

PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI TẮM VÀ THANH THÀNH MỎNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP DẢI HỮU HẠN

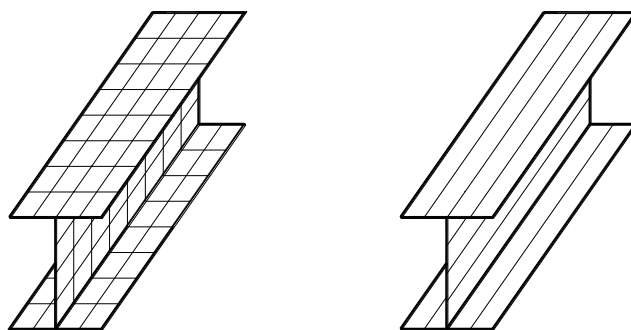
Bùi Hùng Cường¹

Tóm tắt: Bài báo trình bày về phương pháp dải hữu hạn bán giải tích trong phân tích ổn định kết cấu tấm và kết cấu thanh thành mỏng. Dải hữu hạn được xây dựng dựa trên lý thuyết tấm của Kirchhoff và biến dạng Green. Cách xây dựng ma trận độ cứng và ma trận hình học của dải hữu hạn được trình bày cụ thể trong bài báo. Các ví dụ cụ thể minh họa ứng dụng dải hữu hạn trong phân tích ổn định của tấm chịu nén đều và chịu uốn đều trong mặt phẳng tấm, của thanh thành mỏng tiết diện chữ C chịu uốn thuần túy.

Summary: The paper presents the semi-analytical finite strip method in buckling analysis of plated structures and thin-walled bars. The finite strip is based on the Kirchhoff plate theory and deformations of Green. The development of the stiffness matrix and the geometrical matrix is written in the paper. Numerical examples show the application of the finite strip in the buckling analysis of plates subjected to uniform compression and uniform in-plane bending, of thin-walled bars in C section subjected to pure bending.

Nhận ngày 22/08/2011, chỉnh sửa ngày 10/02/2012, chấp nhận đăng ngày 28/02/2012

1. Đặt vấn đề



a) Phương pháp phần tử hữu hạn b) Phương pháp dải hữu hạn

Hình 1. Sự khác nhau giữa phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp dải hữu hạn

Phương pháp dải hữu hạn bán giải tích là một nhánh của phương pháp phần tử hữu hạn, được sáng tạo bởi Cheung [1], Cheung đã sử dụng lý thuyết tấm của Kirchhoff để xây dựng các dải hữu hạn. Phương pháp dải hữu hạn sử dụng các hàm dạng là hàm đa thức theo phương ngang và hàm điều hòa theo phương dọc. Kết cấu dạng tấm được phân chia thành các dải hữu hạn liên kết với nhau tại các đường nút (khác với phương pháp phần tử hữu hạn là liên kết với nhau tại nút (Hình 1), tại mỗi đường nút có 4 bậc tự do, đó là: 3 chuyển vị thẳng và 1 chuyển vị xoay. Phương pháp này rất có hiệu quả trong phân tích các thanh có tiết diện không đổi. Tuy nhiên, phương pháp dải hữu hạn bán giải tích chỉ sử dụng được với một số dạng liên

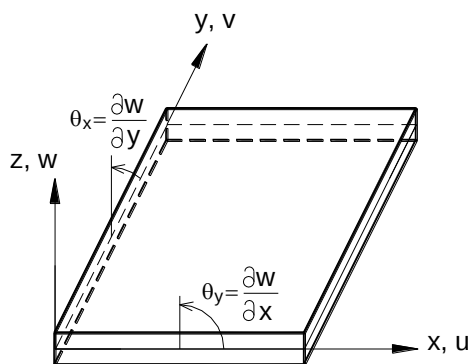
¹TS, Khoa Xây dựng DD & CN, Trường Đại học Xây dựng. E-mail: bhungcuong@gmail.com

kết như: khớp, ngàm, ngàm trượt, tự do. Cheung đã xây dựng ma trận độ cứng tuyến tính của dải hữu hạn 2 đường nút, 3 đường nút và 4 đường nút. Sau Cheung, có nhiều tác giả đã tiếp tục phát triển phương pháp tính toán số này trong phân tích thanh thành mỏng. Hancock [2] là người đầu tiên đưa ra đường cong mất ổn định của một loại tiết diện thanh mỏng. Đường cong này thể hiện mối quan hệ giữa ứng suất tới hạn và chiều dài thanh, cho phép có một cái nhìn tương đối tổng quát về sự làm việc ổn định đàn hồi của tiết diện đang xét. Hancock cũng chỉ rõ một hiện tượng mất ổn định ít được biết tới trước đó là mất ổn định oằn vắn tiết diện. Schafer [3] sử dụng ma trận độ cứng tuyến tính của dải hữu hạn 2 đường nút của Cheung và xây dựng ma trận độ cứng hình học để phát triển chương trình CUFSM. Chương trình CUFSM cho phép phân tích ổn định đàn hồi tuyến tính của thanh thành mỏng hai đầu liên kết khớp chịu nén hoặc chịu uốn thuần túy hoặc là phối hợp của hai dạng chịu lực trên. Đỗ [4] đã xây dựng ma trận độ cứng hình học của dải hữu hạn 3 đường nút chịu nén đều và viết chương trình DHHB2 để tính toán ổn định đàn hồi của thanh thành mỏng chịu nén đúng tâm. Chu et al. [5] nghiên cứu một trường hợp riêng khi thanh thành mỏng chịu tải trọng đặt tại tâm uốn và phân bố đều theo chiều dài thanh. Tổng quát hơn, Bui [6] đã xây dựng dải hữu hạn 2 đường nút phân tích thanh chịu tải trọng bất kỳ. Phương pháp dải hữu hạn bán giải tích cũng được áp dụng trong phân tích đàn hồi phi tuyến và phân tích đàn dẻo [7,8]. Tuy nhiên trong phân tích phi tuyến, phương pháp này khó kể được sự tương tác giữa sự làm việc cục bộ và sự làm việc tổng thể. Tên gọi phương pháp dải hữu hạn "bán giải tích" xuất phát từ việc sử dụng các hàm điều hòa và để phân biệt với phương pháp dải hữu hạn dùng các hàm spline để mô tả chuyển vị theo phương dọc [9-11].

