

## ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN XÁC ĐỊNH SỰ PHÂN BỐ NHIỆT ĐỘ TRÊN TIẾT DIỆN THÉP

Phạm Thị Ngọc Thu<sup>1</sup>

**Tóm tắt:** Ở Việt Nam, quy trình thiết kế chống cháy cho công trình xây dựng bằng thép đang được quan tâm mạnh mẽ. Trong bài báo này, tác giả giới thiệu bài toán xác định sự phân bố nhiệt độ trên tiết diện cấu kiện thép chịu lực trong không gian cháy áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn, đây là một trong những bài toán chủ đạo của quy trình thiết kế kể trên. Từ kết quả thu được của bài toán, ta có thể kiểm soát tốc độ lan truyền nhiệt, tính toán khả năng chịu lực còn lại của cấu kiện tại một thời điểm nhất định trong quá trình cháy, có ý nghĩa rất lớn đến hiệu quả của các công tác phòng cháy chữa cháy.

**Từ khóa:** kết cấu thép, phần tử hữu hạn, nhiệt độ

**Summary:** In Vietnam, the procedure for fire - resistant steel structural design is strongly interested. In this paper, the author introduces the problem to determine the temperature distribution on the steel cross-section in fire applying the finite element method which is one of the main problems of the procedure described above. From the results of the problem, we can control the speed of spread heat, calculate bearing capacity of structures remaining at a given time during burning, which is of great significance to the efficiency of the fire.

**Keywords:** steel structural, finite element method, temperature

Nhận bài ngày 15/12/2011, chỉnh sửa ngày 20/3/2012, chấp nhận đăng ngày 30/5/2012

### 1. Đặt vấn đề

Hiện nay ở Việt Nam, quy trình thiết kế chống cháy cho các công trình xây dựng, đặc biệt là các công trình thép đang dần hoàn thiện, từ thiết kế giải pháp kiến trúc, giải pháp kỹ thuật phòng cháy chữa cháy cho đến thiết kế hệ kết cấu nhằm mục đích duy trì trạng thái chịu lực trong thời gian cháy. Để đạt được mục đích này, cần thiết phải thực hiện mô phỏng đám cháy, xác định nhiệt độ trên bề mặt cấu kiện, tìm quy luật lan truyền nhiệt bên trong và tính toán khả năng chịu lực của kết cấu tại thời điểm nhất định trong đám cháy.

Trên thế giới đã có nhiều mô hình cháy được sử dụng đạt hiệu quả cao như TASEF (Thụy Điển), CFAST, ANSYS (Mỹ) [4],[5],... Kết quả của các mô hình này sẽ trở thành điều kiện đầu vào lý tưởng cho bài toán xác định quy luật lan truyền nhiệt bên trong kết cấu khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn - là phương pháp phổ biến khi tính toán kết cấu. Điều kiện này có thể dưới dạng nhiệt độ thực tế, mật độ nhiệt hay quy luật trao đổi nhiệt giữa cấu kiện đang xét với môi trường [2]. Độ chính xác của bài toán phụ thuộc vào độ mịn của lưới chia và giả thiết về quy luật lan truyền là tuyến tính hay không tuyến tính trong không gian.

Bài báo thực hiện tính toán sự phân bố nhiệt độ khi giả thuyết quy luật lan truyền là tuyến tính. Với số liệu đầu vào là nhiệt độ trên bề mặt cấu kiện và hệ số truyền nhiệt của vật liệu, ta có thể xác định được nhiệt độ tại một điểm bất kỳ bên trong kết cấu.

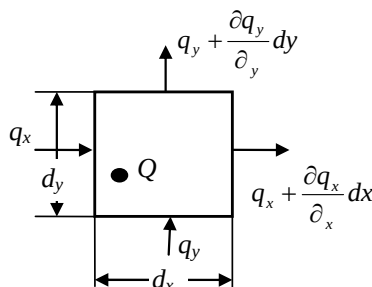
<sup>1</sup> ThS, Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng.  
E-mail: ngocthu9040@yahoo.com.vn

## 2. Áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn vào bài toán xác định phân bố nhiệt lượng trên tiết diện thép

### 2.1 Phương trình vi phân dẫn nhiệt hai chiều [2]

Khảo sát một phân tử chịu nhiệt độ  $T$  có hệ số dẫn nhiệt  $k$  như hình 1, có độ dày  $t$  theo phương  $z$  là hằng số, lượng nhiệt phát sinh trong phân tử là  $Q(\text{W}/\text{m}^3)$ .

