



PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC PHI TUYẾN CỦA PANEL TRỤ CÓ GÂN GIA CƯỜNG BẰNG VẬT LIỆU CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN DƯỚI TÁC DỤNG CỦA LỰC KHÍ ĐỘNG

Phạm Thị Toan^{1*}

Tóm tắt: Trên cơ sở lý thuyết vỏ Donnell, có kể đến thành phần biến dạng phi tuyến hình học von Kármán và kỹ thuật san đều tác dụng gân, các phương trình chuyển động của panel trụ bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) có gân gia cường với dòng khí chuyển động vượt âm đã được thiết lập trong bài báo này. Đối tượng nghiên cứu là tìm số Mach tới hạn của dòng khí làm cho vỏ mất ổn định khi thay đổi các tham số hình học của vỏ và chỉ số tỷ lệ thể tích các vật liệu thành phần. Tiêu chuẩn ổn định động lực phi tuyến của vỏ được áp dụng theo Budiansky-Roth để xác định lực tới hạn động. Kết quả số chỉ ra ảnh hưởng của các tham số hình học, các tính chất vật liệu và điều kiện đầu đến các đặc trưng động lực phi tuyến của panel trụ FGM.

Từ khóa: Panel trụ; vật liệu FGM; hiện tượng tự dao động.

Nonlinear dynamical analysis of eccentrically stiffened functionally graded cylindrical panels shell under aerodynamic load

Abstract: Based on the shell theory Donnell, taking into account the strains components of the geometrical nonlinearity in von Karman sense and the smeared stiffeners technique, the governing equations of motion of cylindrical panel by eccentrically stiffened functionally graded material (FGM) with the moving hypersonic airflow are established in this paper. The research target is to find out critical Mach numbers of airflow, which made the shell unstable when geometrical parameters of shell and volume fraction index of the constituent material are varied. The nonlinear dynamic buckling of loads are found according to the criterion suggested by Budiansky-Roth for defined dynamic critical forces. Numerical results show the influences of geometrical parameters, the material properties and initial conditions to the nonlinear flutter characteristics of FGM cylindrical shell.

Keywords: Cylindrical panel; FGM material; flutter.

Nhận ngày 10/8/2017; sửa xong 8/9/2017; chấp nhận đăng 26/9/2017

Received: August 10th, 2017; revised: September 8th, 2017; accepted: September 26th, 2017



1. Lời giới thiệu

Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) được nghiên cứu đầu tiên bởi một nhóm các nhà khoa học vật liệu của Nhật vào năm 1984 [1]. Có nhiều loại vật liệu cơ tính biến thiên nhưng loại được dùng phổ biến nhất hiện nay là loại hai thành phần được tạo nên từ gốm và kim loại biến đổi một cách trơn và liên tục từ mặt này sang mặt kia theo chiều dày thành kết cấu. Vật liệu FGM thường được sử dụng trong các kết cấu chịu nhiệt như các cấu kiện cơ bản trong máy bay và lò phản ứng hạt nhân [2].

Đối với phân tích động lực của vỏ FGM, có nhiều nghiên cứu tập trung vào các đặc trưng dao động của vỏ. Huang và Han [3] đã trình bày bài toán ổn định động lực phi tuyến của vỏ trụ là vật liệu có cơ tính biến thiên chịu tác dụng của tải trọng dọc trục phụ thuộc thời gian bằng cách sử dụng tiêu chuẩn ổn định động lực của Budiansky - Roth. Bích và cộng sự [4] đã tiến hành phân tích động lực học panel trụ FGM có gân gia cường chịu tác dụng của tải trọng động. Liew và cộng sự [5] đã trình bày các phân tích dao động phi tuyến cho panel trụ nhiều lớp của vật liệu FGM và chịu tác dụng của gradien nhiệt dọc theo chiều dày của panel.

Đối với vỏ thoải FGM, Alijani và cộng sự [6], Chorfi và Houmat [7] và Masunaga [8] đã nghiên cứu dao động phi tuyến chịu tải của vật liệu FGM của vỏ thoải hai độ cong. Phân tích động lực phi tuyến của

¹TS, Trường Đại học Giao thông vận tải.

*Tác giả chính. E-mail: phamthitoan155@yahoo.com.

của vỏ thoải FGM không hoàn hảo chịu tải trọng nén trục và tải trọng ngang đã được nghiên cứu bởi Bích và Long [9], Dũng và Nam [10]. Các phương trình chuyển vị, ổn định và tương thích biến dạng của các cấu trúc đều sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển. Các đáp ứng tức thời phi tuyến của vỏ trụ và vỏ thoải hai độ cong chịu kích động của tải trọng ngoài đã đạt được và các tải trọng ổn định tiêu chuẩn động lực đã được đánh giá trên cơ sở các đáp ứng chuyển vị bằng cách sử dụng tiêu chuẩn ổn định động lực Budiansky-Roth [11].

Tuy nhiên có rất ít nghiên cứu về các bài toán động lực phi tuyến của vỏ FGM có gia cường gân. Gần đây, Najafizadeh và cộng sự [12] đã nghiên cứu ứng xử động lực tĩnh của vỏ trụ FGM. Bích và cộng sự [13] đã nghiên cứu sau ổn định tĩnh phi tuyến của tấm và vỏ thoải FGM có gia cường gân lệch tâm.

Tải trọng khí động lực được xét đến khi tính toán kết cấu của các thiết bị bay và kết cấu của các công trình có độ cao hoặc chiều dài lớn như nhà cao tầng, cầu dây văng, tháp ăng ten. Quân và cộng sự [14] đã nghiên cứu dao động của vỏ thoải mỏng FGM hai độ cong trên nền đàn hồi bằng cách sử dụng lý thuyết khí động lực phi tuyến Ilyushin. Trong [15], Trần Thế Văn đã nghiên cứu ổn định của tấm composite lớp chịu tải trọng khí động bằng phương pháp phần tử hữu hạn sử dụng lý thuyết Piston.

Chen và cộng sự [16] đã nghiên cứu bài toán dạng tự dao động uốn xoắn kết hợp với sự rung của cầu dây văng có nhịp chính lớn dưới tác dụng của dòng khí bị nhiễu, sử dụng mô hình lực khí động phi tuyến. Tác giả Nguyễn Đăng Bích, Nguyễn Võ Thông [17] đã khảo sát điều kiện ổn định khí động của công trình theo mô hình khí động lực thực nghiệm là một hàm bậc hai với dịch chuyển, kết quả đã chỉ ra điều kiện ổn định của hiện tượng tự dao động không chỉ phụ thuộc vào vận tốc gió mà còn phụ thuộc vào độ lệch ban đầu. Harry và Homer [18] đã sử dụng lý thuyết Piston phi tuyến để xác định hiện tượng tự dao động của cánh máy bay hình chữ nhật với tốc độ bay lớn, kết quả thực nghiệm tại các số Mach $M = 3$ và $M = 6,86$ phù hợp với kết quả tính toán lý thuyết. Ebraheem Al-Qassar [19] đã tính toán hiện tượng tự dao động uốn xoắn cánh máy bay, sử dụng mô hình lực khí động theo lý thuyết Piston phi tuyến để tính toán và xác định ranh giới hiện tượng tự dao động ở các chế độ bay khác nhau tương ứng với các số Mach. Mc Namara và cộng sự [20] đã nghiên cứu ứng xử khí động của cánh thiết bị bay trong chế độ bay siêu âm, sử dụng mô hình lực khí động theo lý thuyết Piston, có xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng nhiệt.

