatrix} -[Q_2]^{-1}[Q_1] & [Q_2]^{-1} \\ [Q_3] - [Q_4][Q_2]^{-1}[Q_1] & [Q_4][Q_2]^{-1} \end{pmatrix} \quad (28)$$

Ma trận $[K_e]_{4 \times 4}$ được gọi là *ma trận độ cứng động lực của phần tử dầm có n vết nứt*.

4. Xác định hàm dạng và dạng dao động riêng của phần tử dầm chịu uốn có nhiều vết nứt

4.1 Xác định hàm dạng

Dựa vào biểu thức nghiệm tổng quát (16) và biểu thức (27), ta có thể xác định được hàm dạng dao động của phần tử dầm chịu uốn có nhiều vết nứt như sau:

a. Để tìm hàm dạng N_1 , từ điều kiện biên (2a), ta xác định ứng lực P_1 và P_2 dựa vào (27):

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{pmatrix}$$

Như vậy, các thông số của đoạn thứ nhất ($j=1$) là

$$Z_0^+ = \{Z_1^+(0) = 1; \quad Z_2^+(0) = 0; \quad Z_3^+(0) = k_{11}; \quad Z_4^+(0) = k_{21}\} \quad (29)$$

nên hàm dạng N_1 cho đoạn này có dạng

$$N_1^{(1)} = K_1(\lambda \bar{x}) + \frac{K_4(\lambda \bar{x})}{EI_z \lambda^3} k_{11} - \frac{K_3(\lambda \bar{x})}{EI_z \lambda^2} k_{21}; \quad \bar{x} = x - 0 \quad (30)$$

Sử dụng (21) và (16), ta xác định được thông số của hàm dạng N_1 trên đoạn kế tiếp.

Trường hợp dầm không có vết nứt, ta nhận được hàm dạng

$$N_1 = K_1(\lambda x) + \frac{\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 - \tilde{K}_3 \tilde{K}_4}{\tilde{K}_3^2 - \tilde{K}_2 \tilde{K}_4} K_4(\lambda x) - \frac{\tilde{K}_2^2 - \tilde{K}_1 \tilde{K}_3}{\tilde{K}_3^2 - \tilde{K}_2 \tilde{K}_4} K_3(\lambda x)$$

trong đó $\tilde{K}_i = K_i(\lambda L)$. Khi các hệ số cản $\mu_1 = \mu_2 = 0$, ta nhận lại được hàm dạng N_1 theo (6).

b. Để tìm hàm dạng N_2 , từ điều kiện biên (2b), ta xác định ứng lực P_1 và P_2 dựa vào (27):

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{pmatrix}$$

Như vậy, các thông số của đoạn thứ nhất ($j=1$) là

$$Z_0^+ = \{Z_1^+(0) = 0; \quad Z_2^+(0) = 1; \quad Z_3^+(0) = k_{12}; \quad Z_4^+(0) = k_{22}\} \quad (31)$$

nên hàm dạng N_2 cho đoạn này có dạng:

$$N_2^{(1)} = \frac{K_2(\lambda \bar{x})}{\lambda} + \frac{K_4(\lambda \bar{x})}{EI_z \lambda^3} k_{12} - \frac{K_3(\lambda \bar{x})}{EI_z \lambda^2} k_{22}; \quad \bar{x} = x - 0 \quad (32)$$

Sử dụng (21) và (16), ta xác định được thông số của hàm dạng N_2 trên đoạn kế tiếp.

