



KHẢO SÁT ẢNH HƯỞNG CỦA SỰ PHÂN BỐ LỖ RỔNG TỚI SỰ KHỞI TẠO VÀ PHÁT TRIỂN VẾT NỨT BẰNG PHƯƠNG PHÁP TRƯỜNG PHA

Nguyễn Thị Hải Như^{1*}, Trần Anh Bình²

Tóm tắt: Các loại vật liệu tựa dòn thường được xem là đồng nhất ở tỷ lệ lớn, nhưng gồm nhiều pha ở tỷ lệ nhỏ trong đó có các lỗ rỗng và các vết nứt siêu nhỏ. Các vết nứt và lỗ rỗng này có vai trò quan trọng trong việc hình thành vết nứt thực ở tỷ lệ lớn hơn. Sự phân bố của các vết nứt và các pha rỗng ở tỷ lệ nhỏ có ảnh hưởng khác nhau đến sự khởi tạo và lan truyền vết nứt trong vật liệu. Nhiều mô hình đã được xây dựng để nghiên cứu sự lan truyền của vết nứt. Gần đây, các mô hình trường pha nhận được rất nhiều sự quan tâm nghiên cứu. Bài báo này xây dựng công thức phân tử hữu hạn cho một mô hình trường pha, sử dụng mô hình để khảo sát ảnh hưởng của phân bố lỗ rỗng tới sự phá hoại của một mẫu vật liệu chịu kéo.

Từ khóa: Khởi tạo vết nứt; phát triển vết nứt; phương pháp trường pha.

Study the impact of voids distribution on the initiation and propagation of cracks by a phase field method

Abstract: Quasi brittle materials are considered to be homogeneous at macroscale but composed of phases at microscale including void inclusions and microcracks. These defects play an important role in the forming a real crack at macroscale. The distribution of microcracks and voids affects differently on the initiation and propagation of cracks. A lot of works have been proposed to study the initiation and propagation of the crack in literature. Recently phase field models are of interest by many researchers who work on the damage of materials because of the ability to track the crack naturally by solving the minimization problem of energy. This work will derive discretization formulas for a phase field model and utilize this model to study the impact of the void distribution on the fracture process of a specimen in a traction test.

Keywords: Crack initiation; crack propagation; microvoid; phase field method.

Nhận ngày 22/3/2017; sửa xong 20/6/2017; chấp nhận đăng 26/9/2017

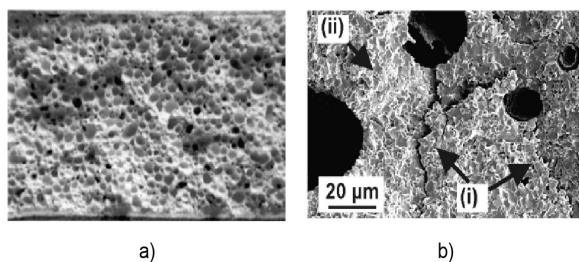
Received: March 22nd, 2017; revised: June 20th, 2017; accepted: September 26th, 2017



1. Giới thiệu

Các loại vật liệu xây dựng như bê tông, đá, ceramic, vữa, thạch cao thường tồn tại các pha rỗng và các vết nứt siêu nhỏ không thể thấy được bằng mắt thường. Các hư hại này được hình thành một cách tự nhiên trong quá trình hình thành nên vật liệu (ví dụ: Hình 1 thể hiện các vết nứt ở tỷ lệ micro của vật liệu bê tông nhẹ, hình thành do quá trình thủy hóa, đông cứng của bê tông). Dưới tác dụng của tải trọng, nhiệt độ, các hư hại ở các vị trí khác nhau lan truyền, rẽ nhánh và kết hợp với nhau tạo thành các vết nứt thực sự có thể nhìn thấy bằng mắt thường và dẫn đến sự phá hoại của toàn kết cấu.

Trong nhiều thập niên vừa qua, nghiên cứu về sự hư hại của vật liệu và kết cấu nhận được sự quan tâm của nhiều tác giả. Khi nghiên cứu vết nứt bằng phương pháp phân tử hữu hạn truyền thống (FEM), tại



Hình 1. a) Vi cấu trúc trong bê tông nhẹ (Amine Bouterf-phD thesis 2014) và b) các vết nứt ở tỷ lệ micro (Passmore et al. 1965)

¹ ThS, Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Xây dựng.

² TS, Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Xây dựng.