Trong bài báo này tác giả tiến hành phân tích động lực của panel trụ FGM có gân gia cường dưới tác dụng của tải trọng khí động bằng cách sử dụng lý thuyết Piston.



2. Panel trụ mỏng FGM có gân gia cường lệch tâm dưới tác dụng của lực khí động

2.1 Vật liệu FGM

Vật liệu có cơ tính biến thiên trong bài báo này, được giả thiết được làm từ hỗn hợp của ceramic (gốm) và kim loại với tỷ lệ thể tích của vật liệu thành phần được cho theo qui luật hỗn hợp:

$$V_m(z) + V_c(z) = 1, V_m(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (1)$$

trong đó: h là chiều dày của panel; $k \geq 0$ là chỉ số tỷ lệ thể tích các vật liệu thành phần; z là tọa độ chiều dày $\left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right)$; Các chỉ số dưới c và m để chỉ thành phần gốm và kim loại tương ứng. Theo quy luật hỗn hợp, mô đun Young và mật độ khối có thể biểu diễn dưới dạng:

$$E(z) = E_m V_m + E_c V_c = E_c + (E_m - E_c) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (2)$$

$$\rho(z) = \rho_m V_m + \rho_c V_c = \rho_c + (\rho_m - \rho_c) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k$$

hệ số Poisson ν được giả thiết hằng số.

2.2 Các hệ thức liên hệ ứng suất - biến dạng của panel trụ FGM

Xét panel trụ mỏng với độ dày h , bán kính mặt giữa là R và chiều dài các cạnh trong mặt phẳng chiếu lần lượt là a và b . Giả thiết hình chiếu của vỏ trên mặt phẳng có dạng hình chữ nhật hoặc hình vuông. Mặt phẳng trung bình của vỏ nói chung được xác định trong hệ tọa độ cong, tuy nhiên đối với vỏ trụ có thể thay thế hệ tọa độ cong bằng hệ tọa độ Descartes với x_1 và x_2 nằm trong mặt trung bình của vỏ còn trục z vuông góc với mặt giữa vỏ trụ, có chiều dương hướng vào phía trong (Hình 1). Giả thiết vỏ được gia cường bởi hệ gân thuần nhất lệch tâm, các gân trục giao nhau, kích thước nhỏ, được đặt cách đều nhau, mặt cắt ngang của gân là chữ nhật không đổi. Gân được giả thiết là mảnh, mau, được bố trí ở mặt dưới của panel trụ.

Theo lý thuyết vỏ Donnell và tính phi tuyến hình học von Kármán, các thành phần biến dạng tại mặt giữa và độ cong, độ xoắn của panel trụ liên hệ qua các thành phần chuyển vị u , v và w như sau [13]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2, & \chi_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\ \varepsilon_2^0 &= \frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{1}{R} w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2, & \chi_2 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\ \gamma_{12}^0 &= \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2}, & \chi_{12} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Các thành phần biến dạng tại điểm cách mặt giữa một khoảng z được xác định bởi:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 - z\chi_1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 - z\chi_2, \quad \gamma_{12} = \gamma_{12}^0 - 2z\chi_{12} \quad (4)$$

Từ (4) nhận được phương trình tương thích biến dạng của vỏ như sau:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1^0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2^0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{12}^0}{\partial x_1 \partial x_2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \quad (5)$$

Quan hệ ứng suất và biến dạng theo định luật Hooke:

- Đối với vỏ:

$$\sigma_1^v = \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad \sigma_2^v = \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad \tau_{12}^v = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \gamma_{12} \quad (6a)$$

- Đối với gân:

$$\sigma_1^g = E_0 \varepsilon_1; \quad \sigma_2^g = E_0 \varepsilon_2 \quad (6b)$$

trong đó: E_0 là mô đun Young của gân.

Trong bài báo này chọn gân là kim loại nên $E_0 = E_m$.

Để tính đến vai trò của gân ta sử dụng phương pháp san đều tác dụng gân của Lekhnitskii [23] và bỏ qua tác dụng xoắn của gân. Như đã nói ở trên, các gân được giả thiết có kích thước nhỏ, đặt mau và mảnh nên hoàn toàn có thể áp dụng phương pháp san đều tác dụng gân. Tích phân các biểu thức định nghĩa của nội lực màng và mô men, ta nhận được biểu thức cho nội lực và mô men của vỏ như sau [4]:

$$\begin{aligned} N_1 &= \left(A_{11} + \frac{E_0 A_1}{s_1} \right) \varepsilon_1^0 + A_{11} \varepsilon_2^0 - (B_{11} + C_1) \chi_1 - B_{12} \chi_2 \\ N_2 &= \left(A_{22} + \frac{E_0 A_2}{s_2} \right) \varepsilon_2^0 + A_{12} \varepsilon_1^0 - (B_{22} + C_1) \chi_2 - B_{12} \chi_1 \end{aligned} \quad (7)$$

$$N_{12} = A_{66} \gamma_{12}^0 - 2B_{66} \chi_{12}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= (B_{11} + C_1) \varepsilon_1^0 + B_{12} \varepsilon_2^0 - \left(D_{11} + \frac{E_0 I_1}{s_1} \right) \chi_1 - D_{12} \chi_2 \\ M_2 &= (B_{22} + C_2) \varepsilon_2^0 + B_{12} \varepsilon_1^0 - \left(D_{22} + \frac{E_0 I_2}{s_2} \right) \chi_1 - D_{12} \chi_1 \end{aligned} \quad (8)$$

$$M_{12} = B_{66} \gamma_{12}^0 - 2D_{66} \chi_{12}$$

trong đó:

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{22} = \frac{E_1}{1-\nu^2}; \quad A_{12} = \frac{E_1 \nu}{1-\nu^2}; \quad A_{66} = \frac{E_1}{2(1+\nu)} \\ B_{11} &= B_{22} = \frac{E_2}{1-\nu^2}; \quad B_{12} = \frac{E_2 \nu}{1-\nu^2}; \quad B_{66} = \frac{E_2}{2(1+\nu)} \\ D_{11} &= D_{22} = \frac{E_3}{1-\nu^2}; \quad D_{12} = \frac{E_3 \nu}{1-\nu^2}; \quad D_{66} = \frac{E_3}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (9)$$

với:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \left[E_c + \frac{E_m - E_c}{k+1} \right] h, \quad E_2 = \frac{(E_m - E_c)kh^2}{2(k+1)(k+2)} \\
 E_3 &= \left[\frac{E_c}{12} + (E_m - E_c) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4} \right) \right] h^3 \\
 I_1 &= \frac{d_1 h_1^3}{12} + A_1 z_1^2, \quad I_2 = \frac{d_2 h_2^3}{12} + A_2 z_2^2 \\
 C_1 &= \frac{E_0 A_1 z_1}{s_1}, \quad C_2 = \frac{E_0 A_2 z_2}{s_2}, \quad z_1 = \frac{h_1 + h}{2}, \quad z_2 = \frac{h_2 + h}{2}
 \end{aligned} \quad (10)$$

trong đó: s_1, s_2 là khoảng cách giữa hai gân dọc và ngang liên tiếp; h_1, h_2 là chiều cao của gân; A_1, A_2 là diện tích mặt cách ngang của gân; d_1, d_2 là chiều dài của gân (Hình 1).