Trường hợp dầm không có vết nứt, ta nhận được hàm dạng

$$N_2 = \frac{K_2(\lambda x)}{\lambda} + \frac{\tilde{K}_2^2 - \tilde{K}_1 \tilde{K}_3}{\lambda(\tilde{K}_3^2 - \tilde{K}_2 \tilde{K}_4)} K_4(\lambda x) - \frac{\tilde{K}_2 \tilde{K}_3 - \tilde{K}_1 \tilde{K}_4}{\lambda(\tilde{K}_3^2 - \tilde{K}_2 \tilde{K}_4)} K_3(\lambda x)$$

trong đó $\tilde{K}_i = K_i(\lambda L)$. Khi các hệ số cản $\mu_1 = \mu_2 = 0$, ta nhận lại được hàm dạng N_2 theo (6).

c. Để tìm hàm dạng N_3 , từ điều kiện biên (2c), ta xác định ứng lực P_1 và P_2 dựa vào (27)

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} k_{13} \\ k_{23} \end{pmatrix}$$

Như vậy, các thông số của đoạn thứ nhất ($j=1$) là

$$Z_0^+ = \{Z_1^+(0) = 0; \quad Z_2^+(0) = 0; \quad Z_3^+(0) = k_{13}; \quad Z_4^+(0) = k_{23}\} \quad (33)$$

nên hàm dạng N_3 cho đoạn này có dạng

$$N_3^{(1)} = \frac{K_4(\lambda \bar{x})}{EI_z \lambda^3} k_{13} - \frac{K_3(\lambda \bar{x})}{EI_z \lambda^2} k_{23}; \quad \bar{x} = x - 0 \quad (34)$$

Sử dụng (21) và (16), ta xác định được thông số của hàm dạng N_3 trên đoạn kế tiếp.

Trường hợp dầm không có vết nứt, ta nhận được hàm dạng

$$N_3 = -\frac{\tilde{K}_2}{\tilde{K}_3^2 - \tilde{K}_2 \tilde{K}_4} K_4(\lambda x) + \frac{\tilde{K}_3}{\tilde{K}_3^2 - \tilde{K}_2 \tilde{K}_4} K_3(\lambda x)$$

trong đó $\tilde{K}_i = K_i(\lambda L)$. Khi các hệ số cản $\mu_1 = \mu_2 = 0$, ta nhận lại được hàm dạng N_3 theo (6).

d. Để tìm hàm dạng N_4 , từ điều kiện biên (2d), ta xác định ứng lực P_1 và P_2 dựa vào (27)

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} k_{14} \\ k_{24} \end{pmatrix}$$

Như vậy, các thông số của đoạn thứ nhất ($j=1$) là

$$Z_0^+ = \{Z_1^+(0) = 0; \quad Z_2^+(0) = 0; \quad Z_3^+(0) = k_{14}; \quad Z_4^+(0) = k_{24}\} \quad (35)$$

nên hàm dạng N_4 cho đoạn này có dạng

$$N_4^{(1)} = \frac{K_4(\lambda \bar{x})}{EI_z \lambda^3} k_{14} - \frac{K_3(\lambda \bar{x})}{EI_z \lambda^2} k_{24}; \quad \bar{x} = x - 0 \quad (36)$$

Sử dụng (21) và (16), ta xác định được các thông số của hàm dạng N_4 trên các đoạn kế tiếp.

Trường hợp dầm không có vết nứt, ta nhận được hàm dạng

$$N_4 = \frac{\tilde{K}_3}{\lambda(\tilde{K}_3^2 - \tilde{K}_2\tilde{K}_4)} K_4(\lambda x) - \frac{\tilde{K}_4}{\lambda(\tilde{K}_3^2 - \tilde{K}_2\tilde{K}_4)} K_3(\lambda x)$$

trong đó $\tilde{K}_i = K_i(\lambda L)$. Khi các hệ số cản $\mu_1 = \mu_2 = 0$, ta nhận lại được hàm dạng N_4 theo (6).