* Tác giả chính. E-mail: nhunth@nuce.edu.vn.

vị trí bị phá hoại, các nút phải được tách rời dẫn đến việc chia lưới phải được cập nhật và đường đi của vết nứt được quy định bởi cạnh phần tử [1]. Việc này có thể giải quyết bằng các thuật toán chia lại lưới trong [2,3] hoặc sử dụng phương pháp XFEM [4-7] trong đó sử dụng các hàm bình đồ (hàm level-set) để biểu diễn sự không liên tục trong phần tử. Các phương pháp này đều có những thành công nhất định trong mô hình vết nứt 2 chiều nhưng gặp khó khăn khi vết nứt rẽ nhánh trong mô hình 3 chiều. Để giải quyết khó khăn này, một nhóm các phương pháp đã được đề xuất trong đó vết nứt được mô tả là một đại lượng có chiều dày hữu hạn. Trong số các phương pháp này trường pha nhận được nhiều sự quan tâm của các nhà nghiên cứu hiện nay. Trong các mô hình này, vết nứt được biểu diễn thông qua một trường vô hướng có giá trị từ 0 đến 1. Cách biểu diễn này tương đồng với cách biểu diễn biến hư hại trong nghiên cứu về hư hại trong cơ học môi trường liên tục về hư hại (Continuum Damage Mechanics). Bài toán về phá hoại được giải quyết dựa trên nguyên lý biến phân không cần đến các tiêu chuẩn phá hoại cũng như các thuật toán chia lại lưới và làm cho việc mô hình vết nứt trong không gian 3 chiều cũng trở nên dễ dàng hơn. Với lợi thế này, rất nhiều mô hình trường pha được phát triển để nghiên cứu các bài toán hư hại khác nhau: phá hoại kiểu I [8], kiểu III [9], hay kiểu I và II [10]. Trong lĩnh vực cơ học, các phương pháp trường pha xây dựng trên nguyên lý biến phân cho vật liệu giòn trong đó sử dụng một hàm trơn, khả vi để mô tả bề mặt nứt đã được đề xuất trong [11-13]. Loại mô hình này được mở rộng áp dụng cho vết nứt cổ kết [17,18] và các bài toán động học [14-16].

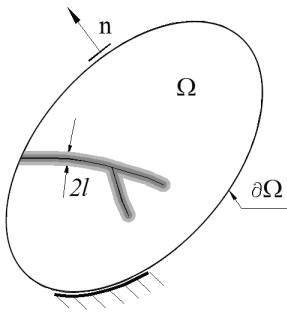
Bài báo này xây dựng các công thức phần tử hữu hạn để tìm trường hư hại sử dụng mô hình trường pha (phase field) [19,20] theo nguyên lý cực tiểu hóa năng lượng ở mục 2. Trong mục 3 trình bày kết quả tính toán theo mô hình trong bài báo và so sánh với một kết quả đã được công bố. Trong mục 4, nhóm tác giả tiến hành khảo sát ảnh hưởng của sự phân bố các pha rỗng tròn xung quanh vết nứt của một mẫu vật liệu chịu kéo. Các kết luận từ việc tính toán khảo sát ở trên được đưa ra trong mục 5.



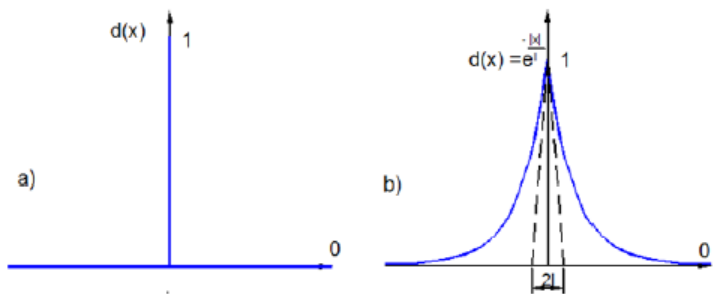
2. Phương pháp trường pha

2.1 Công thức năng lượng của mô hình

Xét một miền mở ký hiệu là Ω và biên của nó là $\partial\Omega$ trong không gian D chiều với n là vec tơ pháp tuyến hướng ra ngoài như mô tả trong Hình 2. Miền này chứa một vùng nứt Γ trong không gian $D - 1$ chiều.



Hình 2. Miền Ω và chứa miền nứt Γ



Hình 3. Mô tả giá trị của d trong mô hình vết nứt thực (sharp crack) và vết nứt mờ (smear crack) trong bài toán 1 chiều

Francfort và Marigo [11] đề xuất công thức năng lượng cho bài toán mô hình vết nứt như sau:

$$E(\mathbf{u}, \Gamma) = E_u(\mathbf{u}, \Gamma) + E_s(\Gamma) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} W_u(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega + g_c \int_{\Gamma} d\Gamma \quad (1)$$

Trong mô hình chuẩn hóa của lý thuyết của trường pha, hàm năng lượng $E(\mathbf{u}, \Gamma)$ được biểu diễn dưới dạng sau:

$$E(\mathbf{u}, d) = E_u(\mathbf{u}, d) + E_s(d) = \int_{\Omega} W_u(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), d) d\Omega + g_c \int_{\Omega} \gamma(d, \nabla d) d\Omega \quad (2)$$

