



ẢNH HƯỞNG BIẾN DẠNG CẮT NGANG TRONG PHÂN TÍCH TĨNH VÀ DAO ĐỘNG RIÊNG TẤM COMPOSITE LỚP

Đặng Xuân Hùng^{1*}, Trần Minh Tú², Trần Đại Hào³

Tóm tắt: Bài báo xây dựng lời giải giải tích để phân tích tĩnh và dao động riêng của tấm composite lớp theo các lý thuyết biến dạng cắt khác nhau: lý thuyết tấm cổ điển (CLPT), lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), lý thuyết tấm bậc ba với 5 ẩn số chuyển vị (HSDT-5), lý thuyết tấm bậc cao với 9 ẩn số chuyển vị (HSDT-9). Các phương trình cân bằng được thiết lập với trường chuyển vị tổng quát dựa trên nguyên lý Hamilton. Ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang theo các lý thuyết tấm khác nhau đến trường chuyển vị, ứng suất và tần số dao động riêng của tấm composite lớp đã được khảo sát.

Từ khóa: Tấm composite lớp; phân tích tĩnh; dao động riêng; lý thuyết tấm.

The effect of transverse shear deformation on the static and free vibration analysis of laminated composite plates

Abstract: In this paper, the analytical solution for static and free vibration analysis of laminated composite plates is developed by various shear deformation theories including: classical laminated plate theory (CLPT), first-order shear deformation theory (FSDT), third-order shear deformation theory (HSDT-5), high order shear deformation theory (HSDT-9). The equations of motion are derived by Hamilton's principle based on the generalized displacement field. The effect of transverse shear deformation of different plate theories on the displacement, stress and natural frequency of laminated composite plates is investigated.

Keywords: Laminated composite plate; static analysis; free vibration, plate theories.

Nhận ngày 10/05/2017; sửa xong 15/06/2017; chấp nhận đăng 26/9/2017

Received: May 10th, 2017; revised: June 15th, 2017; accepted: September 26th, 2017



1. Giới thiệu

Vật liệu composite được sử dụng ngày càng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực: giao thông vận tải, xây dựng dân dụng, công nghiệp đóng tàu, sản xuất máy bay... do có nhiều ưu điểm nổi trội so với vật liệu truyền thống. Loại vật liệu này là lựa chọn lý tưởng cho những kết cấu đòi hỏi có độ cứng, độ bền cao, khả năng chống ôxi hóa, trọng lượng nhẹ.... Các nghiên cứu về ứng xử cơ học của vật liệu và kết cấu composite thu hút sự quan tâm của các nhà khoa học trong và ngoài nước phục vụ công tác tính toán, thiết kế, bảo trì và sửa chữa. Nhiều lý thuyết tấm đã được đề xuất và ứng dụng trong phân tích tĩnh và động kết cấu tấm bằng vật liệu đẳng hướng sau đó mở rộng cho tấm composite lớp. Một số nghiên cứu tổng quan về các lý thuyết tấm composite lớp đã được trình bày trong [1-3].

Lý thuyết tấm cổ điển [4] được đề xuất vào đầu thế kỷ XIX bỏ qua biến dạng cắt ngang và chỉ áp dụng cho các tấm mỏng. Wang và cộng sự [5] đã sử dụng lý thuyết tấm cổ điển để phân tích tính chất cơ học của tấm composite TC4-6061. Raju và Wang [6] đã mô hình hóa tấm composite sợi vải tổng hợp bằng lý thuyết tấm cổ điển... Do bỏ qua biến dạng cắt ngang nên lý thuyết tấm cổ điển không phù hợp khi tính toán các tấm có độ dày trung bình và dày. Để khắc phục giới hạn của lý thuyết tấm cổ điển, Reissner [7] và Mindlin [8] đã đề xuất lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Lý thuyết này được Sky [9] sử dụng trong phân tích ứng xử uốn của tấm composite lớp. Bruno và cộng sự [10] kiểm tra bền tấm composite lớp chịu uốn theo thuyết bền phá hủy lớp đầu tiên. Do không phản ánh đúng qui luật phân bố dạng parabol thực tế của ứng suất cắt ngang theo phương chiều dày tấm nên lý thuyết này cần sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt trong tính

¹ TS, Khoa Xây dựng DD & CN, Trường Đại học Xây dựng.

² PGS.TS, Khoa Xây dựng DD & CN, Trường Đại học Xây dựng.

³ NCS, Khoa Xây dựng DD & CN, Trường Đại học Xây dựng.

* Tác giả chính. E-mail: dangxuanhung@gmail.com.