4.2 Xác định dạng dao động riêng

Việc lắp ghép ma trận độ cứng động lực của từng phần tử dầm (28) vào ma trận độ cứng động lực của cả kết cấu $\hat{K}(\omega)$ thực hiện tương tự như trong phương pháp phần tử hữu hạn. Khi đó, bài toán dao động riêng của cả kết cấu dẫn đến bài toán tìm tần số và dạng dao động riêng từ hệ phương trình:

$$\hat{K}(\omega)U = 0 \quad (37)$$

trong đó các tần số riêng ω_j được xác định từ phương trình

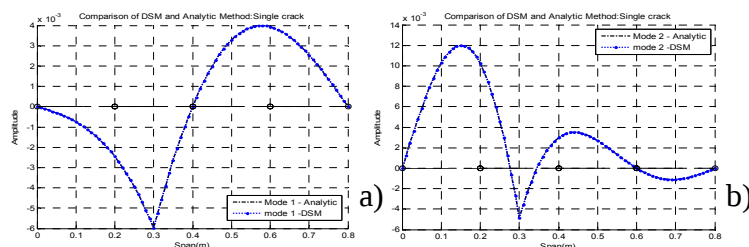
$$\det \hat{K}(\omega) = 0 \quad (38)$$

và các chuyển vị nút U tương ứng với tần số riêng ω_j được tìm từ (37). Sau khi xác định được các chuyển vị nút $u_1; u_2; u_3; u_4$ (chính xác đến một hệ số tỷ lệ), ta xác định dạng dao động riêng của phần tử dầm chịu uốn có nhiều vết nứt dựa vào (4).

5. Phân tích dao động của kết cấu hệ thanh có nhiều vết nứt

5.1 Dầm đơn giản

Xét dầm đơn giản có chiều dài nhịp $L = 0.8m$, tiết diện chữ nhật $b \times h = 0.02 \times 0.02m^2$, khối lượng riêng $\rho = 7800kg/m^3$, mô đun đàn hồi Young $E = 2.1 \times 10^{11}N/m^2$, hệ số poisson $\nu = 0.3$ [12].



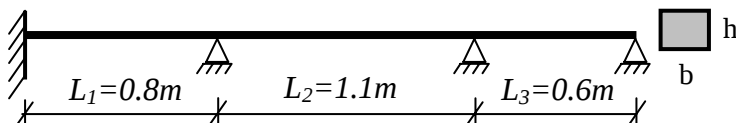
Hình 3: So sánh sự thay đổi 2 dạng riêng đầu tiên

Hình 3a-b chỉ ra sự thay đổi 2 dạng dao động đầu tiên (là hiệu số của dạng dao động riêng dầm có vết nứt và dạng dao động riêng của dầm không có vết nứt tương ứng) của dầm đơn giản hai đầu liên kết khớp có 1 vết nứt tại vị $x=0.3m$ từ

bên trái với độ sâu 30% tính theo phương pháp giải tích (đường ---, [2]) và theo phương pháp đề nghị (đường ---). Rõ ràng các dạng dao động riêng nhận được theo phương pháp đề xuất là trùng khớp với các dạng dao động riêng nhận được theo phương pháp giải tích.

5.2 Dầm liên tục nhiều nhịp

Xét dầm liên tục có chiều dài nhịp $L_1=0.8m$, $L_2=1.1m$, $L_3=0.6m$, tiết diện chữ nhật $b \times h = 0.04 \times 0.02m^2$, khối lượng riêng $\rho = 7850kg/m^3$, mô đun đàn hồi Young $E = 2.1 \times 10^{11}N/m^2$, hệ số poisson $\nu = 0.3$ (hình 4).