Trong (1) và (2): W_u là hàm mật độ năng lượng biến dạng đàn hồi; $\mathbf{u}$ là trường chuyển vị; $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ là ten-sơ biến dạng, g_c là tỷ lệ giải phóng năng lượng tới hạn; E_u đại diện cho năng lượng biến dạng đàn hồi, E_s là năng lượng bề mặt hay năng lượng phá hủy. Lưu ý trong công thức (1), E_s là một đại lượng tích phân trên bề mặt nứt, còn trong công thức (2), E_s là một đại lượng được tính tích phân trên toàn miền của hàm mật độ trường nứt $\gamma(d, \nabla d)$. Hàm mật độ được chọn theo [19] như sau:

$$\gamma(d, \nabla d) = \frac{1}{2l} d^2 + \frac{1}{2} \nabla d \cdot \nabla d \quad (3)$$

Trong mô hình đang xét, $d = 1$ biểu thị vật liệu ở trạng thái hoàn toàn bị phá hủy tại vị trí vết nứt; $d = 0$ biểu thị trạng thái nguyên vẹn của vật liệu. Trên Hình 3, với bài toán 1 chiều, giá trị của d là một miền liên tục d , trong đó $d = 1$ tại vị trí vết nứt và liên tục giảm dần khi ra ngoài miền hư hại và tiến đến 0. Độ lớn của miền phụ thuộc vào biến l trong công thức (3). Tham số l ban đầu được giới thiệu là một tham số của mô hình và nên được chọn càng bé càng tốt tuy nhiên thông số này có mối quan hệ với các tính chất khác của vật liệu. Do đó, l nên được xem là một tính chất của vật liệu và được xác định dựa theo thí nghiệm.

Công thức (2) có thể được viết lại dưới dạng: $E = \int_{\Omega} W d\Omega$; trong đó $W = W(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), d) + g_\gamma(d)$ gọi là năng lượng tự do.

Để mô tả sự hư hại của vật liệu, hàm năng lượng biến dạng trong các mô hình trường pha thường được viết kèm theo một hàm suy thoái $g(d)$. Dựa trên giả thiết rằng chỉ có biến dạng kéo gây ra vết nứt, hàm suy thoái được đưa vào công thức gắn với phần dương của năng lượng biến dạng đàn hồi. Theo đó, công thức năng lượng cho mô hình có dạng:

$$W_u(\mathbf{u}, d) = (g(d) + k)\Psi^+(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + \Psi^-(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \quad (4)$$

Trong công thức (4): k là một hệ số rất nhỏ để tránh biến dạng kì dị khi phần tử bị phá hoại hoàn toàn ($d = 1$ trên toàn miền); hàm $g(d)$ được chọn đơn giản nhất có dạng $g(d) = (1 - d)^2$ thỏa mãn các điều kiện: $g_{(d=0)} = 1$; và $g_{(d=1)} = 0$ tương ứng giới hạn 2 trạng thái ban đầu và trạng đã bị hư hại, $g'_{(d=1)} = 0$ nhằm đảm bảo rằng khi hư hại hoàn toàn xảy ra, năng lượng của mô hình hội tụ đến một giá trị hữu hạn và trường hư hại không thể tiếp tục tiến triển.

Theo [19,20], năng lượng dương và năng lượng âm được tính dựa trên phần kéo và phần nén của ten sơ biến dạng. Các đại lượng trong (4) được tính như sau:

$$\begin{cases} \Psi^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\lambda}{2} \left(\langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_+ \right)^2 + \mu \text{tr} \left(\left(\boldsymbol{\varepsilon}^+ \right)^2 \right) \\ \Psi^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\lambda}{2} \left(\langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_- \right)^2 + \mu \text{tr} \left(\left(\boldsymbol{\varepsilon}^- \right)^2 \right) \end{cases} \quad (5)$$

Với

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^+ = \sum_{i=1}^D \langle \boldsymbol{\varepsilon}^i \rangle_+ \mathbf{n}^i \otimes \mathbf{n}^i \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- = \sum_{i=1}^D \langle \boldsymbol{\varepsilon}^i \rangle_- \mathbf{n}^i \otimes \mathbf{n}^i \end{cases} \quad (6)$$

Trong các công thức trên, $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ và $\mathbf{n}^i$ là các trị riêng và vec tơ riêng của ten sơ biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}$; $\langle x \rangle_+ = (x + |x|) / 2$ và $\langle x \rangle_- = (x - |x|) / 2$.

2.2 Phương trình biến phân

Để giải bài toán cực tiểu năng lượng theo công thức (2), hai giải thuật chính được đề nghị trong các nghiên cứu về mô hình bao gồm giải đồng thời tìm giá trị của trường u và d (monolithic scheme) và giải lần lượt d và u (staggered scheme) [19,20]. Trong bài báo này, giải thuật thứ 2 được chọn do tính đơn giản và cho kết quả hợp lý.