Từ (7) biểu diễn ngược lại, ta có:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^0 &= A_{22}^* N_1 - A_{12}^* N_2 + B_{11}^* \chi_1 + B_{12}^* \chi_2 \\
 \varepsilon_2^0 &= A_{11}^* N_2 - A_{12}^* N_1 + B_{21}^* \chi_1 + B_{22}^* \chi_2 \\
 \gamma_{12}^0 &= A_{66}^* N_{12} + 2B_{66}^* \chi_{12}
 \end{aligned} \quad (11)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
 A_{11}^* &= \frac{1}{\Delta} \left(A_{11} + \frac{E_0 A_1}{s_1} \right), \quad A_{22}^* = \frac{1}{\Delta} \left(A_{22} + \frac{E_0 A_2}{s_2} \right), \quad A_{12}^* = \frac{A_{12}}{\Delta}, \quad A_{66}^* = \frac{1}{A_{66}} \\
 \Delta &= \left(A_{11} + \frac{E_0 A_1}{s_1} \right) \left(A_{22} + \frac{E_0 A_2}{s_2} \right) - A_{12}^2, \quad B_{66}^* = \frac{B_{66}}{A_{66}}
 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 B_{11}^* &= A_{22}^* (B_{11} + C_1) - A_{12}^* B_{12}, \quad B_{21}^* = A_{11}^* B_{12} - A_{12}^* (B_{11} + C_1) \\
 B_{22}^* &= A_{11}^* (B_{22} + C_2) - A_{12}^* B_{12}, \quad B_{12}^* = A_{22}^* B_{12} - A_{12}^* (B_{22} + C_2)
 \end{aligned}$$

Thay thế (11) vào (8) ta nhận được:

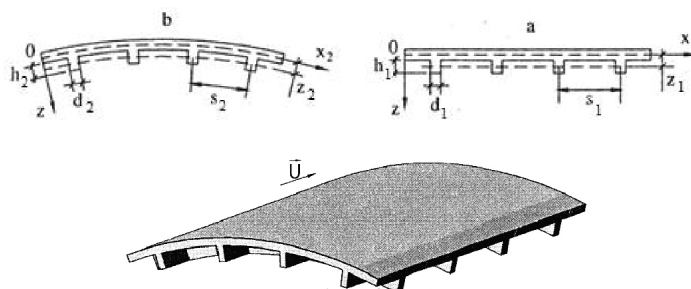
$$\begin{aligned}
 M_1 &= B_{11}^* N_1 + B_{21}^* N_2 - D_{11}^* \chi_1 - D_{12}^* \chi_2, \quad M_2 = B_{12}^* N_1 + B_{22}^* N_2 - D_{21}^* \chi_1 - D_{22}^* \chi_2 \\
 M_{12} &= B_{66}^* N_{12} - 2D_{66}^* \chi_{12}
 \end{aligned} \quad (13)$$

Ở đây:

$$\begin{aligned}
 D_{11}^* &= D_{11} + \frac{E_0 I_1}{s_1} - (B_{11} + C_1) B_{11}^* - B_{12} B_{21}^* \\
 D_{22}^* &= D_{22} + \frac{E_0 I_2}{s_2} - B_{12} B_{12}^* - (B_{22} + C_2) B_{22}^*, \quad D_{12}^* = D_{12} - (B_{11} + C_1) B_{12}^* - B_{12} B_{22}^* \\
 D_{21}^* &= D_{12} - B_{12} B_{11}^* - (B_{22} + C_2) B_{21}^*, \quad D_{66}^* = D_{66} - B_{66} B_{66}^*
 \end{aligned} \quad (14)$$

2.3 Các phương trình cơ bản của panel trụ FGM chịu tải trọng khí động

Giả thiết panel trụ FGM nằm dọc theo luồng khí chuyển động với vận tốc vượt âm $\bar{U}$



Hình 1. Gân dọc và gân ngang của panel trụ

Dòng khí tác dụng lên mặt của vỏ áp lực q_0 hướng theo pháp tuyến của mặt vỏ.

Phương trình chuyển động của vỏ có dạng [13]:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} = \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = \rho_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{N_2}{R} + q_0 = \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (17)$$

trong đó:

$$\rho_1 = \left(\rho_c + \frac{\rho_m - \rho_c}{k+1} \right) h + \rho_0 \left(\frac{A_1}{s_1} + \frac{A_2}{s_2} \right) \quad (18)$$

Ở đây $\rho_o = \rho_m$ cho gân là thép, $\rho_o = \rho_c$ cho gân là ceramic.

Theo lý thuyết Piston phi tuyến bậc hai, lực khí động xác định theo công thức [15]:

$$q_0 = -\gamma P_\infty \left[\left(M \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{1}{a_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{(\gamma+1)}{4} \left(M \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{1}{a_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (19)$$

trong đó: γ là tỷ số nhiệt dung của chất khí; a_∞ là vận tốc âm; P_∞ là áp suất khí chưa bị nhiễu; M là số Mach; $M = \frac{U}{a_\infty}$, U là vận tốc dòng khí. Do dòng khí tác động ở phía vỏ ngoài của panel trụ, gân gia cường ở phía trong nên vận tốc gió không ảnh hưởng đến vai trò của gân. Vì vậy hoàn toàn có thể áp dụng lý thuyết Piston vào tính toán.

Sử dụng giả thiết Volmir, $\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow 0, \rho_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \rightarrow 0$, vì $u \ll w, v \ll w$, hai phương trình (15,16) thỏa mãn đồng nhất khi ta đưa vào hàm ứng suất φ sao cho:

$$N_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}, N_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, N_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (20)$$

Phương trình (17) đưa về dạng:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2 N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{N_2}{R} + q_0 = \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (21)$$

Thay (11) vào phương trình (5) và sử dụng (20) đưa phương trình tương thích về:

$$A_{11}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} + (A_{66}^* - 2A_{12}^*) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + A_{22}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} + B_{21}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + B_{12}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \quad (22)$$

Thay (13) vào phương trình (18) và sử dụng (20) ta có phương trình chuyển động:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^4} + D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + (D_{12}^* + D_{21}^* + 4D_{66}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} - B_{21}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} - (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - B_{12}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = q_0 \quad (23)$$

Các phương trình (22,23) chứa 2 ẩn φ và w dưới tác dụng của lực khí động được sử dụng nghiên cứu dao động phi tuyến và ổn định động lực của panel trụ FGM.



3. Phân tích động lực phi tuyến của panel trụ FGM

Giả thiết panel trụ tựa đơn ở các cạnh, điều kiện biên có dạng:

$$w=0, M_1=0, N_1=0, N_{12}=0 \text{ tại } x_1=0 \text{ và } x_1=a \quad (24)$$

$$w=0, M_2=0, N_2=0, N_{12}=0 \text{ tại } x_2=0 \text{ và } x_2=b$$



Điều kiện (24) thỏa mãn nếu ta đặt nghiệm như sau [14]:

$$w = f_1(t) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} + f_2(t) \sin \frac{(m+1)\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} \quad (25)$$

Thay (25) vào phương trình (22), và giải phương trình này ta xác định hàm ứng suất φ như sau:

$$\begin{aligned} \varphi = & \varphi_1 \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} + \varphi_2 \sin \frac{(m+1)\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} + \varphi_3 \cos \frac{2n\pi x_2}{b} + \varphi_4 \cos \frac{2m\pi x_1}{a} + \varphi_5 \cos \frac{2(m+1)\pi x_1}{a} \\ & + \varphi_6 \cos \frac{(2m+1)\pi x_1}{a} + \varphi_7 \cos \frac{\pi x_1}{a} + \varphi_8 \cos \frac{2n\pi x_2}{b} \cos \frac{(2m+1)\pi x_1}{a} + \varphi_9 \cos \frac{2n\pi x_2}{b} \cos \frac{\pi x_1}{a} \end{aligned} \quad (26)$$