Vì lượng nhiệt truyền vào vi phân thể tích cộng với lượng nhiệt phát sinh phải bằng lượng nhiệt truyền ra, nên ta có:



Hình 1. Mô hình phân tử khảo sát

$$q_x dyt + q_y dxt + Q dx dyt = \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dyt + \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dxt \quad (1)$$

$$\rightarrow \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - Q = 0$$

$$\text{trong đó: } q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}; \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2)$$

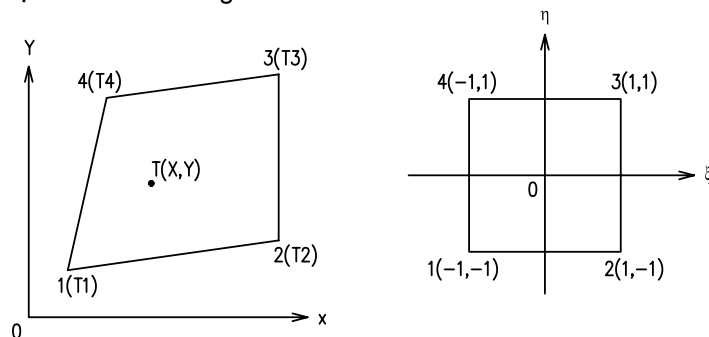
là nhiệt lượng truyền vào phân tử theo hai phương  $x, y$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad (3)$$

Đây là phương trình vi phân đạo hàm riêng mô tả quá trình dẫn nhiệt 2 chiều. Trong trường hợp này, phương trình được giải quyết với điều kiện đầu vào là nhiệt độ  $T = T_0$  trên biên xác định.

### 2.2 Giải bài toán sử dụng phần tử tứ giác

Khảo sát một phần tử tứ giác tổng quát như hình 2. Phần tử có 4 nút (1,2,3,4) lần lượt được đánh số ngược chiều kim đồng hồ.



Hình 2. Mô hình phần tử tứ giác

$$\text{Vectơ nhiệt độ tại nút của phần tử ký hiệu là } T_e = [T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4]' \quad (4)$$

Thực hiện phép qui chiếu phần tử tứ giác về dạng hình vuông xác định trong hệ tọa độ địa phương  $(\xi, \eta)$ .

### 2.2.1. Xây dựng hàm dạng

Xây dựng hàm dạng Lagrange  $N_i$  có quy tắc:  $N_i$  bằng đơn vị tại nút  $i$  và bằng 0 tại các nút còn lại [1]. Cụ thể  $N_1 = 1$  tại nút 1;  $N_i = 0$  tại các nút 2, 3, 4

$$\rightarrow N_1 = (1-\xi)(1-\eta)/4 \quad (5a)$$

Tương tự ta có:

$$N_2 = (1+\xi)(1-\eta)/4 \quad (5b)$$

$$N_3 = (1+\xi)(1+\eta)/4 \quad (5c)$$

$$N_4 = (1-\xi)(1+\eta)/4 \quad (5d)$$

Khi đó, thông qua hàm dạng ta có thể biểu thị nhiệt độ  $T$  tại một điểm bất kỳ  $(\xi, \eta)$  của phần tử hữu hạn theo nhiệt độ tại các nút:

$$T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 + N_4 T_4 \quad (6)$$

Nhờ cách mô tả đẳng tham số, ta cũng có thể biểu thị tọa độ của một điểm bất kỳ  $M(x, y)$  trong phần tử theo tọa độ các nút:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \quad (7a)$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \quad (7b)$$