Công thức dạng yếu của bài toán tìm trường d (phase field) có thể được xây dựng dựa trên sự nhất quán với các nguyên lý nhiệt động học (xem [20]). Công thức tích phân để tìm d cũng có thể xây dựng dựa theo nguyên lý biến phân trong đó d là nghiệm của bài toán cực tiểu hóa năng lượng theo biến d hay đạo hàm theo hướng δd của E bằng 0. Ta có thể viết:

$$d = \text{Arg} \left\{ \inf_{d \in S_d} \left(\int_{\Omega} W_u(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), d) d\Omega + g_c \int_{\Omega} \gamma(d, \nabla d) d\Omega \right) \right\} \quad (7)$$

Thay (3) vào (7), bài toán tìm trường d được viết lại:

$$d_{\delta d} E(\mathbf{u}, d) = \left\{ \frac{d \left(\int_{\Omega} (W_u(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), d + \alpha \delta d)) + g_c \int_{\Omega} \gamma((d + \alpha \delta d), \nabla(d + \alpha \delta d)) d\Omega \right)}{d\alpha} \right\}_{\alpha=0} = 0$$

hay

$$\left\{ \frac{d \left(\int_{\Omega} ((g(d + \alpha \delta d) + k)\Psi^+ + g_c \int_{\Omega} \gamma((d + \alpha \delta d), \nabla(d + \alpha \delta d)) d\Omega) \right)}{d\alpha} \right\}_{\alpha=0} = 0 \quad (8)$$

Khai triển (8), ta có:

$$\int_{\Omega} \left(-2(1-d)\Psi^+ d\delta d + \frac{g_c}{l} d\delta d + g_c l \nabla d \nabla(\delta d) \right) d\Omega = 0 \quad (9)$$

hay

$$\int_{\Omega} \left(2 \left(\Psi^+ + \frac{g_c}{l} \right) d\delta d + g_c l \nabla d \nabla(\delta d) \right) d\Omega = \int_{\Omega} 2\Psi^+ \delta d d\Omega \quad (10)$$

Với giả thiết vết nứt không thể liền lại, Miehe [19] giới thiệu hàm H thay thế cho hàm Ψ^* trong công thức (10).

$$H = \max_{\tau \in [0,1]} \{ \Psi^+(x, \tau) \} \quad (11)$$

Thay (11) vào (10) ta được công thức dạng yếu tìm trường d :

$$\int_{\Omega} \left(\left(2H + \frac{g_c}{l} \right) d\delta d + g_c l \nabla d \cdot \nabla(\delta d) \right) d\Omega = \int_{\Omega} 2H \delta d d\Omega \quad (12)$$

Công thức dạng tích phân của bài toán tìm chuyển vị được viết tương tự như trong phương pháp phần tử hữu hạn truyền thống:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \text{Arg} \left\{ \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{S}_u} \left(E(\mathbf{u}, d) - \mathbf{F}^{ext} \right) \right\} \quad (13)$$

trong đó: $\mathbf{S}_u = \{ \mathbf{u} | \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}} \text{ trên } \partial\Omega \}$ là không gian các hàm $\mathbf{u}$ thỏa mãn điều kiện biên; $\mathbf{F}^{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \bar{\mathbf{F}} \mathbf{u} d\Omega$, $\mathbf{f}$ là lực thể tích; $\bar{\mathbf{F}}$ là lực tác dụng trên biên $\partial\Omega_F$ và $\mathbf{u}$ là chuyển vị cưỡng bức đặt trên biên $\partial\Omega_u$ với điều kiện $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_F$.

Khi đó, phương trình biến phân của bài toán đàn hồi có vết nứt theo phương pháp trường pha được viết dưới dạng:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \bar{\mathbf{F}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma, \quad (14)$$

trong đó:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w_u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \left((1-d)^2 + k \right) \left\{ \lambda \langle \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ \mathbf{I} + \mu \boldsymbol{\varepsilon}^+ \right\} + \lambda \langle \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_- \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^- \quad (15)$$

Trường biến dạng được tách thành 2 thành phần theo công thức xấp xỉ như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^+ \cong \mathbf{P}_n^+ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^- \cong \mathbf{P}_n^- \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (16)$$

trong đó:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_n^+ = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_n^+}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_n} \\ \mathbf{P}_n^- = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_n^-}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_n} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_n^+ \end{cases} \quad (17)$$

2.3 Rời rạc hóa bằng phương pháp phần tử hữu hạn

2.3.1 Công thức ma trận giải bài toán tìm trường d

Áp dụng các công thức gần đúng của phương pháp phần tử hữu hạn cho biến d và δd :

$$\begin{cases} d(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_d(\mathbf{x}) \mathbf{d}; \quad \nabla d(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_d(\mathbf{x}) \mathbf{d} \\ \delta d(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_d(\mathbf{x}) \delta \mathbf{d}; \quad \nabla \delta d(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_d(\mathbf{x}) \delta \mathbf{d} \end{cases} \quad (18)$$

trong đó: $\mathbf{N}_d(\mathbf{x})$ và $\mathbf{B}_d(\mathbf{x})$ lần lượt là ma trận hàm dạng và ma trận đạo hàm của hàm dạng. Sau khi biến đổi (12) ta thu được hệ phương trình tuyến tính:

$$\mathbf{K}_d \mathbf{d} = \mathbf{F}_d \quad (19)$$

trong đó, ma trận độ cứng $\mathbf{K}_d$ và vec tơ $\mathbf{F}_d$ lực được xác định bởi:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_d = \int_{\Omega} \left(\left(2H + \frac{g_c}{l} \right) \mathbf{N}_d^T \mathbf{N}_d + g_c l \mathbf{B}_d^T \mathbf{B}_d \right) d\Omega \\ \mathbf{F}_d = 2 \int_{\Omega} \mathbf{N}_d^T H d\Omega \end{cases} \quad (20)$$