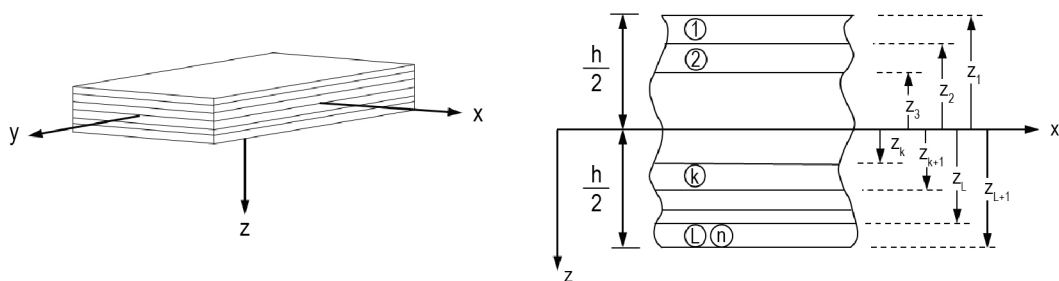
toán. Whitney [11] đã xác định hệ số hiệu chỉnh cắt chính xác của tấm trục hướng dưới tác động của tĩnh tải... Việc xác định hệ số hiệu chỉnh cắt là phức tạp do hệ số này phụ thuộc vào cấu hình vật liệu, điều kiện biên, tính chất tải trọng,... Để khắc phục nhược điểm này, các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đã được phát triển trên cơ sở đưa bài toán ba chiều về bài toán hai chiều một cách gần đúng bằng cách khai triển chuỗi Taylor trường chuyển vị tại điểm bất kỳ theo tọa độ chiều dày. Lời giải đàn hồi đã cho thấy biến thiên của ứng suất tiếp theo phương chiều dày có dạng parabol do vậy các thành phần chuyển vị màng phải biểu diễn bằng hàm bậc ba theo tọa độ chiều dày. Thành phần độ võng được giả thiết là hằng số theo tọa độ chiều dày, như vậy biến dạng dài theo phương chiều dày không đổi. Pandya và Kant [12] đã sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao 9 ẩn số chuyển vị (HSDT-9) xây dựng mô hình phần tử hữu hạn phân tích ứng suất trong tấm composite lớp chịu uốn. Xuất phát từ lý thuyết biến dạng cắt bậc cao 9 ẩn số chuyển vị, Reddy trong [13] đã đưa thêm điều kiện ứng suất tiếp theo phương chiều dày bằng không tại mặt trên và dưới của tấm để nhận được lý thuyết bậc cao đơn giản với 5 ẩn số chuyển vị (HSDT-5). Kant và Swaminathan [14] khi thiết lập lời giải giải tích để phân tích tĩnh tấm composite sandwich lại sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đầy đủ với 12 ẩn chuyển vị.

Bài báo này sử dụng mô hình trường chuyển vị tổng quát của Reddy [1] để phân tích trường chuyển vị, ứng suất và tần số dao động riêng của tấm chữ nhật composite lớp tựa khớp trên chu tuyến. Ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang theo các lý thuyết tấm khác nhau được phân tích thông qua các khảo sát số, giới hạn áp dụng của các lý thuyết tấm cũng sẽ được đề cập.



2. Cơ sở lý thuyết

2.1 Hệ phương trình cơ bản của tấm



Hình 1. Mô hình tấm composite lớp

Hình 1 thể hiện một tấm composite lớp gồm n lớp, được đánh số thứ tự từ trên xuống dưới. Mặt trung bình của tấm được chọn là mặt phẳng Oxy và trục Oz hướng theo chiều tăng của số thứ tự lớp. Mỗi lớp thứ k được xác định bởi tọa độ mặt dưới z_{k+1} và mặt trên z_k theo phương z .

2.1.1 Trường chuyển vị

Trường chuyển vị của tấm composite được giả thiết dưới dạng tổng quát sau [1]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 + \alpha_1 z \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha_2 z^2 \theta_x + \alpha_3 z^2 \varphi_x + \alpha_4 z^3 \psi_x \\ v(x, y, z) &= v_0 + \alpha_1 z \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha_2 z^2 \theta_y + \alpha_3 z^2 \varphi_y + \alpha_4 z^3 \psi_y \\ w(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \quad (1)$$

trong đó: u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình theo các phương; θ_x, θ_y là các góc xoay của đoạn thẳng pháp tuyến mặt trung bình tại điểm đang xét quanh hai trục x, y và $\varphi_x, \varphi_y, \psi_x, \psi_y$ là các thành phần chuyển vị và góc xoay bậc cao.

Với lý thuyết tấm bậc cao rút gọn của Reddy (HSDT-5):

$$\psi_x = -\frac{4}{3h^2} \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \psi_y = -\frac{4}{3h^2} \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Giá trị cụ thể của các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ theo các lý thuyết tấm khác nhau được cho trong Bảng 1.