Xét hàm nhiệt độ  $T(x, y) = T[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$ . Thực hiện lấy đạo hàm toàn phần hàm  $T$ , viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\text{Đặt } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \text{ là ma trận Jacôbi, kết hợp các phương trình (5) và (7) ta có :}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow J &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\eta)(x_2 - x_1) + (1+\eta)(x_3 - x_4) & (1-\eta)(y_2 - y_1) + (1+\eta)(y_3 - y_4) \\ (1-\xi)(x_4 - x_1) + (1+\xi)(x_3 - x_2) & (1-\xi)(y_4 - y_1) + (1+\xi)(y_3 - y_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{Từ (8) và (9)} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Từ các phương trình (5) và (6), ta viết lại phương trình (10) dưới dạng:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-\eta}{4} & \frac{1-\eta}{4} & \frac{1+\eta}{4} & -\frac{1+\eta}{4} \\ -\frac{1-\xi}{4} & -\frac{1+\xi}{4} & \frac{1+\xi}{4} & \frac{1-\xi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\text{Đặt } B = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-\eta}{4} & \frac{1-\eta}{4} & \frac{1+\eta}{4} & -\frac{1+\eta}{4} \\ -\frac{1-\xi}{4} & -\frac{1+\xi}{4} & \frac{1+\xi}{4} & \frac{1-\xi}{4} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = B \cdot T_e \quad (12)$$

Ta sẽ sử dụng các biểu thức trên để xây dựng ma trận dẫn nhiệt của phần tử.

### 2.2.2 Xây dựng ma trận truyền nhiệt của phần tử

Quay lại phương trình (3), thực chất của việc giải phương trình này kết hợp với các điều kiện đầu vào tương ứng dựa trên nguyên lý cực tiểu thế năng là cực tiểu hàm :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \left[ k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] dV - \int_V Q T dV \quad (13)$$

Vì  $dV = t dA$  với  $t$  là độ dày phần tử,  $t = \text{const}$

$$\rightarrow \Pi = \frac{1}{2} \int_A \left[ k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] t dA - \int_A Q T t dA = \Pi_1 + \Pi_2 \quad (14)$$

$$\text{Xét } \Pi_1 = \frac{1}{2} \int_A \left[ k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] t dA \quad (15)$$

$$\text{Từ (12)} \rightarrow \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = T_e' B' B T_e \quad (16)$$

$$\text{Thay vào (15)} \rightarrow \Pi_1 = \frac{1}{2} \int_A k T_e' B' B T_e t dA = \frac{1}{2} \int_{xy} k T_e' B' B T_e t dx dy \quad (17)$$

$$\text{Dựa vào phép qui chiếu phần tử tứ giác, ta có : } dx dy = \det J d\xi d\eta \quad (18)$$

$$\rightarrow \Pi_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k T_e' B' B T_e t \det J d\xi d\eta = \frac{1}{2} T_e' \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k B' B t \det J d\xi d\eta \right) T_e = \frac{1}{2} T_e' k_e T_e \quad (19)$$

trong đó  $k_e = kt \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B' B \det J d\xi d\eta$  là ma trận dẫn nhiệt của phần tử. Ta nhận thấy  $B'$ ,  $B$ ,  $\det J$  đều là các hàm số của  $\xi$  và  $\eta$  nên cần phải tính  $k_e$  bằng tích phân số.

Áp dụng bài toán số hóa tích phân 2 biến số theo phép cầu phương Gauss 2 điểm:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^2 w_i \phi(\xi_i, \eta) d\eta = \sum_{i=1}^2 w_i \sum_{j=1}^2 w_j \phi(\xi_i, \eta_j) =$$

$$= w_1 w_1 \phi(\xi_1, \eta_1) + w_1 w_2 \phi(\xi_1, \eta_2) + w_2 w_1 \phi(\xi_2, \eta_1) + w_2 w_2 \phi(\xi_2, \eta_2) \quad (20)$$

Cho sai số  $\Delta = 0$  với độ chính xác của đa thức bậc 3  $\rightarrow \begin{cases} w_1 = w_2 = 1 \\ \xi_1 = \eta_1 = -1/\sqrt{3} \\ \xi_2 = \eta_2 = 1/\sqrt{3} \end{cases} \quad (21)$