2.2.2 Công thức ma trận giải bài toán tìm trường chuyển vị

Áp dụng các công thức gần đúng của phương pháp phần tử hữu hạn, ta nhận được:

$$\{K_1(d) + K_2\}u = F \quad (21)$$

trong đó:

$$\left\{ \begin{aligned} K_1(d) &= \int_{\Omega} B^T \left(\left((1-d^2) + k \right) (\lambda R^+ [1]^T [1] + 2P^+) \right) B d\Omega \\ K_2 &= \int_{\Omega} B^T \left(\left(\lambda R^- [1]^T [1] + 2\mu P^- \right) \right) B d\Omega \\ F &= \int_{\Omega} N^T f d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \bar{F} \delta u d\Gamma \end{aligned} \right. \quad (22)$$

Trong công thức (20): λ và μ là các hằng số l'amé của vật liệu, $[1] = [1 \ 1 \ 0]$. N và B lần lượt là ma trận hàm dạng và ma trận đạo hàm của hàm dạng của phép xấp xỉ chuyển vị u . P_n^+ và P_n^- được giới thiệu như trong (17); R^+ và R^- là các toán tử xấp xỉ thỏa mãn điều kiện sau:

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \text{tr} \epsilon_{n+1} \rangle_+ &\cong R^+(\epsilon_n) \text{tr} \epsilon_{n+1} \\ \langle \text{tr} \epsilon_{n+1} \rangle_- &\cong R^-(\epsilon_n) \text{tr} \epsilon_{n+1} \end{aligned} \right. \quad (23)$$

$$\text{hoặc có thể viết: } R^\pm(\epsilon_n) = \frac{1}{2} (\text{sign}(\pm \text{tr}(\epsilon_{n+1})) + 1)$$

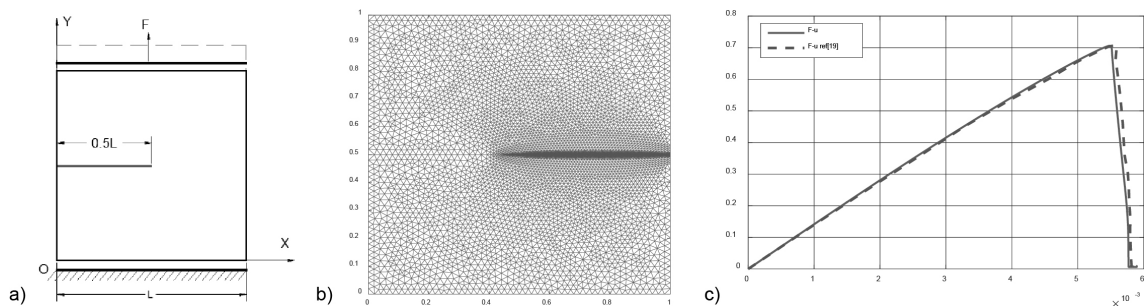
Tại mỗi bước chuyển vị, trường d được tìm theo công thức (19) và được sử dụng để giải tìm trường chuyển vị u theo công thức (20).

3. Ví dụ tính toán: tấm chịu kéo

Ví dụ này nhằm mục đích so sánh kết quả chương trình phần tử hữu hạn đã lập theo mô hình trình bày trong mục 2 với kết quả đã được công bố trong [19].

Xét một mẫu biến dạng phẳng có kích thước $L \times H = 1\text{mm} \times 1\text{mm}$ chứa vết nứt ban đầu có chiều dài 0.5mm tại vị trí $Y = 0.5\text{mm}$. Các hằng số vật liệu $\lambda = 121.15\text{KN/mm}^2$, $\mu = 80.77\text{KN/mm}^2$, $g_c = 0.0027\text{KN/mm}$. Tấm được ngàm tại đáy như Hình 4.a. Tiến hành áp chuyển vị tăng dần tại vị trí $Y = 1\text{mm}$: $\Delta u = 10^{-5}\text{mm}$ cho 500 bước chuyển vị đầu tiên và $\Delta u = 10^{-6}\text{mm}$ cho các chuyển vị tiếp theo. Hệ số $l = 0.015\text{mm}$, hệ số $k = 10^{-6}$. Lưới chia phần tử hữu hạn được thể hiện trong Hình 4.b trong đó sử dụng 15292 phần tử tam giác, kích thước phần tử tại vùng dự đoán hư hại xấp xỉ 0.001mm.