2.1.2 Trường biến dạng

Trường biến dạng được xác định từ quan hệ giữa chuyển vị - biến dạng và viết dưới dạng sau:

Bảng 1. Bảng hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ theo các lý thuyết tấm

Lý thuyết tấm	α_1	α_2	α_3	α_4
Lý thuyết tấm cổ điển (CLPT)	-1	0	0	0
Lý thuyết tấm bậc nhất (FSDT)	0	1	0	0
Lý thuyết tấm bậc cao 5 ẩn chuyển vị (HSDT-5)	0	1	0	1
Lý thuyết tấm bậc cao 9 ẩn chuyển vị (HSDT-9)	0	1	1	1

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(2)} \\ \varepsilon_{yy}^{(2)} \\ \varepsilon_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \varepsilon_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix}$$

trong đó:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \alpha_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \alpha_2 \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ 2\alpha_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \alpha_2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(2)} \\ \varepsilon_{yy}^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix} = \alpha_3 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} = \alpha_4 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1+\alpha_1) \frac{\partial w_0}{\partial y} + \alpha_2 \theta_y \\ (1+\alpha_1) \frac{\partial w_0}{\partial x} + \alpha_2 \theta_x \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \end{Bmatrix} = 2\alpha_3 \begin{Bmatrix} \varphi_y \\ \varphi_x \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} = 3\alpha_4 \begin{Bmatrix} \psi_y \\ \psi_x \end{Bmatrix};$$

2.1.3 Trường ứng suất

Trường ứng suất lớp thứ k được xác định theo quan hệ ứng suất - biến dạng như sau [15]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{Bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_k \quad (3)$$

Với $\bar{Q}_{ij}$ được trình bày chi tiết trong [15]. Các thành phần ứng lực được định nghĩa theo biểu thức (4):

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_x^* \\ N_y & N_y^* \\ N_{xy} & N_{xy}^* \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} [1 \quad z^2] dz; \quad \begin{Bmatrix} M_x & M_x^* \\ M_y & M_y^* \\ M_{xy} & M_{xy}^* \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} [z \quad z^3] dz;$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x & Q_x^* \\ Q_y & Q_y^* \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} [1 \quad z^2] dz; \quad \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} [z] dz;$$

2.1.4 Phương trình quan hệ nội lực - biến dạng

Từ các phương trình (2), (3) và (4) ta thu được mối quan hệ giữa các thành phần ứng lực - biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{N^*\} \\ \{M^*\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [A] & [B] & [C] & [D] \\ [B] & [C] & [D] & [E] \\ [C] & [D] & [E] & [F] \\ [D] & [E] & [F] & [H] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^{(0)}\} \\ \{\varepsilon^{(1)}\} \\ \{\varepsilon^{(2)}\} \\ \{\varepsilon^{(3)}\} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \{S\} \\ \{Q^*\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [A^*] & [B^*] & [C^*] \\ [B^*] & [C^*] & [D^*] \\ [C^*] & [D^*] & [E^*] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\gamma^{(0)}\} \\ \{\gamma^{(1)}\} \\ \{\gamma^{(2)}\} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz \quad (i, j) = (1, 2, 6); \\ (A_{ij}^*, B_{ij}^*, C_{ij}^*, D_{ij}^*, E_{ij}^*) &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2, z^3, z^4) dz \quad (i, j) = (4, 5); \end{aligned}$$

2.1.5 Hệ phương trình chuyển động

Hệ phương trình chuyển động của tấm nhận được dựa trên nguyên lý Hamilton [15] và có dạng:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 + \alpha_3 I_2 \ddot{\phi}_x; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0 \ddot{v}_0 + \alpha_3 I_2 \ddot{\phi}_y; \\ (1 + \alpha_1) \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) &- \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) + q = \\ I_0 \ddot{w}_0 - I_2 \left[\alpha_1^2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{\ddot{\theta}_x}{\partial x} + \frac{\ddot{\theta}_y}{\partial y} \right) \right] &- \alpha_1 \alpha_4 I_4 \left(\frac{\ddot{\psi}_x}{\partial x} + \frac{\ddot{\psi}_y}{\partial y} \right); \\ \alpha_2 \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right) &= I_2 \left(\alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + \alpha_2^2 \ddot{\theta}_x \right) + \alpha_2 \alpha_4 I_4 \ddot{\psi}_x; \\ \alpha_2 \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y \right) &= I_2 \left(\alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + \alpha_2^2 \ddot{\theta}_y \right) + \alpha_2 \alpha_4 I_4 \ddot{\psi}_y; \\ \alpha_3 \left(\frac{\partial N_x^*}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial y} - 2S_x \right) &= \alpha_3 I_2 \ddot{u}_0 + \alpha_3^2 I_4 \ddot{\phi}_x; \quad \alpha_3 \left(\frac{\partial N_y^*}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial x} - 2S_y \right) = \alpha_3 I_2 \ddot{v}_0 + \alpha_3^2 I_4 \ddot{\phi}_y; \\ \alpha_4 \left(\frac{\partial M_x^*}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial y} - 3Q_x^* \right) &= I_4 \left(\alpha_1 \alpha_4 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + \alpha_2 \alpha_4 \ddot{\theta}_x \right) + \alpha_4^2 I_6 \ddot{\psi}_x; \\ \alpha_4 \left(\frac{\partial M_y^*}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x} - 3Q_y^* \right) &= I_4 \left(\alpha_1 \alpha_4 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + \alpha_2 \alpha_4 \ddot{\theta}_y \right) + \alpha_4^2 I_6 \ddot{\psi}_y; \end{aligned} \quad (6)$$

trong đó: $I_k = \rho \int_{-h/2}^{h/2} z^k dz \quad k = 2, 4, 6$

Biểu diễn các thành phần ứng lực qua các thành phần biến dạng theo (5), rồi các thành phần biến dạng qua chuyển vị theo (2) ta nhận được hệ phương trình chuyển động theo chuyển vị.