Dải hữu hạn cũng được xây dựng dựa trên lý thuyết tấm của Mindlin còn được gọi là lý thuyết tấm chịu cắt. Lý thuyết này cho phép kể đến biến dạng cắt theo phương vuông góc với bề dày tấm. Tại mỗi đường nút của dải hữu hạn có 5 bậc tự do, đó là: 3 chuyển vị thẳng và 2 chuyển vị xoay. Với việc sử dụng dải hữu hạn xây dựng theo lý thuyết tấm của Mindlin, Hinton [12] chỉ rõ ảnh hưởng của biến dạng cắt đến ứng suất tới hạn khi phân tích ổn định các tấm dày.

Bài báo nhằm mục đích giới thiệu phương pháp dải hữu hạn bán giải tích trong phân tích ổn định đàn hồi tuyến tính các kết cấu dạng tấm. Ma trận độ cứng và ma trận hình học của dải hữu hạn được xây dựng dựa trên lý thuyết tấm Kirchhoff, biến dạng của Green và nguyên lý cực tiểu hóa thế năng. Trong đó, ma trận độ cứng hình học của dải hữu hạn 3 đường nút chịu ứng suất phân bố tuyến tính là một kết quả nghiên cứu mới cho phép tính toán ổn định của thanh chịu nén, chịu uốn và chịu nén uốn đồng thời. Tác giả xây dựng được một chương trình sử dụng dải hữu hạn 3 đường nút được sử dụng để phân tích ổn định của tấm và của thanh thành mỏng. Chương trình cho kết quả là ứng suất tới hạn, chiều dài nửa bước sóng và các hình ảnh về dạng mất ổn định của kết cấu.

2. Lý thuyết tấm Kirchhoff và biến dạng Green



Hình 2. Các chuyển vị trong lý thuyết tấm Kirchhoff

KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ ỨNG DỤNG

Theo lý thuyết tấm Kirchhoff, các biến dạng ε_x , ε_y và γ_{xy} trong mặt phẳng tấm được xác định theo các công thức sau:

$$\varepsilon_{xL} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_{yL} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xyL} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1)$$

trong đó: u và v là chuyển vị thẳng theo 2 phương x , y ; w là chuyển vị thẳng theo phương vuông góc mặt phẳng tấm. Hệ trục tọa độ x , y nằm trong mặt phẳng trung bình của tấm.

Đây là các công thức quen thuộc khi tính toán tấm trong miền đàn hồi tuyến tính. Để thiết lập các công thức tính toán ổn định, người ta có thể dựa vào các biến dạng tổng quát hơn của Green và khi áp dụng vào lý thuyết tấm Kirchhoff có dạng như sau:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad (4)$$

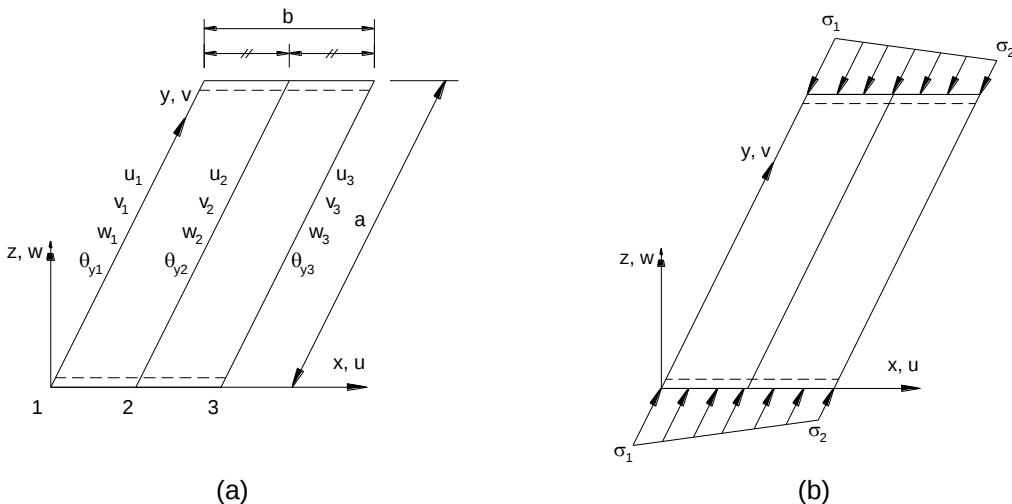
Như vậy, biến dạng Green là tổng của thành phần biến dạng tuyến tính, $\{\varepsilon_L\}$ như trong các công thức (1) và thành phần biến dạng phi tuyến, $\{\varepsilon_{NL}\}$, nằm trong dấu ngoặc vuông của các công thức (2), (3), (4).