Hình 4.c thể hiện quan hệ lực chuyển vị được tính toán theo phương pháp trường pha, so sánh với kết quả trong [19]. Đồ thị cho thấy kết quả của nhóm tác giả là đáng tin cậy.

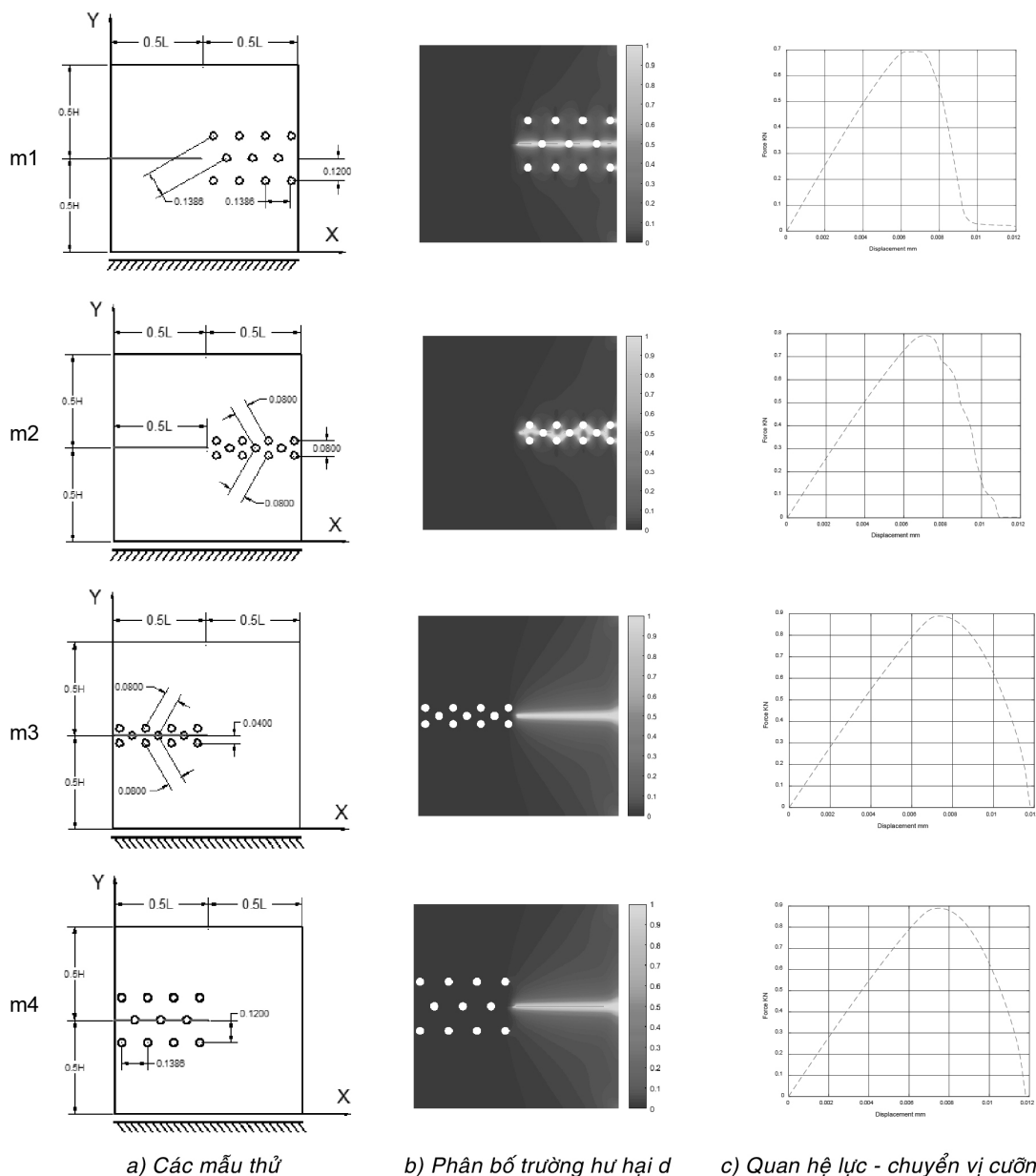


Hình 4. a) Sơ đồ hình học; b) Lưới chia phần tử hữu hạn; c) Kết quả tính sử dụng mô hình trường pha trong mục 2 (đường liền) được so sánh với kết quả trong [19] (đường nét đứt)

4. Ảnh hưởng của sự phân bố của lỗ rỗng đến sự hình thành và phát triển của vết nứt

Trong phần này, ảnh hưởng của sự phân bố lỗ rỗng đến sự hình thành và phát triển của vết nứt được khảo sát bằng phương pháp trường pha qua 4 mẫu biến dạng phẳng có kích thước $L \times H = 1\text{mm} \times 1\text{mm}$. Các mẫu đều có 11 lỗ tròn nhưng phân bố khác nhau và một vết nứt ban đầu song song với trục X . Bán kính các của lỗ $r = 0.02\text{mm}$ phân bố tạo thành dạng tam giác đều như trên Hình 5.a, vết nứt ban đầu có chiều dài 0.5 mm tại vị trí $Y = 0.5\text{mm}$. Các hằng số vật liệu được lấy như ví dụ trong mục 3, tham số $l = 0.01\text{mm}$. Ứng xử của các mẫu được khảo sát dựa trên quan hệ lực - chuyển vị và hình dạng vết nứt

(phân bố của trường d) của các thí nghiệm kéo bằng cách áp chuyển vị tăng dần theo phương Y tại vị trí $Y = 1\text{mm}$ (chuyển vị theo phương X , $U_x = 0$). Bước nhảy chuyển vị $\Delta u = 10^{-4}\text{ mm}$ và 120 bước chuyển vị được thực hiện trong mỗi mẫu.