2.2 Lời giải Navier

Xét tấm composite lớp hình chữ nhật bốn biên tựa khớp có chiều dài a và chiều rộng b . Điều kiện biên cho các cấu hình vật liệu khác nhau có dạng:

+ Tấm composite lớp cấu hình vuông góc (cross-ply) [14]:

$$\begin{aligned} v_0 = w_0 = \theta_y = M_x = \phi_y = \psi_y = M_x^* = N_x = N_x^* &= 0; \quad x = 0, a; \\ u_0 = w_0 = \theta_x = M_y = \phi_x = \psi_x = M_y^* = N_y = N_y^* &= 0; \quad y = 0, b; \end{aligned} \quad (7)$$

+ Tấm composite lớp cấu hình xiên góc (angle-ply) [16]:

$$\begin{aligned} u_0 = w_0 = \theta_y = M_x = \phi_x = \psi_y = M_x^* = N_{xy} = N_{xy}^* &= 0; \quad x = 0, a; \\ v_0 = w_0 = \theta_x = M_y = \phi_y = \psi_x = M_y^* = N_{xy} = N_{xy}^* &= 0; \quad y = 0, b; \end{aligned} \quad (8)$$

Hệ các phương trình chuyển động theo chuyển vị xuất phát từ (6) là các phương trình tuyến tính nên ta giả thiết các thành phần chuyển vị theo dạng chuỗi lượng giác kép thỏa mãn điều kiện biên (7) và (8):

+ Tấm composite lớp cấu hình vuông góc:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} e^{i\omega t} \cos \eta x \sin \kappa y; \quad v_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} e^{i\omega t} \sin \eta x \cos \kappa y; \quad w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} e^{i\omega t} \sin \eta x \sin \kappa y; \\ \theta_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{xmn} e^{i\omega t} \cos \eta x \sin \kappa y; \quad \theta_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{ymn} e^{i\omega t} \sin \eta x \cos \kappa y; \quad \phi_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{xmn} e^{i\omega t} \cos \eta x \sin \kappa y; \\ \phi_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{ymn} e^{i\omega t} \sin \eta x \cos \kappa y; \quad \psi_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{xmn} e^{i\omega t} \cos \eta x \sin \kappa y; \quad \psi_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{ymn} e^{i\omega t} \sin \eta x \cos \kappa y; \end{aligned} \quad (9)$$

+ Tầm composite lớp cấu hình xiên góc:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} e^{i\omega t} \sin \eta x \cos \kappa y; \quad v_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} e^{i\omega t} \cos \eta x \sin \kappa y; \quad w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} e^{i\omega t} \sin \eta x \sin \kappa y; \\ \theta_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{xmn} e^{i\omega t} \cos \eta x \sin \kappa y; \quad \theta_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{ymn} e^{i\omega t} \sin \eta x \cos \kappa y; \quad \varphi_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{xmn} e^{i\omega t} \sin \eta x \cos \kappa y; \\ \varphi_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{ymn} e^{i\omega t} \cos \eta x \sin \kappa y; \quad \psi_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{xmn} e^{i\omega t} \cos \eta x \sin \kappa y; \quad \psi_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{ymn} e^{i\omega t} \sin \eta x \cos \kappa y; \end{aligned} \quad (10)$$

với: $\eta = \frac{m\pi}{a}$; $\kappa = \frac{n\pi}{b}$; $k = 1 \dots n$;

Tải trọng phân bố vuông góc với bề mặt tấm cũng được khai triển dưới dạng chuỗi lượng giác kép:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} e^{i\omega t} \sin \eta x \sin \kappa y \quad (11)$$

Thay phương trình (7), (9) hoặc (8), (10) vào hệ phương trình chuyển động theo chuyển vị ta nhận được hệ phương trình:

$$\{[K]_{9 \times 9} - \omega^2 [M]_{9 \times 9}\} \{Q\} = \{q\} \quad (12)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \{Q\} &= \{u_{0mn} \quad v_{0mn} \quad w_{0mn} \quad \theta_{x0mn} \quad \theta_{y0mn} \quad \varphi_{x0mn} \quad \varphi_{y0mn} \quad \psi_{x0mn} \quad \psi_{y0mn}\}^T \\ \{q\} &= \{0 \quad 0 \quad q_{mn} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \end{aligned}$$