Ta có thể viết:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_L\} + \{\varepsilon_{NL}\} \quad \text{với} \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T \quad (5)$$

3. Phân tích ổn định đàn hồi kết cấu dạng tấm bằng phương pháp dải hữu hạn

3.1 Các hàm dạng mô tả chuyển vị của dải hữu hạn



Hình 3. Dải hữu hạn 3 đường nút

Xét dải hữu hạn có hai đầu liên kết khớp với a là chiều dài và b là bề rộng của dải hữu hạn (Hình 3a), ta sẽ xây dựng mô hình dải hữu hạn với 3 đường nút. Các chuyển vị của một điểm có tọa độ (x,y) bất kỳ thuộc dải hữu hạn được xác định bởi các biểu thức sau:

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^r \{H_1 \quad H_2 \quad H_3\} \begin{Bmatrix} u_{1m} \\ u_{2m} \\ u_{3m} \end{Bmatrix} \sin \frac{m\pi y}{a} \quad v(x, y) = \sum_{m=1}^r \{H_1 \quad H_2 \quad H_3\} \begin{Bmatrix} v_{1m} \\ v_{2m} \\ v_{3m} \end{Bmatrix} \cos \frac{m\pi y}{a} \quad (6)$$

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^r \{H_{w1} \quad H_{\theta1} \quad H_{w2} \quad H_{\theta2} \quad H_{w3} \quad H_{\theta3}\} \begin{Bmatrix} w_{1m} \\ \theta_{1m} \\ w_{2m} \\ \theta_{2m} \\ w_{3m} \\ \theta_{3m} \end{Bmatrix} \sin \frac{m\pi y}{a} \quad (7)$$

Như vậy, hàm chuyển vị có dạng chuỗi với r là số các số hạng của chuỗi. Các hàm điều hòa được sử dụng để mô tả theo phương dọc và các hàm đa thức được sử dụng để mô tả theo phương ngang. Các hàm đa thức là các hàm Hermit có biểu thức như sau:

$$H_1(x) = 1 - \frac{3x}{b} + \frac{2x^2}{b^2} \quad H_2(x) = \frac{4x}{b} - \frac{4x^2}{b^2} \quad H_3(x) = -\frac{x}{b} + \frac{2x^2}{b^2} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} H_{w1}(x) &= 1 - 23\frac{x^2}{b^2} + 66\frac{x^3}{b^3} - 68\frac{x^4}{b^4} + 24\frac{x^5}{b^5} & H_{\theta1}(x) &= x \left(1 - 6\frac{x}{b} + 13\frac{x^2}{b^2} - 12\frac{x^3}{b^3} + 4\frac{x^4}{b^4} \right) \\ H_{w2}(x) &= 16\frac{x^2}{b^2} - 32\frac{x^3}{b^3} + 16\frac{x^4}{b^4} & H_{\theta2}(x) &= x \left(-8\frac{x}{b} + 32\frac{x^2}{b^2} - 40\frac{x^3}{b^3} + 16\frac{x^4}{b^4} \right) \\ H_{w3}(x) &= 7\frac{x^2}{b^2} - 34\frac{x^3}{b^3} + 52\frac{x^4}{b^4} - 24\frac{x^5}{b^5} & H_{\theta3}(x) &= x \left(-\frac{x}{b} + 5\frac{x^2}{b^2} - 8\frac{x^3}{b^3} + 4\frac{x^4}{b^4} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

3.2 Hệ phương trình tính toán ổn định

Hệ phương trình trong tính toán ổn định có dạng sau [1]:

$$[K_L] + \lambda[K_G] = 0 \quad (10)$$

trong đó: λ là hệ số trị riêng của tải trọng gây mất ổn định,

$[K_L]$ là ma trận độ cứng tuyến tính, $[K_G]$ là ma trận độ cứng hình học.

3.3 Ma trận độ cứng tuyến tính của dải hữu hạn

Ma trận độ cứng tuyến tính được xác định từ thế năng biến dạng tuyến tính của tấm:

$$U_L = \frac{1}{2} \int_{-t/2}^{t/2} \int_A \{\varepsilon_L\}^T [D] \{\varepsilon_L\} dAdz \quad (11)$$

Biến dạng $\{\varepsilon_L\}$ được xác định khi thay các biểu thức (6) và (7) vào (1):

$$\{\varepsilon_L\} = \sum_{m=1}^r [B_m] \{p_m\} \quad (12)$$

KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ ỨNG DỤNG

Ma trận $[B_m]$ được ghép lại bởi các ma trận thành phần $[B_{im}]$ tương ứng với đường nút i và số hạng m của chuỗi.

$$[B_m] = \begin{bmatrix} [B_{1m}] & [B_{2m}] & [B_{3m}] \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[B_{im}] = \begin{bmatrix} \frac{dH_i}{dx} s_m & 0 & -z \frac{d^2 H_{wi}}{dx^2} s_m & -z \frac{d^2 H_{\theta i}}{dx^2} s_m \\ 0 & -H_i \frac{m\pi}{a} s_m & zH_{wi} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 s_m & zH_{\theta i} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 s_m \\ H_i \frac{m\pi}{a} c_m & \frac{dH_i}{dx} c_m & -2z \frac{dH_{wi}}{dx} \frac{m\pi}{a} c_m & -2z \frac{dH_{\theta i}}{dx} \frac{m\pi}{a} c_m \end{bmatrix} \quad (14)$$

trong đó:

$$s_m = \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) \quad c_m = \cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right) \quad (15)$$