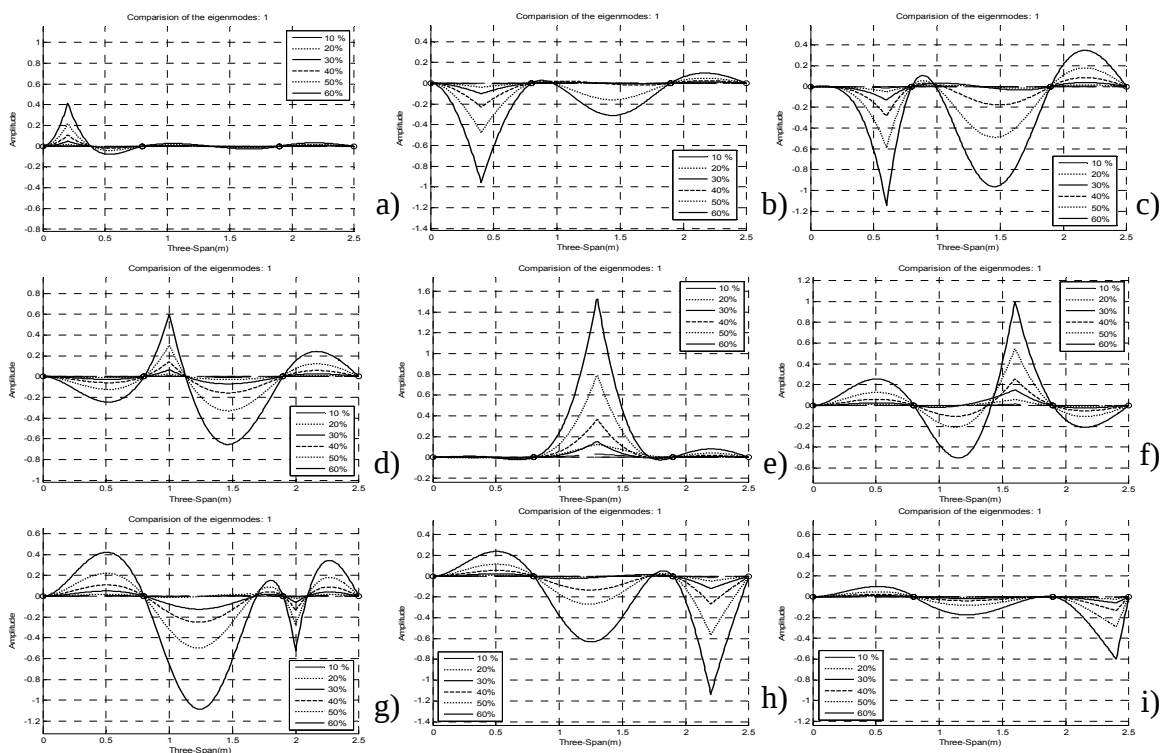


Hình 4. Dầm liên tục nhiều nhịp

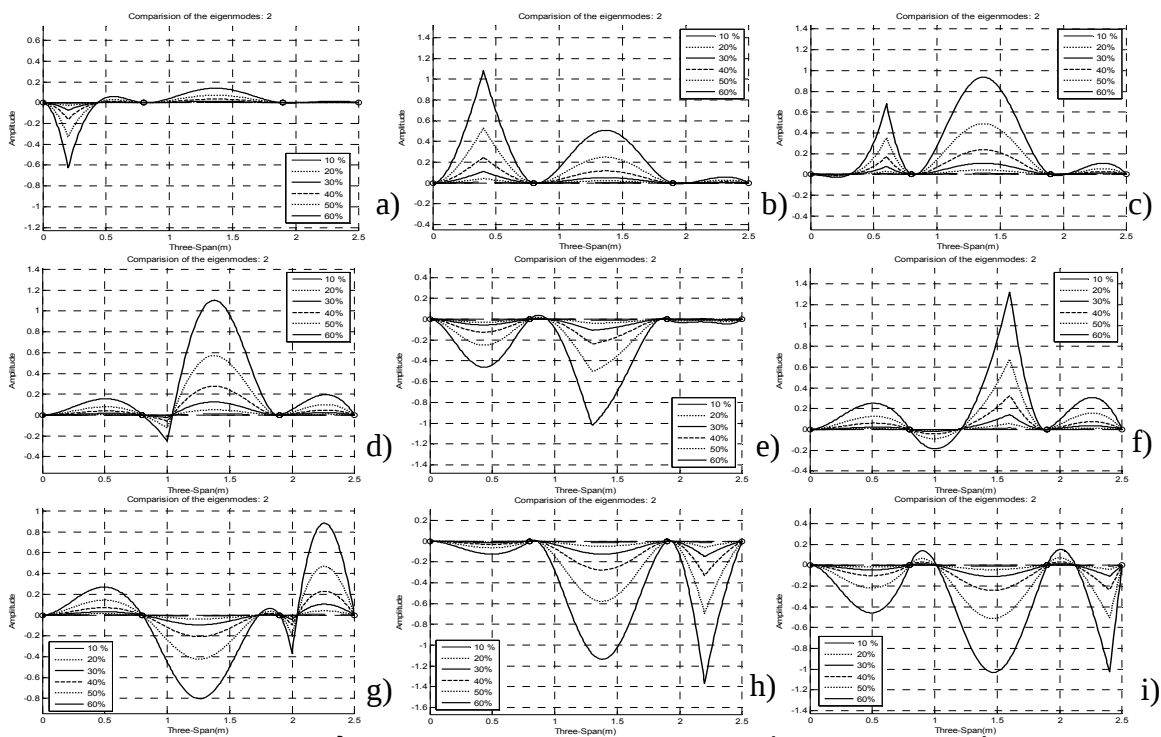
Hình 5-7 thể hiện sự thay đổi ba dạng dao động riêng đầu tiên do sự thay đổi vị trí vết nứt trên các nhịp khác nhau của dầm liên tục có

1 vết nứt tại các vị trí:

- 0.2m (hình 5a, 6a, 7a), 0.4m (hình 5b, 6b, 7b), 0.6m (hình 5c, 6c, 7c) từ đầu nhịp thứ nhất;



Hình 5. Sự thay đổi dạng dao động riêng đầu tiên của dầm liên tục có 1 vết nứt



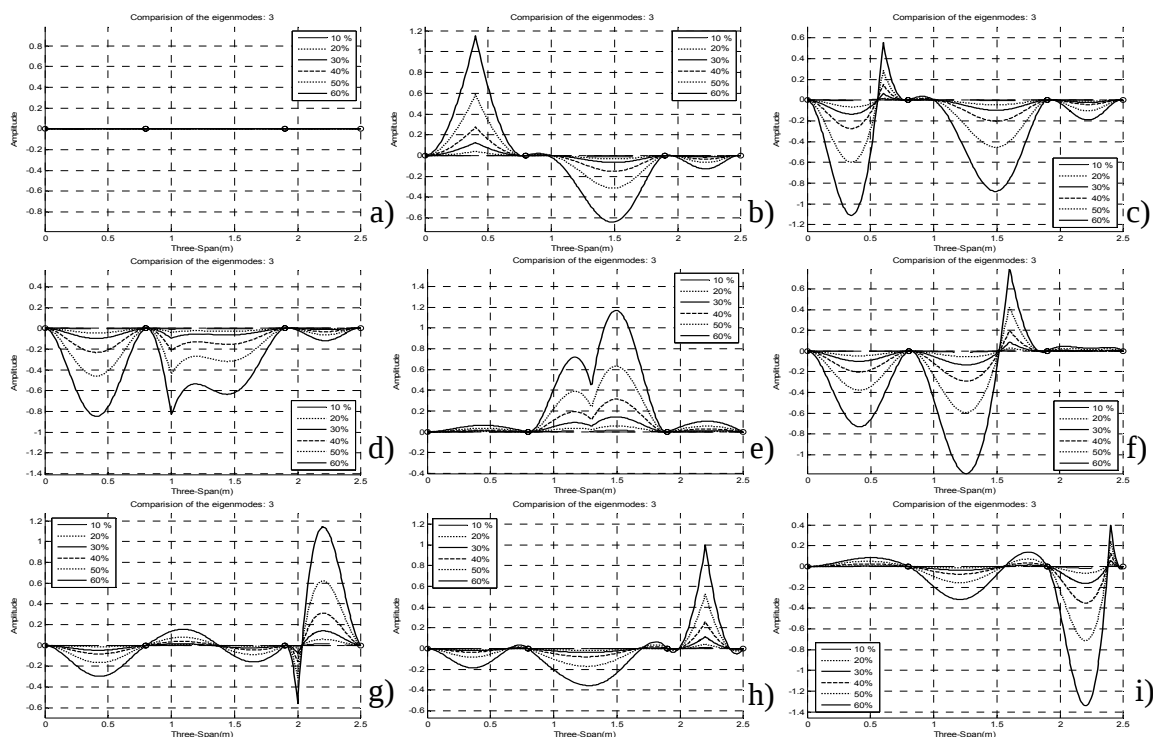
Hình 6. Sự thay đổi dạng dao động riêng thứ hai của dầm liên tục có 1 vết nứt

KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ ỨNG DỤNG

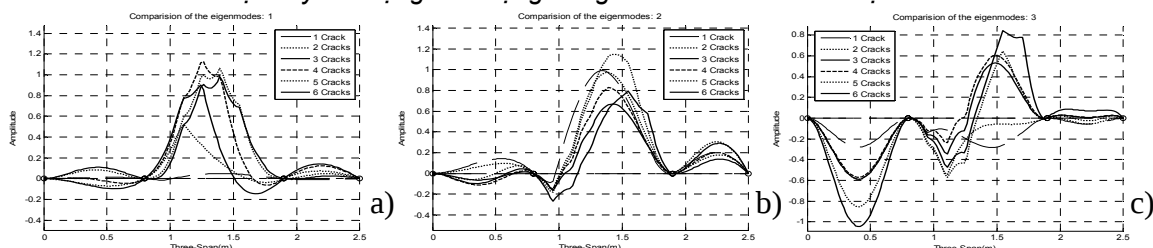
- $0.2m$ (hình 5d, 6d, 7d), $0.5m$ (hình 5e, 6e, 7e), $0.8m$ (hình 5f, 6f, 7f) từ đầu nhịp thứ hai;

- $0.1m$ (hình 5g, 6g, 7g), $0.3m$ (hình 5h, 6h, 7h), $0.5m$ (hình 5i, 6i, 7i) từ đầu nhịp thứ ba.

với các độ sâu tăng dần từ 6% đến 72%. Hình 8 thể hiện sự thay đổi 3 dạng dao động riêng đầu tiên của dầm liên tục khi số lượng vết nứt trên dầm liên tục tăng dần từ 1 đến 6 với khoảng cách đều nhau $0.15m$ tại nhịp thứ hai và cùng độ sâu 30%.



Hình 7. Sự thay đổi dạng dao động riêng thứ ba của dầm liên tục có 1 vết nứt



Hình 8. Sự thay đổi 3 dạng dao động riêng đầu tiên khi số lượng vết nứt tăng lên từ 1-6

Ta có một số nhận xét:

- Tại vị trí vết nứt, dạng dao động riêng có sự thay đổi đột ngột (đỉnh nhọn) nhưng độ lớn của sự thay đổi dạng dao động riêng tại vị trí vết nứt không phải là lớn nhất.

- Độ lớn của sự thay đổi dạng dao động riêng tăng lên khi độ sâu vết nứt tăng lên.

- Tại nhịp xuất hiện vết nứt dạng dao động riêng có sự thay đổi đột ngột. Tại các nhịp khác sự thay đổi này lại là liên tục, sự thay đổi cũng là tương đối lớn ở các nhịp liên kề.