Quay trở lại công thức tính  $k_e$ , khi xem  $\phi(\xi, \eta) = B' B \det J$ , ta có thể viết:

$$k_e = kt \left\{ B' B \det J \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + B' B \det J \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \right.$$

$$\left. + B' B \det J \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + B' B \det J \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} \quad (22)$$

Ma trận dẫn nhiệt của cả hệ  $K = \sum_e k_e \quad (23)$

Xét  $\Pi_2 = -\int_A Q T dA = -RT$ , thực chất là véc tơ nhiệt lượng thu được trong quá trình dẫn nhiệt, véc tơ này có thể đã biết (dưới dạng nhiệt lượng tập trung, nhiệt lượng phân bố), có thể là ẩn số phụ thuộc vào điều kiện đầu vào, ta sẽ xét đến  $\Pi_2$  trong từng bài toán cụ thể.

Cuối cùng, ta viết lại phương trình (14) dưới dạng:  $\Pi = \frac{1}{2} T_e' K T_e - R T_e \quad (24)$

Như vậy, ta có thể xây dựng trình tự bài toán áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để xác định phân bố nhiệt độ trên tiết diện thép theo các bước sau:

- Bước 1: Thực hiện chia lưới phần tử, đánh số thứ tự nút trên từng phần tử
- Bước 2: Lập hệ trục tọa độ và xác định tọa độ các nút trong từng phần tử
- Bước 3: Tính ma trận dẫn nhiệt của từng phần tử  $k_e$ :

+ Tính ma trận Jacôbi của phần tử theo công thức (11)

+ Tính các ma trận  $B \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right); B \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right); B \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right); B \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$  của phần

tử.

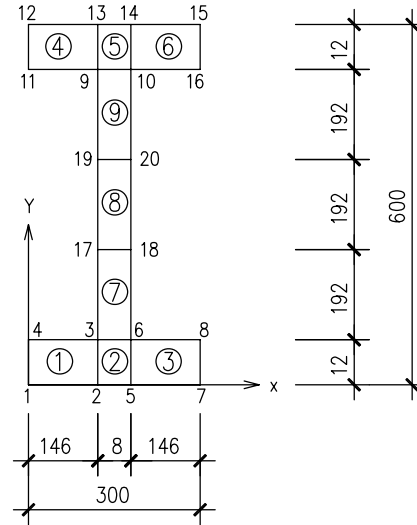
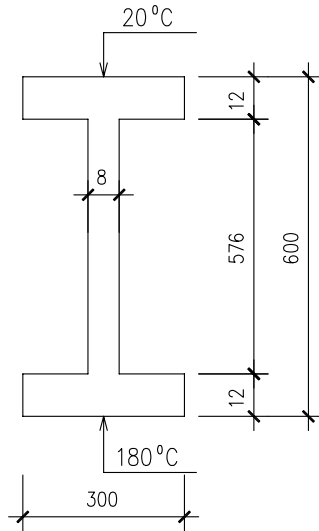
+ Tính ma trận dẫn nhiệt  $k_e$

- Bước 4: Tính ma trận dẫn nhiệt của cả hệ  $K$

- Bước 5: Giải phương trình  $K T_e = R$ , từ đó xác định véc tơ nhiệt độ tại nút  $T_e$  trong cả hệ.

### 3. Ví dụ tính toán

Cho tiết diện chữ I có kích thước và chịu tác động nhiệt độ như hình 3. Mặt trên có nhiệt độ  $20^\circ\text{C}$ , mặt dưới có nhiệt độ  $180^\circ\text{C}$ , hai mặt trái và phải được giữ cách nhiệt. Xác định sự phân bố nhiệt độ trên tiết diện biết hệ số dẫn nhiệt của thép  $k = 45 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ .



**Hình 3.** Tiết diện chữ I dẫn nhiệt

**Hình 4.** Cách chia lưới phần tử trên tiết diện chữ I

- Thực hiện chia lưới phần tử, đánh số thứ tự nút như hình 4.