Véc tơ chuyển vị $\{p_m\}$ được ghép lại bởi các véc tơ thành phần $\{p_{im}\}$ tương ứng với đường nút i và số hạng m của chuỗi.

$$\{p_m\}^T = \left\{ \{p_{1m}\}^T \quad \{p_{2m}\}^T \quad \{p_{3m}\}^T \right\} \text{ với } \{p_{im}\}^T = \{u_{im} \quad v_{im} \quad w_{im} \quad \theta_{im}\} \quad (16)$$

Thay (12) vào (11):

$$U_L = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^r [p_m]^T \int_{-t/2}^{t/2} \int_A \{B_m\}^T [D] \{B_n\} dAdz [p_n] \quad (17)$$

Sử dụng tính trực giao:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) dy = 0 \quad \text{và} \quad \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) dy = 0 \quad \text{khi } m \neq n$$

Do vậy, ma trận độ cứng tuyến tính của dải hữu hạn hai đầu liên kết khớp có dạng sau:

$$[k_L] = \begin{bmatrix} [k_{L11}] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [k_{L22}] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [k_{Lrr}] \end{bmatrix} \quad (18)$$

Với:

$$[k_{Lmm}] = \int_{-t/2}^{t/2} \int_A \{B_m\}^T [D] \{B_m\} dAdz = \int_{-t/2}^{t/2} \int_0^a \int_0^b \{B_m\}^T [D] \{B_m\} dx dy dz \quad (19)$$

Ma trận con $[k_{Lmm}]$ được xác định bằng phương pháp tích phân giải tích theo phương y và tích phân số Gauss theo phương x và phương z .

3.4 Ma trận độ cứng hình học của dải hữu hạn

Ma trận độ cứng hình học được xác định từ thể năng biến dạng phi tuyến:

$$U_{NL} = \int_{-t/2}^{t/2} \int_A \{\varepsilon_{NL}\}^T \{\sigma_o\} dA dz \quad (20)$$

Ta chỉ xét ứng suất σ phân bố tuyến tính theo phương y như trên Hình 3b nên có thể bỏ qua các thành phần biến dạng phi tuyến ε_{xNL} và γ_{xyNL} . Công thức (20) được viết lại như sau:

$$U_{NL} = \int_{-t/2}^{t/2} \int_A \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \left[\sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{x}{b} \right] dA dz$$

$$U_{NL} = \frac{t}{2} \int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \left[\sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{x}{b} \right] dA \quad (21)$$

Ta có thể viết:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{matrix} \right\} \quad (22)$$

Để ý đến (6) và (7), ta viết được:

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{matrix} \right\} = \sum_{m=1}^r [G_m] \{p_m\} \quad (23)$$

Ma trận $[G_m]$ được ghép lại bởi các ma trận thành phần $[G_{im}]$ tương ứng đường nút i và số hạng m của chuỗi.

$$[G_m] = \begin{bmatrix} [G_{1m}] & [G_{2m}] & [G_{3m}] \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$[G_{im}] = \begin{bmatrix} H_i \frac{m\pi}{a} c_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -H_i \frac{m\pi}{a} s_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{wi} \frac{m\pi}{a} c_m & H_{\theta i} \frac{m\pi}{a} c_m \end{bmatrix} \quad (25)$$

Thay (23) vào (21), nhận được:

$$U_{NL} = \frac{t}{2} \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^r [p_m]^T \int_A \{G_m\}^T \{G_n\} \left[\sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{x}{b} \right] dA [p_n] \quad (26)$$

KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ ỨNG DỤNG

Tương tự ma trận độ cứng tuyến tính, ma trận độ cứng hình học của dải hữu hạn hai đầu liên kết khớp có dạng sau:

$$[k_G] = \begin{bmatrix} [k_{G11}] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [k_{G22}] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [k_{Grr}] \end{bmatrix} \quad (27)$$

Với:

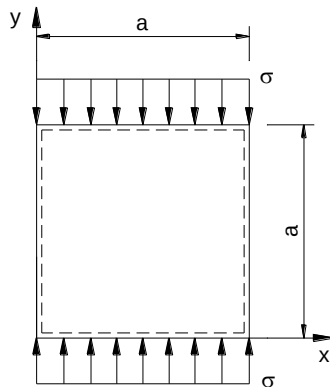
$$[k_{Gmm}] = t \int_A \{G_m\}^T \{G_m\} \left[\sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{x}{b} \right] dA = t \int_0^a \int_0^b \{G_m\}^T \{G_m\} \left[\sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{x}{b} \right] dx dy \quad (28)$$

Ma trận $[k_{Gmm}]$ được xác định bằng phương pháp tích phân giải tích theo phương y và tích phân số Gauss theo phương x.

4. Ví dụ áp dụng

Tác giả xây dựng một chương trình bằng ngôn ngữ Matlab, sử dụng dải hữu hạn 3 đường nút đã trình bày ở trên dùng để phân tích ổn định các kết cấu dạng tấm có tiết diện không đổi, hai đầu liên kết khớp. Cụ thể, chương trình sẽ phân tích ổn định của tấm chịu nén đều và chịu uốn đều trong mặt phẳng tấm, của thanh thành mỏng tiết diện chữ C chịu uốn kết quả được so sánh với lời giải giải tích của Timoshenko [13] và kết quả của chương trình CUFMS sử dụng dải hữu hạn 2 đường nút do Schafer xây dựng [3].