ở đây ký hiệu

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{a}{b}, \quad \varphi_1 = \frac{-f_1 B_m}{A_m}, \quad \varphi_2 = \frac{-f_2 B_{m+1}}{A_{m+1}}, \quad \varphi_3 = \frac{f_1^2 m^2 + f_2^2 (m+1)^2}{32 A_{22}^* n^2 \lambda^2}, \\ \varphi_4 &= \frac{f_1^2 n^2 \lambda^2}{32 m^2 A_{11}^*}, \quad \varphi_5 = \frac{f_2^2 n^2 \lambda^2}{32 (m+1)^2 A_{11}^*}, \quad \varphi_6 = \frac{n^2 \lambda^2 f_1 f_2}{4 (2m+1)^2 A_{11}^*}, \\ \varphi_7 &= \frac{-n^2 \lambda^2 f_1 f_2}{4 A_{11}^*}, \quad \varphi_8 = \frac{-n^2 \lambda^2 f_1 f_2}{4 A_{2m+1}}, \quad \varphi_9 = \frac{n^2 (2m+1)^2 \lambda^2 f_1 f_2}{4 A_n} \\ A_m &= A_{11}^* m^4 + (A_{66}^* - 2A_{12}^*) m^2 n^2 \lambda^2 + A_{22}^* n^4 \lambda^4 \\ A_{m+1} &= (m+1)^4 A_{11}^* + (A_{66}^* - 2A_{12}^*) (m+1)^2 n^2 \lambda^2 + A_{22}^* n^4 \lambda^4 \\ A_{2m+1} &= (2m+1)^4 A_{11}^* + (A_{66}^* - 2A_{12}^*) (2m+1)^2 n^2 \lambda^2 + A_{22}^* n^4 \lambda^4 \\ A_n &= A_{11}^* + 4(A_{66}^* - 2A_{12}^*) n^2 \lambda^2 + 16 A_{22}^* n^4 \lambda^4 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} B_n &= B_{21}^* + (B_{11}^* + B_{22}^* - B_{66}^*) 4n^2 \lambda^2 + B_{12}^* 16n^4 \lambda^4 - \frac{a^2}{R\pi^2} \\ B_m &= B_{21}^* m^4 + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) m^2 n^2 \lambda^2 + B_{12}^* n^4 \lambda^4 - \frac{m^2 a^2}{R\pi^2} \\ B_{m+1} &= B_{21}^* (m+1)^4 + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) (m+1)^2 n^2 \lambda^2 + B_{12}^* n^4 \lambda^4 - \frac{(m+1)^2 a^2}{R\pi^2} \\ B_{2m+1} &= B_{21}^* (2m+1)^4 + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) (2m+1)^2 n^2 \lambda^2 + B_{12}^* n^4 \lambda^4 - \frac{(2m+1)^2 a^2}{R\pi^2} \\ D_{m+1} &= D_{11}^* (m+1)^4 + (D_{12}^* + D_{21}^* + 4D_{66}^*) (m+1)^2 n^2 \lambda^2 + D_{22}^* n^4 \lambda^4 \\ D_m &= D_{11}^* m^4 + (D_{12}^* + D_{21}^* + 4D_{66}^*) m^2 n^2 \lambda^2 + D_{22}^* n^4 \lambda^4 \end{aligned}$$

Thay thế các biểu thức (25,26) vào phương trình (23) và áp dụng phương pháp Galerkin, ta được hệ phương trình với m chẵn và lẻ.

Hệ phương trình với m lẻ:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{a^4}{\pi^4} \ddot{f}_1 + \left(D_m + \frac{B_m^*}{A_m} \right) + \gamma P_\infty \frac{a^4}{\pi^4} \left[-\frac{4Mm(m+1)}{a(2m+1)} f_2 + \frac{\dot{f}_1}{a_\infty} \right] + \frac{f_1^3}{16} \left[\frac{m^4}{A_{22}^*} + \frac{n^4 \lambda^4}{A_{11}^*} \right] \\ + f_1 f_2^2 \left[\frac{n^4 \lambda^4}{4A_{11}^*} + \frac{m^2 (m+1)^2}{16A_{22}^*} + \frac{n^4 \lambda^4}{16A_{2m+1}} + \frac{n^4 \lambda^4 (2m+1)^4}{16A_n} \right] + \frac{f_1^2 n^2 \lambda^2 \delta_n \delta_m}{3mn\pi^2} \left[\frac{8B_m m^2}{A_m} + \frac{4m^2 B_{21}^*}{2A_{11}^*} - \frac{a^2}{R\pi^2} \cdot \frac{1}{2A_{11}^*} + \frac{2m^2 B_{12}^*}{A_{22}^*} \right] \\ + \frac{f_2^2 n^2 \lambda^2 \delta_n \delta_m}{(m+2)mn\pi^2 (3m+2)} \left[\frac{8B_{m+1} (m+1)^2 (3m^2 + 4m + 2)}{3A_{m+1}} + \frac{2m^2 (m+1)^2 B_{21}^*}{A_{11}^*} - \frac{a^2 m^2}{2R\pi^2 A_{11}^*} + \frac{2B_{12}^* (m+1)^2 (3m+2)(m+2)}{3A_{22}^*} \right] \\ - P_\infty \frac{4a^2 \gamma (\gamma+1) \delta_n}{3\pi^4 mn} \left\{ M^2 \left[\frac{f_1^2 m^2}{3} + \frac{f_2^2 (m+1)^2 (m^2 + 4m + 2)}{(m+2)(3m+2)} \right] + \frac{8}{a_\infty^2} \left[\frac{\dot{f}_1^2}{3} + \frac{\dot{f}_2^2}{(m+2)(3m+2)} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 & \rho_1 \frac{a^4}{\pi^4} \ddot{f}_2 + \left(D_{m+1} + \frac{B_{m+1}^2}{A_{m+1}} \right) f_2 + \gamma P_\infty \frac{a^4}{\pi^4} \left[\frac{4Mm(m+1)}{a(2m+1)} f_1 + \frac{\dot{f}_2}{a_\infty} \right] + f_2^3 \left[\frac{(m+1)^4}{16A_{22}^*} + \frac{n^4 \lambda^4}{16A_{11}^*} \right] \\
 & + f_2 f_1^2 \left[\frac{n^4 \lambda^4}{4A_{2m+1}} + \frac{m^2(m+1)^2}{16A_{22}^*} + \frac{n^4 \lambda^4 (2m+1)^4}{16A_n} + \frac{n^4 \lambda^4}{4A_{11}^*} \right] + \frac{f_1 f_2 n \lambda^2 (m+1) \delta_n \delta_m}{m \pi^2 (3m+2)(m+2)} \\
 & \left\{ \frac{4(m+1)}{A_{11}^*} \left[\frac{B_{21}^*}{A_{11}^*} (m+1)^2 - \frac{a^2}{R \pi^2} \right] + \frac{B_n}{3A_n} (3m+2)(m+1)^2 - \frac{a^2}{3R \pi^2} \frac{(3m+2)(2m+1)^2}{A_n} + \frac{B_{2m+1}}{3A_{2m+1}} (m+2) - \frac{a^2}{3R \pi^2} \frac{(2m+1)^2 (m+2)}{A_{2m+1}} \right\} \\
 & - 8f_1 f_2 \left\{ \left(\frac{B_m}{A_m} + \frac{B_{m+1}}{A_{m+1}} \right) \frac{n \lambda^2 \delta_n (m+1)^2 (3m^2 + 4m + 2)}{(m+2) 3m \pi^2 (3m+2)} \right\} \\
 & - P_\infty \frac{8\gamma(\gamma+1)a^2 \delta_n}{3n\pi^4} \left\{ \frac{f_1 f_2 M^2 m(m+1)^2}{(3m+2)(m+2)} + \frac{1}{a_\infty^2} \left[\frac{f_2^2}{3(m+1)} + \frac{2\dot{f}_1 \dot{f}_2 (m+1)^2}{m(3m+2)(m+2)} \right] \right\} = 0
 \end{aligned} \quad (29)$$