Mỗi phần tử sẽ gồm 4 nút được đánh số theo bảng dưới đây:

| Phần tử | Thứ tự nút (theo ngược chiều kim đồng hồ) |    |    |    |
|---------|-------------------------------------------|----|----|----|
| 1       | 1                                         | 2  | 3  | 4  |
| 2       | 2                                         | 5  | 6  | 3  |
| 3       | 5                                         | 7  | 8  | 6  |
| 4       | 11                                        | 9  | 13 | 12 |
| 5       | 9                                         | 10 | 14 | 13 |
| 6       | 10                                        | 16 | 15 | 14 |
| 7       | 3                                         | 6  | 17 | 18 |
| 8       | 17                                        | 18 | 20 | 19 |
| 9       | 19                                        | 20 | 10 | 9  |

Nhận xét: Các phần tử (1, 3, 4, 6) có tính chất hình học giống nhau nên sẽ có ma trận dẫn nhiệt giống nhau, vì vậy ta chỉ cần tiến hành tính ma trận dẫn nhiệt cho một phần tử rồi áp dụng kết quả cho các phần tử còn lại. Thực hiện tương tự với các bộ phần tử giống nhau (2, 5); (7, 8, 9).

- Tính ma trận dẫn nhiệt  $k$  của phần tử  $i = 1 - 9$  xem độ dày  $t = 1$ :

$$k_1 = k_3 = k_4 = k_6 = \begin{bmatrix} 183,74 & 90,02 & -91,87 & -181,89 \\ 90,02 & 183,74 & -181,89 & -91,87 \\ -91,87 & -181,89 & 183,74 & 90,02 \\ -181,89 & -91,87 & 90,02 & 183,74 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = k_5 = \begin{bmatrix} 32,50 & -17,50 & -16,25 & 1,25 \\ -17,50 & 32,50 & 1,25 & -16,25 \\ -16,25 & 1,25 & 32,50 & -17,50 \\ 1,25 & -16,25 & -17,50 & 32,50 \end{bmatrix}$$

$$k_7 = k_8 = k_9 = \begin{bmatrix} 360,63 & -359,69 & -180,31 & 179,37 \\ -359,69 & 360,63 & 179,37 & -180,31 \\ -180,31 & 179,37 & 360,63 & -359,69 \\ 179,37 & -180,31 & -359,69 & 360,63 \end{bmatrix}$$

- Tính ma trận dẫn nhiệt của cả hệ  $K$

Hệ có 20 nút nên ma trận dẫn nhiệt của cả hệ  $K$  có dạng  $K[20 \times 20]$  là kết quả của bài toán ghép nối các ma trận dẫn nhiệt phần tử  $k_i$ :  $K = \sum_i k_i$  theo quy tắc thông thường của phương pháp phần tử hữu hạn

- Giải phương trình  $KT_e = R$

Ma trận  $T_e$  và  $R$  có dạng:

$$T_e = [T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4 \ T_5 \ T_6 \ T_7 \ T_8 \ T_9 \ T_{10} \ T_{11} \ T_{12} \ T_{13} \ T_{14} \ T_{15} \ T_{16} \ T_{17} \ T_{18} \ T_{19} \ T_{20}]'$$

$$R = [R_1 \ R_2 \ R_3 \ R_4 \ R_5 \ R_6 \ R_7 \ R_8 \ R_9 \ R_{10} \ R_{11} \ R_{12} \ R_{13} \ R_{14} \ R_{15} \ R_{16} \ R_{17} \ R_{18} \ R_{19} \ R_{20}]'$$