4.1 Ổn định của tấm vuông bốn cạnh liên kết khớp

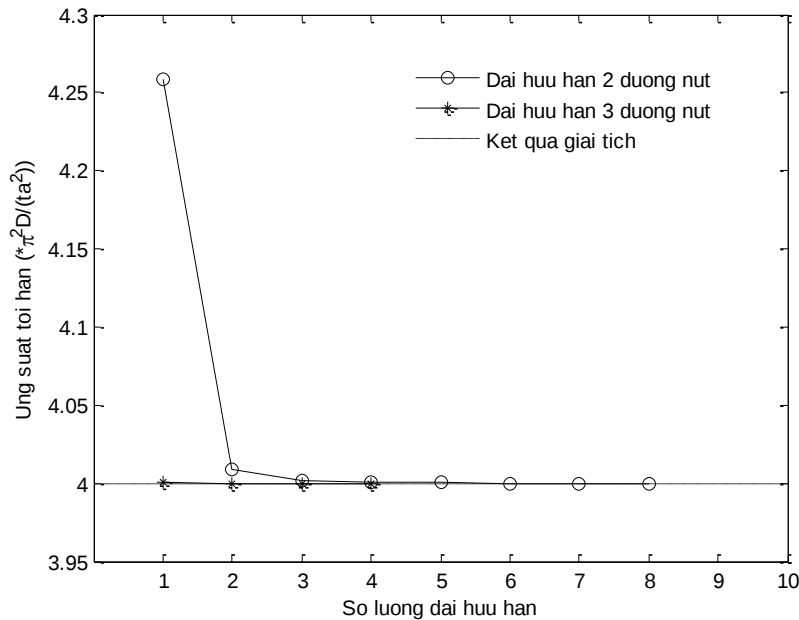


Hình 4. Tấm vuông chịu ứng suất nén đều ($a=300 \text{ mm}$, $t=3 \text{ mm}$, $E=2.06e+05 \text{ N/mm}^2$, $\mu=0.3$)

Cho một tấm thép hình vuông kê bốn cạnh chịu ứng suất nén đều trong mặt phẳng tấm như Hình 4. Các kích thước của tấm và đặc trưng vật liệu cho ở trên. Hình 5 nghiên cứu sự hội tụ: khi số lượng dải hữu hạn dùng để mô phỏng tấm tăng lên giá trị của ứng suất tới hạn làm tấm bị mất ổn định hội tụ đến giá trị chính xác theo công thức dưới đây của Timoshenko [13].

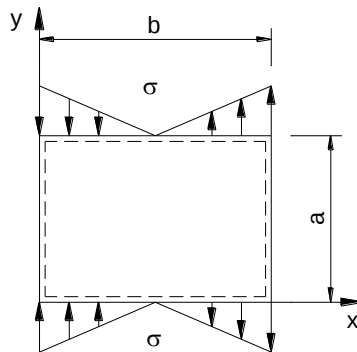
$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{a} \right)^2 = k \frac{\pi^2 D}{ta^2} \text{ với } D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \text{ và } k=4$$

Có 2 loại dải hữu hạn được nghiên cứu đó là: dải hữu hạn 2 đường nút của Schafer [3] và dải hữu hạn 3 đường nút được xây dựng trong bài báo này. Ta nhận thấy rằng tấm cần được chia thành 3 dải hữu hạn 2 đường nút để hội tụ đến giá trị chính xác trong khi nếu sử dụng dải hữu hạn 3 đường nút thì chỉ cần 1 dải hữu hạn.



Hình 5. Sự hội tụ của PP dải hữu hạn khi phân tích ổn định tấm vuông chịu nén đều

4.2 Ổn định của tấm chữ nhật chịu uốn đều trong mặt phẳng tấm



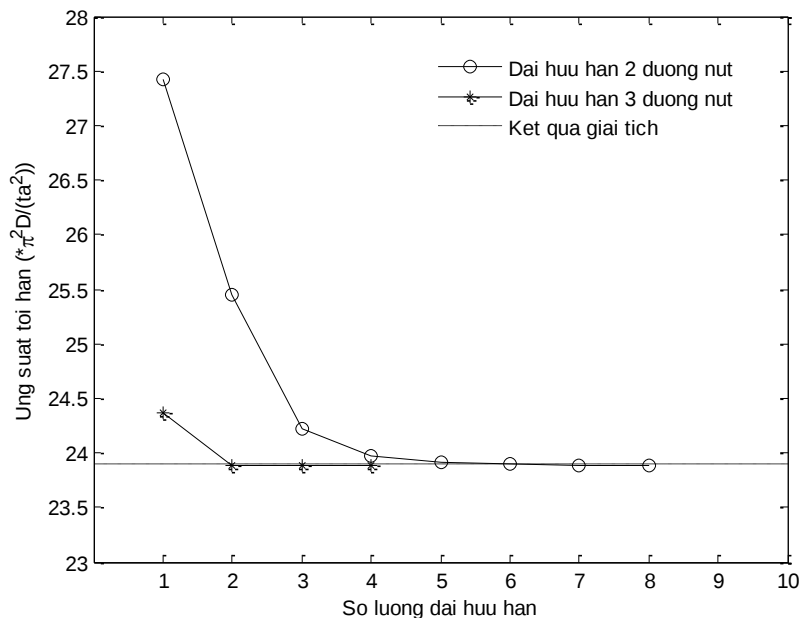
Hình 6. Tấm chữ nhật chịu uốn đều trong mặt phẳng tấm

$$b = 300 \text{ mm}, a = \frac{2}{3} \times 300 = 200 \text{ mm}, t = 3 \text{ mm}, E = 2.06 \times 10^5 \text{ N/mm}^2, \mu = 0.3$$

Ví dụ này nghiên cứu ổn định của tấm chữ nhật kê bốn cạnh chịu uốn đều trong mặt phẳng tấm như Hình 6. Các kích thước của tấm và đặc trưng vật liệu cho ở trên. Hình 7 nghiên cứu sự hội tụ: khi số lượng dải hữu hạn dùng để mô phỏng tấm tăng lên giá trị của ứng suất tới hạn làm tấm bị mất ổn định hội tụ đến giá trị chính xác theo công thức dưới đây của Timoshenko [13].