Hệ phương trình với m chẵn:

$$\begin{aligned}
 & \rho_1 \frac{a^4}{\pi^4} \ddot{f}_1 + \left(D_m + \frac{B_m^2}{A_m} \right) f_1 + \gamma P_\infty \frac{a^4}{\pi^4} \left[-\frac{4Mm(m+1)}{a(2m+1)} f_2 + \frac{\dot{f}_1}{a_\infty} \right] + \frac{f_1^3}{16} \left[\frac{m^4}{A_{22}^*} + \frac{n^4 \lambda^4}{A_{11}^*} \right] \\
 & + f_1 f_2^2 \left[\frac{n^4 \lambda^4}{4A_{11}^*} + \frac{m^2(m+1)^2}{16A_{22}^*} + \frac{n^4 \lambda^4}{16A_{2m+1}} + \frac{n^4 \lambda^4 (2m+1)^4}{16A_n} \right] \\
 & - 16f_1 f_2 \left(\frac{B_m}{A_m} + \frac{B_{m+1}}{A_{m+1}} \right) \frac{m^2 \lambda^2 n \delta_n [2m^2 + (m+1)^2]}{3\pi^2 (3m+1)(m^2-1)} - \frac{2f_1 f_2 m n \lambda^2 \delta_n}{\pi^2 (3m+1)(m^2-1)} \\
 & \left[\frac{4B_{21}^* m^3}{A_{11}^*} - \frac{4ma^2}{R \pi^2 A_{11}^*} + \frac{B_n (2m+1)^2 (3m+1)}{3A_n} - \frac{a^2 (2m+1)^2 (3m+1)}{3R \pi^2 A_n} + \frac{B_{2m+1} (m-1)}{3A_{2m+1}} - \frac{a^2 (2m+1)^2 (m-1)}{3R \pi^2 A_{2m+1}} \right] \\
 & - \frac{8P_\infty \gamma(\gamma+1)a^2 m^2 \delta_n}{3n\pi^4} \left[\frac{M^2 f_1 f_2 (m+1)}{(3m+1)(m-1)} + \frac{2\dot{f}_1 \dot{f}_2}{a_\infty^2 (3m+1)(m^2-1)} \right] = 0
 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
 & \rho_1 \frac{a^4}{\pi^4} \ddot{f}_2 + \left(D_{m+1} + \frac{B_{m+1}^2}{A_{m+1}} \right) f_2 + \gamma P_\infty \frac{a^4}{\pi^4} \left[\frac{4Mm(m+1)}{a(2m+1)} f_1 + \frac{\dot{f}_2}{a_\infty} \right] + f_2^3 \left[\frac{(m+1)^4}{16A_{22}^*} + \frac{n^4 \lambda^4}{16A_{11}^*} \right] \\
 & + f_2 f_1^2 \left[\frac{n^4 \lambda^4}{4A_{2m+1}} + \frac{m^2(m+1)^2}{16A_{22}^*} + \frac{n^4 \lambda^4 (2m+1)^4}{16A_n} + \frac{n^4 \lambda^4}{4A_{11}^*} \right] - \frac{2f_1^2 n \lambda^2 \delta_n}{\pi^2 (3m+1)(m^2-1)} \\
 & \left[\frac{8B_m m^2 (3m^2 + 2m + 1)}{3A_m} + \frac{B_{21}^* m^2 (m+1)^2}{2A_{11}^*} - \frac{a^2 (m+1)^2}{2A_{11}^* R \pi^2} + \frac{2m^2 (3m+1)(m-1) B_{12}^*}{A_{22}^*} \right] \\
 & - \frac{2f_2^2 n \lambda^2 \delta_n}{3\pi^2 (m+1)} \left[\frac{8B_{m+1} (m+1)^2}{A_{m+1}} + \frac{(m+1)^2 B_{21}^*}{2A_{11}^*} - \frac{a^2}{2A_{11}^* R \pi^2} + \frac{2B_{12}^* (m+1)^2}{A_{22}^*} \right] \\
 & - P_\infty \frac{4\gamma(\gamma+1)a^2 \delta_n}{3n\pi^4} \left[\frac{M^2 (m^2 - 2m - 1) f_1^2}{(3m+1)(m^2-1)} + \frac{M^2 (m+1)^2 f_2^2}{3(m+1)} + \frac{2}{a_\infty^2} \frac{\dot{f}_1^2 m}{(3m+1)(m^2-1)} \right] = 0
 \end{aligned} \quad (31)$$

Từ hệ trên ta nhận được hệ thức xác định tần số dao động riêng ω của vỏ: $|(K - \omega^2 H)| = 0$ (32)

trong đó: $[K] = \begin{bmatrix} D_m + \frac{B_m^2}{A_m} & \\ & D_{m+1} + \frac{B_{m+1}^2}{A_{m+1}} \end{bmatrix}; [H] = \begin{bmatrix} \rho_1 \frac{a^4}{\pi^4} & 0 \\ 0 & \rho_1 \frac{a^4}{\pi^4} \end{bmatrix}$

Hệ các phương trình vi phân phi tuyến (28-31) mô tả dao động của vỏ, kết hợp với điều kiện đầu và sử dụng phương pháp Runge - Kutta bậc 4 và chương trình phần mềm Matlab ta sẽ nhận được đáp ứng động lực của vỏ.

Vấn đề đặt ra là với các giá trị khác nhau của vận tốc dòng khí U , tương ứng với số Mach $M = \frac{U}{a_\infty}$, ta cần xác định vận tốc dòng để với vận tốc này trong khoảng thời gian khảo sát đáp ứng động lực của vỏ tăng liên tục theo thời gian. Ta gọi số Mach tương ứng này là số Mach tới hạn, ký hiệu là M_{th} . Khi $M \geq M_{th}$, panel trụ mất ổn định.



4. Kết quả số và thảo luận

4.1 Đánh giá độ tin cậy

Để đánh giá độ tin cậy của chương trình tính toán, tần số dao động riêng của panel trụ FGM đạt được từ biểu thức (27) được so sánh với Bích và cộng sự [4]. Theo [4], xét panel trụ FGM gồm các thành phần từ nhôm và ôxit nhôm với các tính chất vật liệu $E_m = 70.109 \text{ N/m}^2$, $\rho_m = 2720 \text{ kg/m}^3$, $E_c = 380.109 \text{ N/m}^2$, $\rho_c = 3800 \text{ kg/m}^3$, $\nu_c = \nu_m = 0,3$, ta đưa các số liệu này vào chương trình tính toán của bài báo, kết quả nhận được tần số dao động riêng để so sánh độ tin cậy.