- Với bài toán tĩnh, đặt tần số góc dao động $\omega = 0$, phương trình (12) trở thành:

$$\{[K]_{9 \times 9}\} \{Q\} = \{q\} \quad (13)$$

- Với bài toán dao động riêng, đặt thành phần tải trọng $q_{mn} = 0$, phương trình (12) trở thành:

$$\{[K]_{9 \times 9} - \omega^2 [M]_{9 \times 9}\} \{Q\} = \{0\} \quad (14)$$



3. Kết quả số

3.1 Phân tích tĩnh

Xét một tấm chữ nhật composite lớp ($b = 3a$) cấu hình đối xứng vuông góc $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ và phản xứng xiên góc $[-30^\circ/30^\circ]$, chiều dày các lớp như nhau, chịu tải trọng phân bố dạng hình sin. Các thông số vật liệu của tấm composite như sau:

Cấu hình đối xứng vuông góc:

$$E_1 = 175 \text{ GPa}; E_2 = 7 \text{ GPa}; G_{12} = G_{13} = 3.5 \text{ GPa}; G_{23} = 1.4 \text{ GPa}; \nu_{12} = \nu_{13} = 0.25 \quad [17]$$

Cấu hình phản xứng xiên góc:

$$E_1 = 276 \text{ GPa}; E_2 = 6.895 \text{ GPa}; G_{12} = G_{13} = 3.45 \text{ GPa}; G_{23} = 4.12 \text{ GPa}; \nu_{12} = \nu_{13} = 0.25 \quad [16]$$

Độ võng và ứng suất không thứ nguyên được tính theo công thức sau:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= w_0 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \left(\frac{E_2 h^3}{a^4 q_0} \right); \quad \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \left(\frac{h^2}{a^2 q_0} \right); \quad \bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{6} \right) \left(\frac{h^2}{a^2 q_0} \right); \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \sigma_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) \left(\frac{h^2}{a^2 q_0} \right); \quad \bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) \left(\frac{h}{a q_0} \right); \quad \bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) \left(\frac{h}{a q_0} \right); \end{aligned}$$

Độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên tính theo các lý thuyết tấm khác nhau trình bày trong Bảng 2 đối với cấu hình đối xứng vuông góc và Bảng 3 đối với cấu hình phản xứng xiên góc. Kết quả được so sánh với lời giải chính xác theo lý thuyết đàn hồi ba chiều của Pagano trong [17] đối với tấm đối xứng vuông góc và với Swaminathan [16] đối với tấm phản xứng xiên góc theo lý thuyết tấm 9 ẩn số chuyển vị.

Hình 2 và 3 biểu diễn sự biến thiên của độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên theo tỉ số kích thước/chiều dày tấm (a/h).

Bảng 2. Độ võng và ứng suất không thứ nguyên của tấm composite lớp $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

a/h	Lý thuyết	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
4	CLPT	0.5034	0.6233	0.0251	0.0083	-	-
	FSDT	2.3626	0.6130	0.0934	0.0205	0.1879	0.0308
	HSDT-5	2.6411	1.0359	0.1028	0.0263	0.2724	0.0348
	HSDT-9	2.6484	1.0811	0.1039	0.0263	0.2791	0.0324
	3D[17]	2.8200	1.1400	0.1190	0.0281	0.3510	0.0334
10	CLPT	0.5034	0.6233	0.0251	0.0083	-	-
	FSDT	0.8030	0.6214	0.0375	0.0105	0.1894	0.0159
	HSDT-5	0.8622	0.6924	0.0398	0.0115	0.2859	0.0170
	HSDT-9	0.8690	0.7122	0.0401	0.0117	0.3066	0.0159
	3D[17]	0.9190	0.7260	0.0418	0.0120	0.4200	0.0152
100	CLPT	0.5034	0.6233	0.0251	0.0083	-	-
	FSDT	0.5064	0.6233	0.0253	0.0083	0.1897	0.0127
	HSDT-5	0.5070	0.6240	0.0253	0.0083	0.2886	0.0129
	HSDT-9	0.5071	0.6242	0.0253	0.0083	0.3132	0.0121
	3D[17]	0.5080	0.6240	0.0253	0.0083	0.4390	0.0108

Bảng 3. Độ võng và ứng suất không thứ nguyên của tấm composite lớp $[-30^\circ/30^\circ]$

a/h	Lý thuyết	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
4	CLPT	1.3136	0.8637	0.2780	-0.1804	-	-
	FSDT	2.6093	0.8552	0.2767	-0.1942	0.3473	0.1041
	HSDT-5	2.3752	1.0475	0.3204	-0.2304	0.3883	0.1155
	HSDT-9	2.6980	0.9155	0.2946	-0.1271	0.3705	0.0972
	3D[17]	2.6980	1.1889	0.3872	-0.1271	-	-
10	CLPT	1.3136	0.8637	0.2780	-0.1804	-	-
	FSDT	1.5211	0.8620	0.2778	-0.1831	0.3486	0.1000
	HSDT-5	1.4872	0.8935	0.2882	-0.1889	0.3881	0.1131
	HSDT-9	1.5388	0.8727	0.2808	-0.1676	0.3680	0.1018
	3D[17]	1.5388	0.9193	0.2966	-0.1676	-	-
100	CLPT	1.3136	0.8637	0.2780	-0.1804	-	-
	FSDT	1.3157	0.8636	0.2780	-0.1805	0.3490	0.0990
	HSDT-5	1.3154	0.8640	0.2781	-0.1805	0.4000	0.1124
	HSDT-9	1.3159	0.8637	0.2780	-0.1803	0.3669	0.1037
	3D[17]	1.3163	0.8641	0.2782	-0.1803	-	-