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 = k \frac{\pi^2 D}{tb^2} \text{ với } D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \text{ và } k=23.9$$

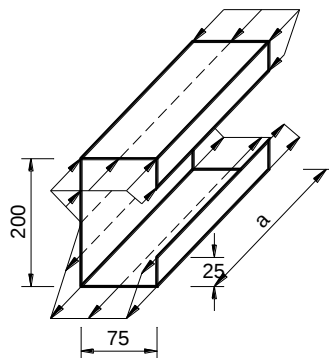
Ta nhận thấy rằng khi sử dụng dải hữu hạn 2 đường nút (Schafer [3]), tấm cần được chia thành 5 dải hữu hạn để hội tụ đến giá trị chính xác trong khi nếu sử dụng dải hữu hạn 3 đường nút thì chỉ cần 2 dải hữu hạn.



Hình 7. Sự hội tụ của PP dải hữu hạn khi phân tích ổn định tấm chữ nhật chịu uốn đều

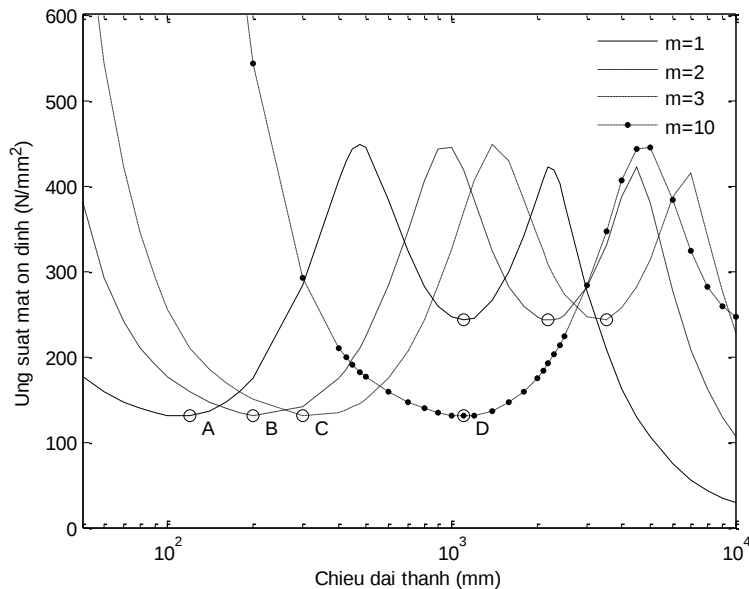
Qua hai ví dụ phân tích ổn định ở trên ta có thể rút ra kết luận: để có kết quả ứng suất tới hạn chính xác, nếu sử dụng dải hữu hạn 2 đường nút phần chịu nén của tấm nên được mô phỏng bởi ít nhất là 3 dải hữu hạn; còn nếu sử dụng dải hữu hạn 3 đường nút phần chịu nén của tấm nên được mô phỏng bởi ít nhất là 1 dải hữu hạn. Nhận xét này sẽ được sử dụng để phân tích ổn định của các thanh thành mỏng trong các ví dụ tiếp theo.

4.3 Ổn định của thanh thành mỏng tiết diện chữ C chịu uốn thuần túy



Hình 8. Mô phỏng thanh thành mỏng tiết diện chữ C chịu uốn thuần túy bởi 10 dải hữu hạn 3 đường nút. ($t = 1 \text{ mm}$, $E = 2.06e + 05 \text{ N/mm}^2$, $\mu = 0.3$)

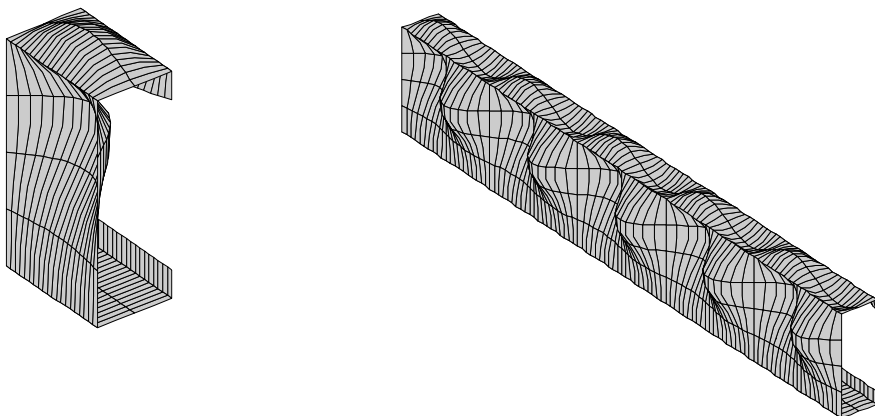
Trong ví dụ này ta phân tích ổn định của thanh thành mỏng tiết diện chữ C với các kích thước và đặc trưng vật liệu cho ở trên. Đầu tiên, việc phân tích được thực hiện với giả thiết thanh bị mất ổn định thành 1 nửa sóng ($m=1$). Ta cho chiều dài thanh thay đổi, với mỗi chiều dài thanh sẽ nhận được một điểm có giá trị ứng suất gây mất ổn định và nối các điểm đó ta sẽ nhận được đường đặc trưng mất ổn định của thanh tương ứng với $m=1$. Thực hiện phân tích tương tự với giả thiết thanh mất ổn định thành 2 nửa sóng ($m=2$), 3 nửa sóng ($m=3$) hay 10 nửa sóng ($m=10$), như thế ta lần lượt nhận được các đường đặc trưng mất ổn định tương ứng với $m=2$, $m=3$ hay $m=10$ như thể hiện trên Hình 9.