So sánh tần số dao động riêng được thể hiện ở Bảng 1. Do mô tả lý thuyết vỏ cũng như phương pháp mà Bích và cộng sự [4] sử dụng nên sai số không đáng kể.

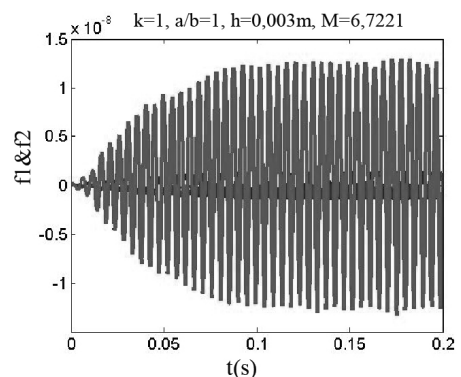
Bảng 1. Các tần số dao động riêng khác nhau (rad/s) của panel trụ tương ứng với $a = b = 1.5 \text{ m}$, $k = 1$, $h = 0.008 \text{ m}$

R(m)	k	Bài báo		Bích và cộng sự [4]	
		Không gân (m,n)	Có gân (m,n)	Không gân (m,n)	Có gân (m,n)
1.5	0.2	1172(1,3)	1571(1,2)	1172.51(1,3)	1571.27(1,2)
	1	981(1,3)	1433(1,2)	982.14(1,3)	1435.02(1,2)
	5	820(1,3)	1264(1,2)	822.19(1,3)	1266.54(1,2)
	10	781(1,3)	1222(1,2)	783.56(1,3)	1224.47(1,2)
3	0.2	804(1,2)	1192(1,2)	803.92(1,2)	1192.51(1,2)
	1	686(1,2)	1127(1,2)	686.91(1,2)	1128.4(1,2)
	5	556(1,2)	1010(1,1)	556.39(1,2)	1011.97(1,1)
	10	518(1,2)	922(1,1)	519.9(1,2)	924.63(1,1)

4.2 Đáp ứng hiện tượng tự dao động phi tuyến và số Mach tới hạn

Dưới đây, tác giả sử dụng phương pháp Runge - Kutta bậc 4 và ngôn ngữ lập trình Matlab để giải hệ phương trình (28-31). Để minh họa cho cách tiếp cận này, ta xét panel trụ FGM nhôm-oxit nhôm với các tham số hình học và vật liệu sau đây [4]: $h=0,003 \text{ m}$, $R=3 \text{ m}$, $a=1.5 \text{ m}$, $b=1.5 \text{ m}$, $k=1$, $E_c = 380 \times 109 \text{ N/m}^2$, $\rho_c = 3800 \text{ kg/m}^3$, $E_m = 70.10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho_m = 2720 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.3$, $s_1 = s_2 = 0.15 \text{ m}$, $d_1 = d_2 = 0.003 \text{ m}$, $h_1 = h_2 = 0.015 \text{ m}$ và các đặc trưng của lực khí động [15]: $\gamma = 1,4$, $P_\infty = 99473,4 \text{ N/m}^2$, $a_\infty = 340 \text{ m/s}$. Điều kiện đầu $f_1(0)=1e-10$, $\dot{f}_1(0)=0$, $f_2(0)=1e-10$, $\dot{f}_2(0)=0$. Với kích thước vỏ trụ và gân ở trên, có thể gia cố được 10 gân tăng cường, như vậy số gân là mau và mảnh, hoàn toàn có thể áp dụng phương pháp san đều tác dụng gân.

Ta khảo sát ở giai đoạn gần mất ổn định đáp ứng động lực của vỏ thể hiện như thế nào. Hình 2 là đáp ứng động lực tự dao động phi tuyến của panel trụ có gân FGM với $M = 6.7221$, vỏ chưa mất ổn định. Hàm f_2 dao động điều hòa với biên độ nhỏ. Hàm f_1 dao động với biên độ tăng trong khoảng thời gian đầu $t < 0,07 \text{ s}$ sau đó giảm dần và với $t > 0,07 \text{ s}$ thực hiện dao động điều hòa.



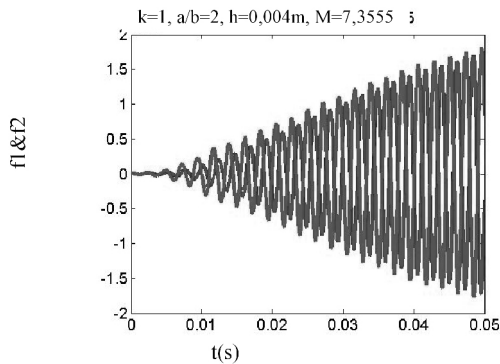
Hình 2. Đáp ứng động lực của panel trụ với số Mach $M=6.7221$

Khi số Mach tăng xấp xỉ 0,0001 (tương ứng vận tốc tăng $\approx 0,034\text{m/s}$), tức là $M_{th}=6.7222$ đáp ứng động lực bắt đầu tăng liên tục, vỡ mất ổn định (Hình 3).

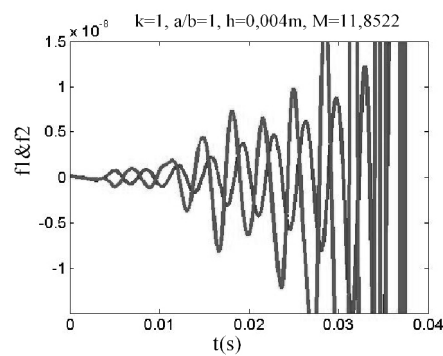
a) Ảnh hưởng của tỷ số a/b và chiều dày của panel trụ

Bảng 2 thể hiện giá trị của M_{th} với các chiều dày và tỷ số a/b khác nhau. Ta thấy khi tỷ số a/b tăng, M_{th} giảm nhanh. Rõ ràng khi có gân, M_{th} tăng đáng kể so với khi không có sự tăng cường của gân.

Khi tăng chiều dày của vỏ, M_{th} tăng. Ta xét vỏ nêu trên với $k=1$, $a=1.5\text{m}$, $b=1.5\text{m}$, $R=3\text{m}$ và $h=0,004\text{m}$, khi đó $M_{th}=7.3555$ khi không có gân, $M_{th}=11.8522$ khi có gân, trạng thái mất ổn định xảy ra thể hiện trên Hình 4 và Hình 5.



Hình 4. Đáp ứng động lực của panel trụ không gân mất ổn định với $M_{th}=7.3555$



Hình 5. Đáp ứng động lực của panel trụ có gân mất ổn định với $M_{th}=11.8522$

Khảo sát cho thấy trong giai đoạn chưa mất ổn định, sự thay đổi của số Mach ảnh hưởng không đáng kể đến tần số dao động. Khi chiều dày h của vỏ trụ tăng, M_{th} tăng nhanh.