Kết quả trong Bảng 2 và Hình 2 phản ánh đúng ứng xử cơ học của tấm composite lớp: khi tấm có chiều dày trung bình và dày với cấu hình đối xứng vuông góc, lời giải theo lý thuyết bậc cao sát với lời giải theo lý thuyết đàn hồi ba chiều hơn cả. Ứng suất cắt ngang có chênh lệch đáng kể giữa các lý thuyết tấm bậc cao và bậc nhất.

Kết quả trong Bảng 3 và Hình 3 cũng cho thấy qui luật tương tự đối với tấm composite lớp cấu hình phản xứng xiên góc: lời giải theo lý thuyết bậc cao (HSDT-9) sát với lời giải theo lý thuyết bậc cao 9 ẩn của Swaminathan. Với tấm có chiều dày trung bình và dày, lời giải theo lý thuyết cổ điển có sai số lớn với các lý thuyết tấm khác.

Sự sai khác về giá trị của độ võng và các thành phần ứng suất, đặc biệt là ứng suất tiếp theo phương chiều dày khi chiều dày tấm tăng lên có thể lý giải bằng ảnh hưởng rõ rệt của biến dạng cắt ngang trong các lý thuyết tấm đề xuất.

3.2 Phân tích dao động riêng

Xét một tấm chữ nhật composite lớp ($b = 3a$) cấu hình đối xứng vuông góc $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ và phản xứng xiên góc $[-45^\circ/45^\circ]_s$, chiều dày các lớp như nhau. Các thông số vật liệu của tấm composite như sau:

Cấu hình đối xứng vuông góc:

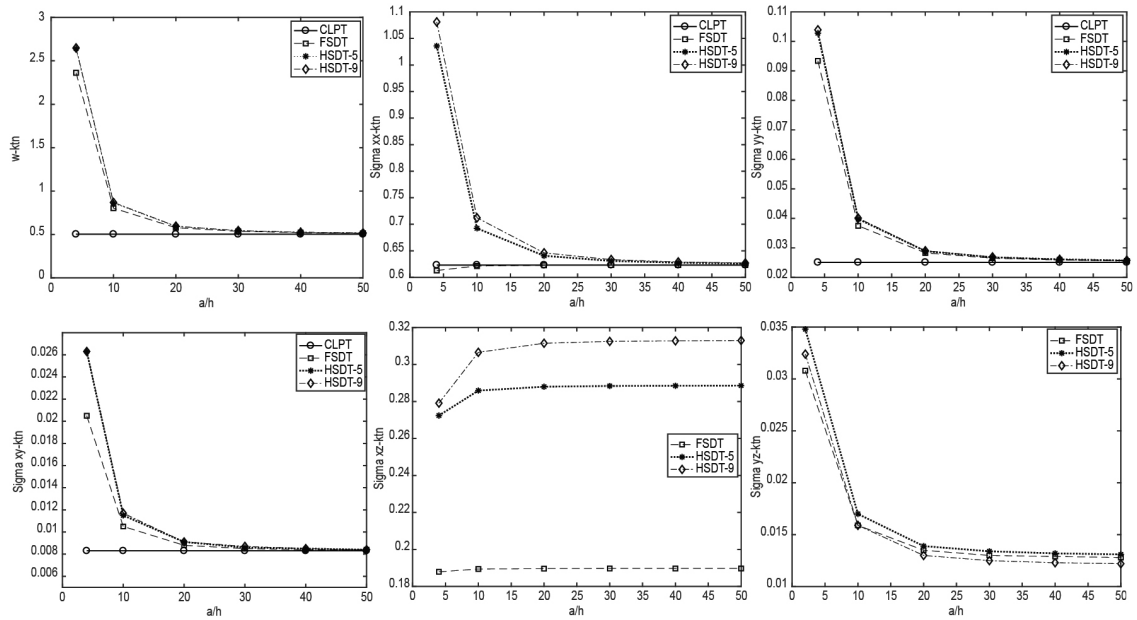
$$E_1 = 175 \text{ GPa}; G_{12} = G_{13} = 0.6 E_2; G_{23} = 0.5 E_2; \nu_{12} = \nu_{13} = 0.25; a/h = 5 \text{ [18]}$$

Cấu hình đối xứng xiên góc:

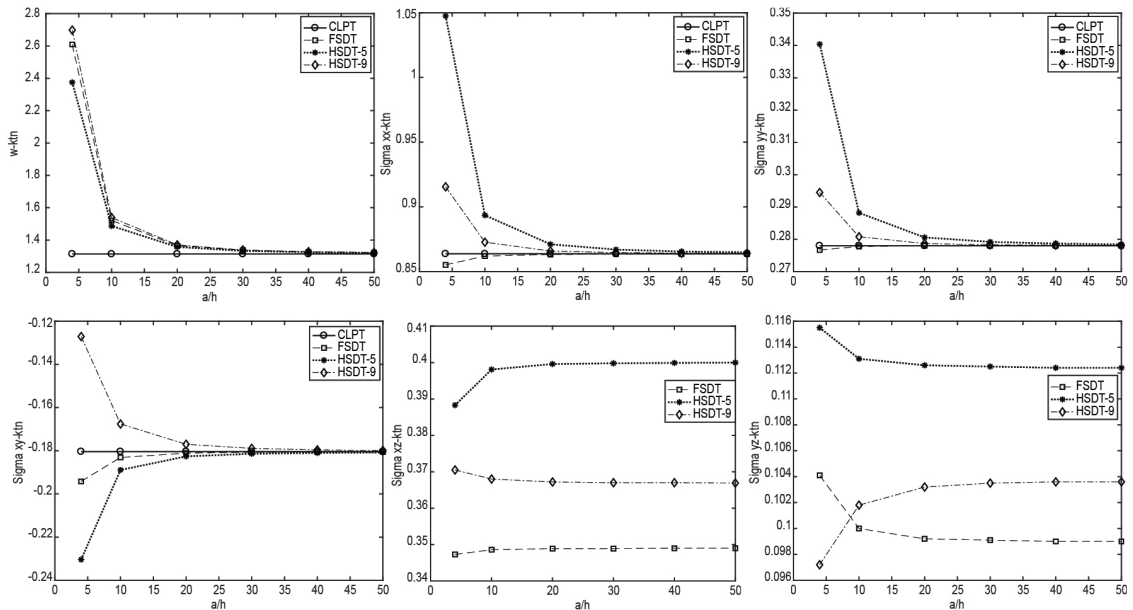
$$E_1 = 175 \text{ GPa}; E_2 = E_1/15; G_{12} = G_{13} = 0.5 E_2; G_{23} = 0.35 E_2; \nu_{12} = 0.23 \text{ [19]}$$

Tần số dao động riêng không thứ nguyên được tính theo công thức: $\bar{\omega} = 10\omega \sqrt{\frac{\rho h^2}{E_2}}$

Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên tính theo các lý thuyết tấm khác nhau được trình bày trong Bảng 4 với cấu hình đối xứng vuông góc và Bảng 5 với cấu hình đối xứng xiên góc. Kết quả được so sánh với lời giải chính xác theo lý thuyết đàn hồi ba chiều của Noor trong [18] đối với tấm đối xứng vuông góc và với Burton trong [19] đối với tấm phản xứng xiên góc.



Hình 2. Biến thiên của độ võng, ứng suất không thứ nguyên theo tỷ số a/h của tấm composite lớp cấu hình đối xứng vuông góc $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$



Hình 3. Biến thiên của độ võng, ứng suất không thứ nguyên theo tỷ số (a/h) của tấm composite lớp cấu hình phản xứng xiên góc $[-30^\circ/30^\circ]$

Kết quả trên Bảng 4 và Bảng 5 cho thấy tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên tính theo các lý thuyết biến dạng cắt so với lời giải lý thuyết đàn hồi có sai lệch bé ($< 5\%$) đối với các tấm dày và dày trung bình. Tần số dao động riêng không thứ nguyên tính theo lý thuyết tấm cổ điển có sai số lớn với lời giải lý thuyết đàn hồi.

Biến thiên của tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên theo tỉ số a/h được biểu diễn bằng đồ thị trên Hình 4a đối với tấm cấu hình đối xứng vuông góc và trên Hình 4b đối với tấm cấu hình phản xứng xiên góc.

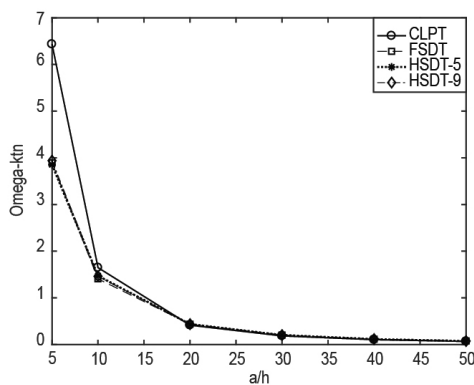
Quan sát đồ thị trên Hình 4a và 4b ta thấy khi a/h tăng thì tần số góc ω giảm; ω giảm nhanh trong khoảng $a/h \leq 20$ và giảm chậm dần khi $a/h \geq 20$. Khi tỷ số $a/h \geq 10$, sai lệch kết quả giữa các lý thuyết tấm không đáng kể. Kết quả tính tần số dao động riêng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao 9 ần chuyển vị gần với kết quả tính theo lý thuyết đàn hồi 3D hơn cả. Khi tấm dày do ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang, sai lệch giữa các lý thuyết là đáng kể.