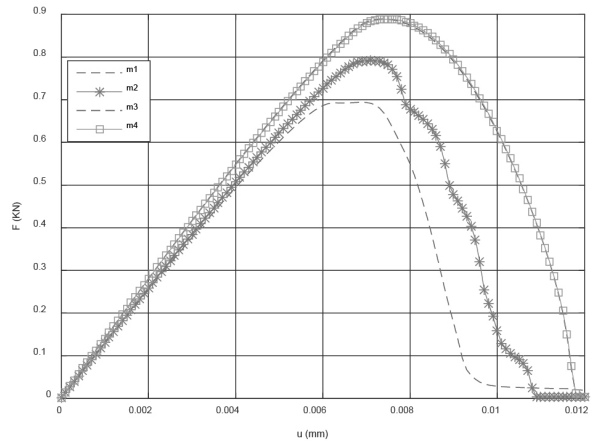
Hình 5. Cột a: Các mẫu thử; Cột b: Phân bố trường hư hại d (vị trí các vết nứt) tại điểm cuối của quá trình gia tải; Cột c: Mối quan hệ lực - chuyển vị cưỡng bức

Xấp xỉ 80,000 phần tử tam giác tuyến tính được sử dụng để rời rạc hóa phần tử. Việc chia lưới được thực hiện bằng phần mềm ABAQUS 6.14. Việc tính toán được thực hiện bằng phần mềm MATLAB 2009. Trên Hình 5.b thể hiện trường phá hoại d và Hình 5.c thể hiện quan hệ lực chuyển vị $\bar{F} - \bar{u}$ tương ứng với các mẫu.

Quan sát hai mẫu $m1$ và $m2$ (Hình 5): Các lỗ được bố trí phía trước vết nứt ban đầu. Tọa độ theo phương X ở hai mẫu hoàn toàn giống nhau nhưng khác nhau theo phương Y . Khoảng cách giữa tâm các lỗ tương ứng là 0.08mm và $d = 0.1386\text{ mm}$. Ở mẫu $m1$ các lỗ rỗng được phân bố gần nhau, trường phá hoại xuất hiện tại tất cả các mép lỗ và vết nứt tìm đi theo hình dích dắc nối các lỗ với nhau. Ở mẫu $m2$ các

lỗ rỗng được phân bố xa nhau với khoảng cách giữa tâm các lỗ, vết nứt không đi qua tất cả các lỗ mà đi thẳng qua các lỗ tại vị trí $Y = 0.5\text{mm}$. Trên biểu đồ, quan sát thời điểm $\bar{F}$ đạt giá trị tới hạn, tức khi mẫu bắt đầu bị phá hoại, cho thấy mẫu 1 bắt đầu bị phá hoại sớm hơn mẫu 2. Chuyển vị cường bức tương ứng với giá trị lớn nhất $\bar{F}$ của mẫu 1 và 2 tương ứng là $u_a = 0.006\text{mm}$, $u_b = 0.0072\text{mm}$.

So sánh hai mẫu $m3$ và $m4$ (Hình 5), các lỗ được bố trí hai bên vết nứt ban đầu. Tương tự như ở mẫu $m1$ và $m2$, tọa độ theo phương X ở hai mẫu hoàn toàn giống nhau nhưng khác nhau theo phương Y . Khoảng cách giữa tâm các lỗ tương ứng là $d = 0.08\text{mm}$ và $d = 0.1386\text{mm}$. Quan sát phân bố của trường d và quan hệ lực - chuyển vị ở hai mẫu $m3$ và $m4$, các lỗ rỗng được bố trí hai bên vết nứt ban đầu, cho thấy: (i) phân bố của trường d là giống nhau, vết nứt tiến triển từ vết nứt ban đầu và đi thẳng cho đến khi mẫu bị phá hoại hoàn toàn; (ii) không có sự khác biệt giữa quan hệ lực chuyển vị (trên Hình 6 đường cong $\bar{F} - \bar{u}$ của hai mẫu $m3$ và $m4$ chồng khít lên nhau dù bố trí lỗ rỗng ở hai mẫu là khác nhau). Điều này cho thấy các lỗ rỗng ở vùng này không ảnh hưởng đến giá trị lực tới hạn cũng như thời điểm đạt giá trị lực này, đồng thời giá trị lớn nhất $\bar{F}$ ở hai mẫu $m3$ và $m4$ cũng lớn hơn mẫu a và d .