Hình 9. Các đường đặc trưng mất ổn định của thanh thành mỏng tiết diện chữ C tương ứng phân tích 1 nửa sóng ($m=1$), 2 nửa sóng ($m=2$), 3 nửa sóng ($m=3$) hay 10 nửa sóng ($m=10$)

Ta nhận thấy rằng các đường đặc trưng có các điểm cực tiểu (A, B, C, D), các điểm đó cho cùng một giá trị ứng suất tới hạn (mất ổn định cục bộ), $\sigma = 130.9 \text{ N/mm}^2$. Điểm A ứng với chiều dài thanh $a=120\text{mm}$ chính là chiều dài 1 nửa sóng, điểm B ứng với chiều dài thanh $a=240\text{mm}$ là chiều dài 2 nửa sóng, điểm C ứng với chiều dài thanh $a=360\text{mm}$ là chiều dài 3 nửa sóng và điểm D ứng với chiều dài thanh $a=1200\text{mm}$ là chiều dài 10 nửa sóng. Hình 10 cho hình ảnh trực quan về mất ổn định cục bộ của thanh tương ứng với các điểm A, D.

Như vậy, để xác định ứng suất tới hạn và chiều dài nửa sóng tương ứng ta chỉ cần phân tích ổn định với 1 nửa sóng ($m=1$) mà không cần thiết phải thực hiện với nhiều nửa sóng.

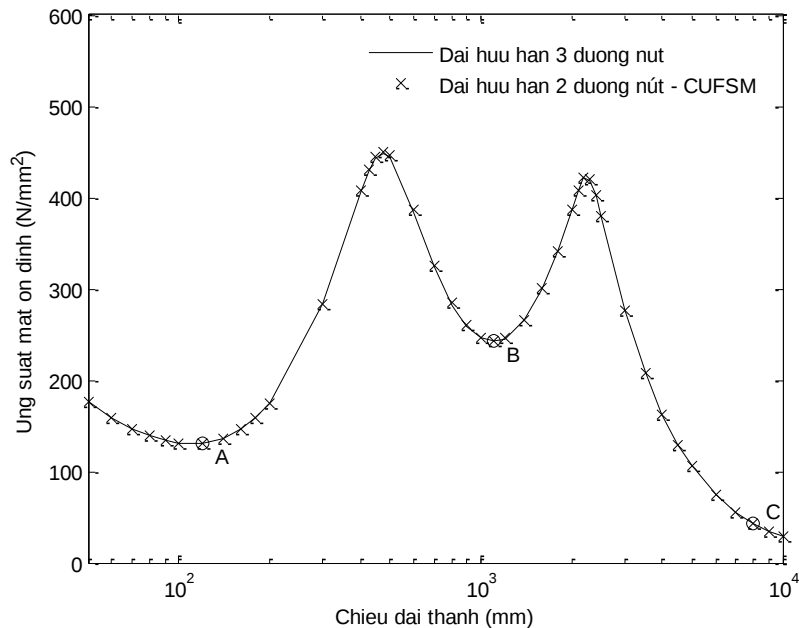


Điểm A: $m=1$, $a=120\text{mm}$; $\sigma = 130.9 \text{ N/mm}^2$

Điểm D: $m=10$, $a=1200\text{mm}$, $\sigma = 130.9 \text{ N/mm}^2$

Hình 10. Hình ảnh mất ổn định cục bộ của thanh thành mỏng tiết diện chữ C.

Các hiện tượng mất ổn định của thanh thành mỏng tiết diện chữ C

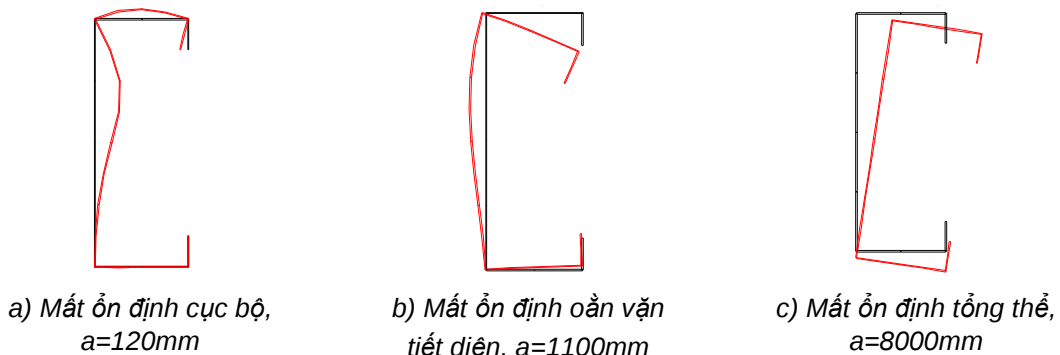


Hình 11. Đường cong mất ổn định đặc trưng

Hình 11 thể hiện đường đặc trưng mất ổn định của thanh thành mỏng tiết diện chữ C chịu uốn thuần túy. Kết quả phân tích bởi dải hữu hạn 3 đường nút xây dựng trong bài báo trùng với kết quả của chương trình sử dụng dải hữu hạn 2 đường nút CUFSM (Schafer [3]).