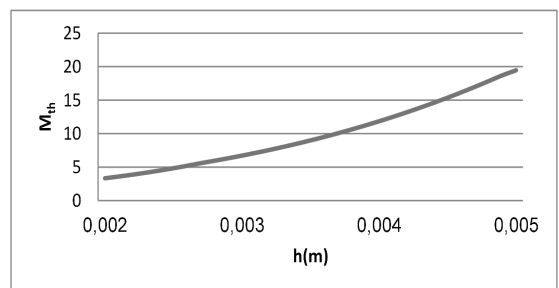
Bảng 2. M_{th} khi tỷ số a/b thay đổi, $k=1$, $R=3\text{m}$

h (m)	0.002		0.003		0.004		0.005	
a/b	Không gân	Có gân	Không gân	Có gân	Không gân	Có gân	Không gân	Có gân
1	1.4595	3.3404	3.8734	6.722	7.3555	11.8522	12.7158	19.4647
1.5	0.9598	1.6946	2.4723	3.4214	4.8383	6.2436	8.2055	9.8097
2	0.6935	1.0735	1.8175	2.2511	3.4535	3.8577	5.8296	6.2701
2.5	0.4758	0.7803	1.2394	1.5566	2.3953	2.7433	4.1879	4.5623
3	0.3591	0.614	0.9028	1.18	1.8181	2.1216	3.1279	3.404
3.5	0.2821	0.5001	0.704	0.9488	1.4628	1.7295	2.341	2.5983
4	0.2202	0.4149	0.5753	0.7938	1.1442	1.3654	1.8468	2.0842

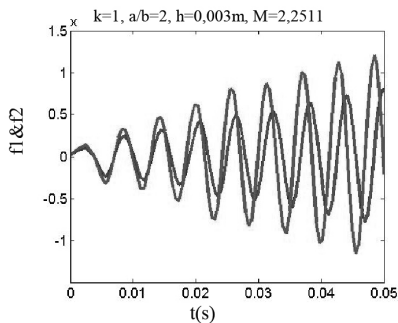
Hình 6 biểu diễn sự biến thiên của M_{th} theo chiều dày h của vỏ ($k=1$, $R=3\text{m}$, $a=b=1.5\text{m}$), M_{th} lớn nhất khi $h=0.005\text{m}$ tương ứng với $M_{th}=19.4647$.

Ảnh hưởng của tỷ số a/b đến đáp ứng động lực của vỏ FGM được chỉ ra trên Hình 3 và 7. Với $a/b=1$ (Hình 3), vỏ mất ổn định khi $M_{th}=6.7222$, với $a/b=2$ (Hình 7), vỏ mất ổn định khi $M_{th}=2.2511$.

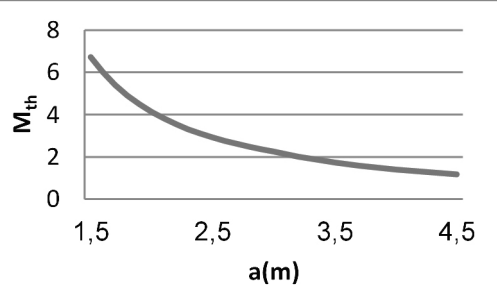
Hình 8 biểu diễn sự thay đổi của M_{th} khi a tăng với $h=0.003\text{m}$, $b=1.5\text{m}$, $k=1$. M_{th} giảm nhanh ở giai đoạn từ $a=1.5\text{m}$ đến $a=2.5\text{m}$, sau đó giảm chậm hơn.



Hình 6. Đồ thị M_{th} biến thiên theo chiều dày h của vỏ



Hình 7. Đáp ứng động lực của panel trụ mất ổn định với $M_{th}=2.2511$

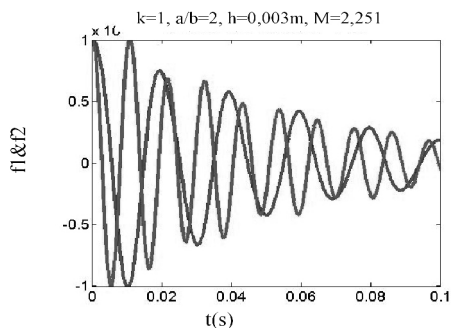


Hình 8. Đồ thị của M_{th} theo chiều dài a

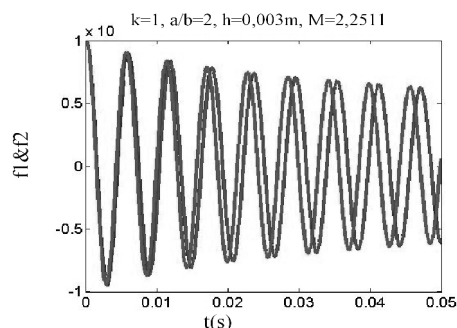
b) Ảnh hưởng của điều kiện đầu

Xét trường hợp thay đổi điều kiện đầu. Tại $t = 0$, $f_1(0)=1e-5$, $f_2(0)=1e-5$ và $t = 0$, $\dot{f}_1(0)=0$, $\dot{f}_2(0)=0$, $a=3m$, $b=1.5m$. Đáp ứng động lực thể hiện trên các Hình 9 và 10. Hình 9 với số Mach $M = 2.251$, đồ thị thể hiện dao động giảm dần. Khi $M = 2.2511$, hiện tượng mất ổn định như Hình 7 không xảy ra. Do ảnh hưởng của điều kiện đầu, biên độ dao động lúc đầu giảm sau đó có xu hướng là dao động điều hòa.

Như vậy khi thay đổi điều kiện đầu, tần số dao động không thay đổi. Do yếu tố lực cản khí động và yếu tố phi tuyến trong các phương trình (28-31) biên độ dao động không tăng đến vô cùng mà đến thời điểm nào đó hiện tượng tự dao động là điều hòa.



Hình 9. Đáp ứng động lực của panel trụ với số Mach $M=2.251$ khi thay đổi điều kiện đầu



Hình 10. Đáp ứng động lực của vỏ trụ với $M_{th}=2.2511$ khi thay đổi điều kiện đầu

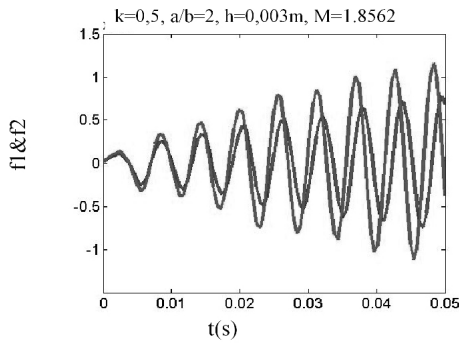
c) Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích k

Khi cho chỉ số thể tích k thay đổi, M_{th} thay đổi. Khi $k = 0$, vật liệu hoàn toàn là kim loại, M_{th} nhỏ, khi $k = \infty$, vật liệu hoàn toàn là ceramic, M_{th} tăng rõ rệt. Điều này hợp lý vì mô đun đàn hồi của thép nhỏ hơn ceramic nhiều. Trên Bảng 3 thể hiện số M_{th} thay đổi khi k , h thay đổi của vỏ với $a/b=2$.

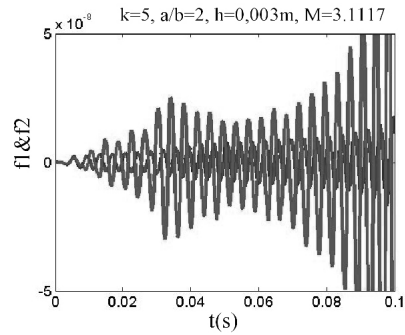
Bảng 3. M_{th} khi cho tỷ số thể tích k và chiều dày h thay đổi của vỏ với $a/b=2$

h (m) \ R	0	0.2	0.5	1	2	5	∞
0.002	0.3976	0.7409	0.917	1.0735	1.2301	1.4126	1.6982
0.003	0.9336	1.4417	1.8562	2.2511	2.6315	3.1117	3.8339
0.004	1.5328	2.4441	3.1674	3.8577	4.5851	5.47	6.9078
0.005	2.4263	3.9545	5.1398	6.2701	7.478	8.9972	11.5997

Hình 11 và 12 thể hiện đáp ứng động lực của vỏ khi mất ổn định với $k = 0,5$ và $k = 5$. Khi $k = 0,5$, $M_{th} = 1.8562$, panel trụ mất ổn định. Khi $k = 5$, $M_{th} = 3.1117$, panel trụ mất ổn định.