- Có những vị trí vết nứt không làm thay đổi dạng dao động riêng. Ví dụ: vết nứt tại vị trí $0.8m$ từ đầu nhịp thứ hai (hay $1.6m$ từ đầu ngàm của dầm liên tục) không làm thay đổi cả 3 dạng dao động riêng (hình 5f, 6f, 7f); vết nứt tại vị trí $0.2m$ làm thay đổi 2 dạng dao động riêng đầu tiên nhưng không làm thay đổi dạng dao động riêng thứ ba (hình 7a). Các điểm như vậy

gọi là các *điểm bất biến của dạng dao động riêng* để phân biệt với các điểm nút của dạng dao động riêng, tại đó dạng dao động riêng bằng 0.

6. Kết luận

Trong bài báo này, các tác giả đã trình bày các kết quả nghiên cứu về việc xác định hàm dạng dao động của phần tử dầm đàn hồi chịu uốn có nhiều vết nứt theo mô hình lò xo bằng phương pháp độ cứng động lực kết hợp với phương pháp ma trận chuyển. Trên cơ sở đó, các tác giả đã xây dựng một chương trình phân tích sự thay đổi của các dạng dao động riêng cho kết cấu hệ thanh có nhiều vết nứt theo phương pháp độ cứng động lực trên nền MatLab. Độ chính xác và tin cậy của kết quả nghiên cứu được thể hiện qua ví dụ so sánh các dạng dao động riêng của dầm công xôn có vết nứt tính theo phương pháp đề xuất là trùng khớp với các dạng dao động riêng tính theo phương pháp giải tích. Từ chương trình này, các tác giả đã có các phân tích chi tiết về sự thay đổi dạng dao động riêng của kết cấu hệ thanh có nhiều vết nứt, cụ thể là dầm liên tục nhiều nhịp có nhiều vết nứt. Các kết quả nghiên cứu nhận được là mới, là cơ sở cho việc xây dựng một phương pháp hiệu quả để phân tích sự làm việc của kết cấu khi có vết nứt và cũng là cơ sở để xây dựng một phương pháp hiệu quả xác định vết nứt trong các kết cấu hệ thanh dựa trên phân tích các đặc trưng dao động.

Tài liệu tham khảo

1. Trần Thanh Hải (2011), *Chẩn đoán vết nứt của dầm bằng phương pháp đo rung động*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật, Viện Cơ học.
2. Trần Văn Liên (2003), *Bài toán ngược trong cơ học và một số ứng dụng*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Xây dựng.
3. Adams R.D., Cawley P., Pie C.J. and Stone B.J.A. (1978), "A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures", *Journal of Mechanical Engineering Science*, 20, 93-100.
4. Bathe K.J. (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice – Hall.
5. Cawley P., Adams R.D. (1979), "The location of defects in structures from measurements of natural frequencies", *Journal of strain analysis*, Vol 14, No 2.
6. M. Charti, R. Rand and S. Mukherjee (1997), "Modal analysis of cracked beam", *Journal of Sound and Vibration* 207, 249-270. .
7. Nguyen Xuan Hung (1999), *Dynamics of structures and its application in structural identification*, Institute of Applied Mechanics
8. N. T. Khiem, T. V. Lien (2001), "A simplified method for frequency analysis of multiple cracked beam", *Journal of Sound and Vibration*, 245, 737-751.
9. Nguyen Tien Khiem and Dao Nhu Mai (1997), "Natural frequency analysis of cracked beam", *Vietnam Journal of Mechanics*, NCNST of Vietnam, 19(2), 28-38.
10. Leung Y.T. (1993), *Dynamic Stiffness and Substructures*, Springer-Verlag, London.
11. Rao S.S. (1986), *Mechanical vibrations. Second Edition*, Addison-Wesley Pub Company.
12. Sato H. (1983), "Free vibration of beams with abrupt changes of cross-section", *Journal of Sound and Vibration*, 89,, 59-64.
13. Shrifin E.I. and Ruotolo R. (1999) "Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks", *Journal of Sound and Vibration*, 222(3), 409-423.