Ta thấy có 3 dạng mất ổn định có thể gặp đối với thanh thành mỏng tiết diện chữ C chịu uốn thuần túy (Hình 12), đó là: mất ổn định cục bộ (điểm A), mất ổn định oằn vắn tiết diện (điểm B) và mất ổn định tổng thể (điểm C). Trong đó, mất ổn định cục bộ và mất ổn định tổng thể xoắn uốn là các dạng mất ổn định quen thuộc đã được nghiên cứu nhiều còn mất ổn định oằn vắn tiết diện ít được biết đến hơn. Mất ổn định cục bộ với đặc trưng là chiều dài nửa bước sóng xấp xỉ bề rộng của thành mỏng, mất ổn định tổng thể có chiều dài nửa bước sóng lớn nhất còn mất ổn định oằn vắn tiết diện có chiều dài nửa bước sóng nằm trung gian giữa hai dạng mất ổn định trên (bằng vài lần bề rộng thành mỏng).

Đường đặc trưng mất ổn định cho ta một cái nhìn tổng thể về sự làm việc ổn định của thanh, biết được các dạng mất ổn định có thể có của thanh. Ví dụ: khi thanh dài 3m, mất ổn định cục bộ và mất ổn định oằn vắn tiết diện sẽ xảy ra trước còn khi thanh dài 8m, mất ổn định tổng thể sẽ xảy ra trước.



Hình 12. Các dạng mất ổn định của thanh thành mỏng tiết diện chữ C chịu nén đúng tâm

5. Kết luận

Phương pháp dải hữu hạn bán giải tích đã chứng tỏ hiệu quả qua việc mô phỏng đơn giản và tính toán ổn định nhanh các thanh thành mỏng có tiết diện không đổi. Phương pháp dải hữu hạn cũng cho phép thiết lập đường đặc trưng mất ổn định của thanh thành mỏng, từ đó cho ta một cái nhìn tổng thể về sự làm việc ổn định của thanh. Tuy nhiên, hạn chế của phương pháp dải hữu hạn là chỉ phân tích được các thanh có tiết diện không đổi và chỉ áp dụng được với một số dạng liên kết ở hai đầu thanh (đặc biệt hiệu quả khi hai đầu thanh là liên kết khớp).

Dải hữu hạn 3 đường nút chịu ứng suất phân bố tuyến tính đã được xây dựng trong bài báo cho phép tính toán ổn định của tấm, của thanh thành mỏng chịu nén, chịu uốn và chịu nén uốn kết hợp. Dải hữu hạn 3 đường nút có ưu điểm so với dải hữu hạn 2 đường nút là cho phép thanh thành mỏng được mô phỏng với số lượng dải hữu hạn ít hơn mà vẫn đạt được độ chính xác cao trong phân tích ổn định của thanh thành mỏng.

Tài liệu tham khảo

1. Cheung, Y. K. (1976), *Finite strip method in structural analysis*, Pergamon Press, New York.
2. Hancock, G. J (1978), "Local distortional and lateral buckling of I-beams", *Jour. Struct. Div., ASCE*, 104(ST11), pp. 1787-1798.
3. Schafer, B. W. (1997), *Cold-formed steel behaviour and design: analytical and numerical modelling of elements and members with longitudinal stiffness*, Ph.D. dissertation, Cornell University, Ithaca, New York.
4. Đỗ Văn Bình (2004), *Phân tích ổn định kết cấu thành mỏng bằng phương pháp dải hữu hạn*. Luận án tiến sĩ kỹ thuật, trường Đại học Xây dựng, Hà Nội.
5. CHU, X.T., YE, Z.M., KETTLE, R. and LI, L.Y. (2005), "Buckling behaviour of cold-formed channel sections under uniformly distributed loads", *Thin-walled Structures*, 43, pp. 531-542.
6. Bui, H. C. (2009), "Buckling analysis of thin-walled sections under general loading conditions", *Thin-walled Struct*, 47(6-7), pp. 730-739.
7. Key, P. W. and Hancock, G. J. (1993), "A finite strip method for the elastic-plastic large displacement analysis of thin-walled and cold-formed steel sections", *Thin-walled Struct*, 16, pp. 3-29.
8. Key, P. W. and Hancock, G. J. (1993), "A theoretical investigation of the column behaviour of cold-formed square hollow sections", *Thin-walled Struct*, 16(1), pp. 31-64.
9. Fan, S. C. and Cheung, Y. K. (1983), "Analysis of shallow shells by spline finite strip method", *Eng. Struct.*, 5, pp. 255-262.
10. Kwon, Y. B. and Hancock, G. J. (1991), "A nonlinear elastic spline finite strip analysis for thin-walled sections", *Thin-walled Structures*, 12, pp. 295-319.
11. Kong, J. and Cheung, Y. K. (1995), "A generalized spline finite strip for the analysis of plates", *Thin-walled Structures*, 22, pp. 181-202.
12. Hinton, E. (1978), "Buckling of initially stressed Mindlin plates using a finite strip method", *Comput. & Struct*, 8, pp. 99-105.
13. Timoshenko, S and Gere, J. M. (1961). *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill, New York.