Hình 11. Đáp ứng động lực của panel trụ có gân mắt ổn định với $M_{th}=1.8562$ khi $k=0.5$



Hình 12. Đáp ứng động lực của panel trụ có gân mắt ổn định với $M_{th}=3.1117$ khi $k=5$

d) Ảnh hưởng của độ cong vỏ đến giá trị của số Mach tới hạn

Bảng 4 thể hiện giá trị của M_{th} khi cho R tăng. Ta thấy M_{th} giảm dần khi bán kính R của vỏ trụ tăng lên. Đặc biệt khi $R=\infty$, tức là vỏ trụ là tấm chữ nhật, M_{th} giảm rõ rệt. Ta thấy rõ M_{th} tăng nhanh khi tăng chiều dày của vỏ trụ.

Bảng 4. M_{th} khi cho R và h thay đổi ($a=b=1.8m$, $k=1$)

h (m) \ R	2	3	5	8	10	∞
0.002	3.1664	2.4147	1.7908	1.412	1.2768	0.7168
0.003	6.4712	4.9016	3.5157	2.6577	2.3616	0.956
0.004	11.7558	8.8892	6.3557	4.6385	4.0993	1.3455
0.005	18.6131	14.0794	9.9626	7.4883	6.2701	1.9358



5. Kết luận

Trong bài báo đã tiếp cận cách phân tích đáp ứng động lực của hiện tượng tự dao động phi tuyến của panel trụ mỏng FGM có gân gia cường dưới tác dụng của lực khí động theo lý thuyết Piston bằng cách sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển. Các kết quả số của đáp ứng động lực của panel trụ FGM đã nhận được bằng áp dụng phương pháp Runge - Kutta bậc bốn và nhận biết giá trị tới hạn của vận tốc dòng khí qua số Mach tới hạn. Với các kết quả tính toán và các hình ảnh minh họa ta rút ra các nhận xét sau đây:

- Khi chỉ số tỷ lệ thể tích k tăng, tức là lượng ceramic tăng, M_{th} tăng, vỏ ổn định hơn.
- Các tham số hình học đóng vai trò quan trọng trong hiện tượng tự dao động của vỏ FGM. Khi chiều dày h tăng, M_{th} tăng nhanh. Khi tỷ số a/b tăng, M_{th} giảm nhanh.
- Điều kiện ban đầu có ảnh hưởng đến giá trị của M_{th} .
- Hiệu quả gia cường của gân thể hiện một cách rõ ràng.
- Khi bán kính của vỏ trụ tăng, M_{th} giảm.

Tài liệu tham khảo

1. Koizumi M. (1993), "The concept of FGM", *Ceram Trans Funct Grad Mater*, 34:3-10.
2. Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G. (1999), "Functionally graded materials: design, processing and applications". *London: Kluwer Academic Publishers*.
3. Huang H., Han Q. (2010), "Nonlinear dynamic buckling of functionally graded cylindrical shells subjected to a time-dependent axial load", *Compos Struct*, 92:8-593.
4. Dao Huy Bich, Dao Van Dung, Vu Hoai Nam (2012), "Nonlinear dynamical analysis of eccentrically stiffened functionally graded cylindrical panels", *Composite Structures*, 94(8):2465-73.
5. Liew K.M., Yang J., Wu Y.F. (2006) "Nonlinear vibration of a coating-FGM55-substrate cylindrical panel subjected to a temperature gradient", *Comput Methods Appl Mech Eng*, 195:1007-26.



6. Alijani F., Amabili M., Karagiozis K., Bakhtiari-Nejad F. (2011), "Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells", *J Sound Vib*, 330:54-1432.
7. Chorfi S.M., Houmat A. (2010), "Nonlinear free vibration of a functionally graded doubly curved shallow shell of elliptical plan-form", *Compos Struct* 2010, 92:81-2583.
8. Matsunaga H. (2008), "Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2-D higher-order deformation theory", *Compos Struct*, 84:132-46.
9. Bich Dao Huy, Long Vu Do (2010), "Non-linear dynamical analysis of imperfect functionally graded material shallow shells", *Vietnam J Mech* 2010, 32(1):1-14.
10. Dung Dao Van, Nam Vu Hoai (2010), "Nonlinear dynamic analysis of imperfect FGM shallow shells with simply supported and clamped boundary conditions". In: *Proceedings of the tenth national conference on deformable solid mechanics*, Thai Nguyen, 41-130.
11. Budiansky B., Roth R.S. (1962), "Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells". *NASA technical note D_510*, 597-609.
12. Najafizadeh M.M., Hasani A., Khazaeinejad P. (2009), "Mechanical stability of functionally graded stiffened cylindrical shells", *Appl Math Model*, 54(2):179-307.
13. Dao Huy Bich, Vu Hoai Nam, Nguyen Thi Phuong (2011), "Nonlinear postbuckling of eccentrically stiffened functionally graded plates and shallow shells", *Vietnam J Mech* 2011, 33(3):132-47.
14. Tran Quoc Quan, Dao Huy Bich, Nguyen Dinh Duc (2015), "Nonlinear flutter of double curved thin FGM shallow shells on elastic foundations using Ilyushin nonlinear supersonic aerodynamic theory", *Proceedings of the XII National conference on solid Mechanics*, 2:1178-1185.
15. Tran The Van (2012), *Nghiên cứu ổn định của tấm composite lớp chịu tải trọng khí động*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật.
16. Chen X., Kareem A., Haan Jr.F.L. (2000), "Nonlinear Aerodynamic Analysis of Bridges under Turbulent Winds: The New Frontier in Bridge Aerodynamics", *University of Notre Dame*, IN 46556-0767, USA.
17. Nguyễn Đăng Bích, Nguyễn Võ Thông (1999), "Ổn định hệ tự dao động có cưỡng bức khi lực khí động có yếu tố phi tuyến bậc hai với dịch chuyển của công trình", *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị CH-VRBD toàn quốc lần thứ VI*, Hà Nội, 53-59.
18. Harry L.R., Homer G.M. (1961), *Flutter at very high speeds*, Technical Note D-942, National Aeronautics and Space Administration Washington.
19. Ebraheem Al-QASSAE A.A. (2008), "Numerical modeling and dynamic simulations of nonlinear aerothermoelastic of a double-wedge lifting surface", *Journal of Engineering Science and Technology*, 3(3):213-223.
20. McNamara J.J., Friedmann P.P., Powell K.G., Thuruthimattam B.J. (2005), "Three-dimensional Aeroelastic and Aerothermoelastic behavior in Hypersonic Flow", *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Material Conference* 18-21, Texas.
21. Brush D.D., Almroth B.O. (1975), *Buckling of bars, plates and shells*, Mc.Graw-Hill, New York.
22. Kuglera S.T., Fotiura P.A., Murinb J. (2013) "The numerical analysis of FGM shells with enhanced finite elements", *Engineering Structure* 49, 920-935.
23. Lekhnitskii S.G. (1968), *Anisotropic plates*, Gordon and Breach Science Publishers.