Các điều kiện biên tương ứng:

$$+ T_1 = T_2 = T_5 = T_7 = 180^\circ\text{C}$$

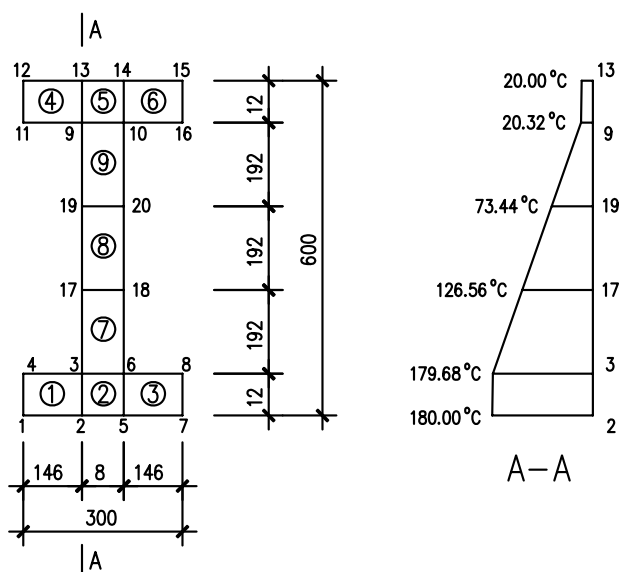
$$+ T_{12} = T_{13} = T_{14} = T_{15} = 20^\circ\text{C}$$

$$+ R_3 = R_4 = R_6 = R_8 = R_9 = R_{10} = R_{11} = R_{16} = R_{17} = R_{18} = R_{19} = R_{20} = 0$$

Giải phương trình  $KT_e = R$  ta thu được kết quả như sau:

$$T_3 = T_6 = 179,68^\circ\text{C}; T_4 = T_8 = 179,92^\circ\text{C}; T_9 = T_{10} = 20,32^\circ\text{C}$$

$$T_{11} = T_{16} = 20,08^\circ\text{C}; T_{17} = T_{18} = 126,56^\circ\text{C}; T_{19} = T_{20} = 73,44^\circ\text{C}$$



**Hình 5.** Sự phân bố nhiệt độ tại các nút trên mặt cắt A-A

#### 4. Kết luận

Kết quả ví dụ cho thấy sự phân bố nhiệt độ tuyến tính trong hệ trục Decac theo đúng giả thuyết ban đầu. Nếu thực hiện phân tích cho hệ kết cấu có số lượng phần tử lớn, cần thiết sử dụng các chương trình phần mềm tính toán như ANSYS, MATHLAB [2], AQUABUS,...

Dựa trên quy luật phân bố nhiệt độ thu được, có thể xác định sự biến thiên các đặc trưng cơ học của vật liệu thép như mô đun đàn hồi, giới hạn chảy, giới hạn bền,...trên tiết diện và theo chiều dài cấu kiện, từ đó tính toán mức độ duy trì khả năng chịu lực của hệ kết cấu tại một thời điểm trong quá trình cháy. Đây là bài toán trung gian để chuyển đổi ảnh hưởng của một mô hình đám cháy thành các tác động tác dụng lên kết cấu chịu lực, nó có ý nghĩa rất lớn nếu được ứng dụng để liên kết giữa giải pháp kỹ thuật phòng cháy chữa cháy và giải pháp kết cấu.

#### Tài liệu tham khảo

1. Võ Như Cầu (2005), *Tính kết cấu theo phương pháp phần tử hữu hạn*, Nhà xuất bản Xây dựng.
2. Trần Ích Thịnh, Ngô Như Khoa (2007), *Phương pháp phần tử hữu hạn*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật.
3. Phạm Thị Ngọc Thu (2006), *Nghiên cứu trạng thái làm việc của cấu kiện thép liên hợp thép - bê tông trong điều kiện chịu nhiệt độ cao*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật, trường Đại học Xây dựng.
4. Dat Duthinh, Kevin McGrattan, Abed Khaskia, (2008), *Recent advances in fire-structure analysis*, Fire safety journal 43, 161-167.
5. Joakim Sandstrom (2008), *Temperature calculations in fire exposed structures with the use of adiabatic surface temperatures*, Lulea tekniska universitet.
6. Richard D.Peacock, Walter W.Jones, Paul A.Reneke, Glenn P.Forney (2005), *CFAST-Consolidated model of fire growth and smoke transport (Version 6)*, NIST special publication 1041.