Hình 6. So sánh các mối quan hệ lực (F) - chuyển vị (u) của các mẫu

5. Kết luận

Bài báo này dùng một mô hình trường pha được sử dụng để nghiên cứu sự ảnh hưởng phân bố của lỗ rỗng đến sự hình thành và phát triển của vết nứt. Kết quả bước đầu cho thấy: các lỗ rỗng bố trí ở 2 bên vết nứt ban đầu không ảnh hưởng đến sự khởi tạo và lan truyền vết nứt. Vết nứt không phụ thuộc vào sự phân bố của lỗ xung quanh vết nứt ban đầu mà chỉ phụ thuộc vào môi trường phía trước vết nứt, vùng mà vết nứt được dự kiến phát triển. Kết quả này phù hợp với sự phân bố ứng suất ở hai bên vết nứt ban đầu và phù hợp với kết luận rằng độ cứng phá hủy chịu ảnh hưởng lớn của sự phân bố lỗ rỗng xung quanh vết nứt [21]. Trong bài báo cũng đã xây dựng lại công thức phần tử hữu hạn để tìm trường hư hại của mô hình trường pha áp dụng cho bài toán phá hủy, là một mô hình mới, nhận được nhiều sự quan tâm trong lĩnh vực cơ học phá hủy hiện nay. Ảnh hưởng của khoảng cách, mật độ lỗ rỗng phía trước vết nứt tới sự phát triển vết nứt sẽ là chủ đề nghiên cứu tiếp theo của nhóm tác giả.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ phát triển Khoa học và Công nghệ quốc gia (NAFOST-ED) trong đề tài mã số 107.02-2017.309.

Tài liệu tham khảo

1. Ngo D., Scordelis A.C. (1967), "Finite element analysis of reinforced concrete beams", *Journal of American Concrete Institute*, 64:152-163.
2. Ingraffea A., Saouma V. (1984), *Numerical modelling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete*, In: Sih G, Di Tommaso A, editors, *Fracture mechanics of concrete*, Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers; 171-225.
3. Camacho G.T., Ortiz M. (1996), "Computational modeling of impact damage in brittle materials", *International Journal of Solids and Structures*, 33:1267-1282.
4. Belytschko T., Black T. (1999), "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45:601-20.
5. Daux C., Moës N., Dolbow J., Belytschko T. (2000), "Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 48:1741-60.
6. Moës N., Dolbow J., Belytschko T. (1999), "A finite element method for crack growth without remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131-56.



7. Moran B., Belytschko T., Sukumar N., Moës N. (2000), "Extended finite element method for three-dimensional crack modeling", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 48(11):1549-70.
8. Aranson I.S., Kalatsky V.A., Vinokur V.M. (2000), "Continuum field description of crack propagation", *Physical Review Letters*, 85:118-121.
9. Karma A., Kessler D.A., Levine H. (2001), "Phase-field model of mode III dynamic fracture", *Physical Review Letters*, 87:045501.
10. Hakim V., Karma A. (2009), "Laws of crack motion and phase-field models of fracture", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57:342-368.
11. Francfort G.A., Marigo J.J. (1998), "Revisiting brittle fractures as an energy minimization problem", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46:1319-1342.
12. Bourdin B., Francfort G.A., Marigo J.J. (2000), "Numerical experiments in revisited brittle fracture", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48:797-826.
13. Bourdin B., Francfort G.A., Marigo J.J. (2008), "The variational approach to fracture", *Journal of Elasticity*, 91:5-148.
14. Larsen C.J., Ortner C., Süli E. (2010), "Existence of solutions to a regularized model of dynamic fracture", *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 20:1021-1048.
15. Bourdin B., Larsen C.J., Richardson C. (2011), "A time-discrete model for dynamic fracture based on crack regularization", *International Journal of Fracture*, 168:133-14.
16. Schlüter A., Willenbücher A., Kuhn C., Müller R. (2014), "Phase field approximation of dynamic brittle fracture", *Computational Mechanics*, 54:1141-1161.
17. Verhoosel C.V., de Borst R. (2013), "A phase-field model for cohesive fracture", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 96:43-62.
18. May S., Vignollet J., Borst R.D. (2015), "A numerical assessment of phase models for brittle and cohesive fracture: G-convergence and stress oscillations", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 52:72-84.
19. Miehe C., Hofacker M., Welschinger F. (2010), "A phase model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(45):2765-2778.
20. Nguyen T.T., Yvonnet J., Zhu Q.-Z., Bornert M., Chateau C. (2015), "A phase method to simulate crack nucleation and propagation in strongly heterogeneous materials from direct imaging of their microstructure", *Engineering Fracture Mechanics*, 139:18-39.
21. Cramer M., Sevostianov M. (2009), "Effect of pore distribution on elastic stiffness and fracture toughness of porous media", *International Journal of Fracture*, doi:10.1007/s10704-009-9416-6.