Bảng 4. Tần số không thứ nguyên của tấm composite lớp $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

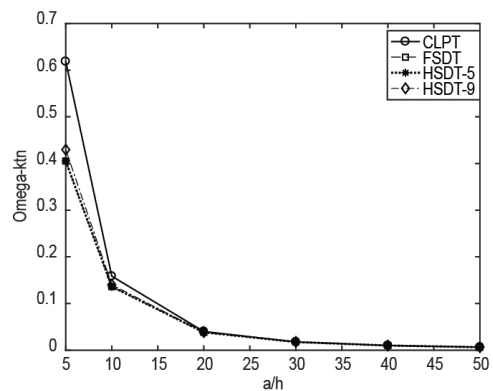
Lý thuyết	E_1 / E_2				
	3	10	20	30	10
CLPT	2.929	4.126	5.404	6.4333	7.320
FSDT	2.618	3.244	3.661	3.892	4.046
HSDT-5	2.564	3.186	3.611	3.853	4.017
HSDT-9	2.621	3.261	3.694	3.939	4.105
3D [18]	2.647	3.284	3.834	4.108	4.301

Bảng 5. Tần số không thứ nguyên của tấm composite lớp $[-45^\circ/45^\circ]_5$

Lý Thuyết	a / h			
	4	5	10	100
CLPT	0.7854	0.6186	0.1585	0.0016
FSDT	0.5485	0.4052	0.1361	0.0016
HSDT-5	0.5485	0.4052	0.1361	0.0016
HSDT-9	0.5607	0.4297	0.1402	0.0016
3D [19]	0.5400	0.3993	0.1351	0.00159



a) Cấu hình đối xứng vuông góc



b) Cấu hình phản xứng xiên góc

Hình 4. Biến thiên tần số không thứ nguyên theo tỷ số a/h



4. Kết luận

Bài báo đã thiết lập lời giải giải tích để phân tích độ võng, trường ứng suất và dao động riêng của tấm composite lớp cấu hình đối xứng vuông góc và phản xứng xiên góc theo các lý thuyết biến dạng cắt khác nhau. Các hệ thức cơ bản và phương trình chủ đạo được xây dựng trên cơ sở trường chuyển vị tổng quát cho tất cả các lý thuyết tấm. Ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang thể hiện qua các lý thuyết biến dạng cắt khác nhau đã được khảo sát và so sánh với lý thuyết đàn hồi 3D.

Thông qua việc khảo sát số trường chuyển vị, ứng suất và tần số dao động riêng của tấm composite lớp theo các lý thuyết tấm khác nhau một lần nữa khẳng định phạm vi áp dụng của các lý thuyết tấm như đã trình bày trong các tài liệu chuyên khảo. Với tấm composite lớp, ảnh hưởng của cấu hình cũng như của biến dạng cắt ngang đến trường chuyển vị, ứng suất và tần số dao động riêng là đáng kể và cần chú ý khi tính toán, thiết kế.

Tài liệu tham khảo

1. Reddy J. (1989), "On the generalization of displacement-based laminate theories", *Appl. Mech. Rev.*, 42(11):213-222.
2. Barbero E., Reddy J., Teply J. (1990), "An accurate determination of stresses in thick laminates using a generalized plate theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(1):1-14.
3. Fares M., Zenkour A. (1999), "Buckling and free vibration of non-homogeneous composite cross-ply laminated plates with various plate theories", *Composite structures*, 44(4):279-287.
4. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. (1959), *Theory of plates and shells*.
5. Wang Q., Liang L., Peng C. (2014), "Analysis of the mechanical properties of TC4-6061 composite plate based on classical laminate theory", *Applied Mechanics & Materials*, 724.
6. Raju I.S., Wang J.T. (1994), "Classical laminate theory models for woven fabric composites", *Journal of Composites, Technology and Research*, 16(4):289-303.
7. Reissner E. (1945), *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*.
8. Mindlin R. (1951), "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates".
9. Sky Y.S. (1961), "Bending and stretching of laminated aeolotropic plates", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 87(6):31-56.
10. Bruno D., Spadea G., Zinno R. (1993), "First-ply failure of laminated composite plates", *Theoretical and applied fracture mechanics*, 19(1):29-48.
11. Whitney J. (1973), "Shear correction factors for orthotropic laminates under static load", *Journal of Applied Mechanics*, 40(1):302-304.
12. Pandya B., Kant T. (1988), "Finite element analysis of laminated composite plates using a higher-order displacement model", *Composites Science and Technology*, 32(2):137-155.
13. Reddy J. (1984), "A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation", *International Journal of solids and structures*, 20(9-10):881-896.
14. Kant T., Swaminathan K. (2002), "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory", *Composite structures*, 56(4):329-344.
15. Reddy J.N. (2004), *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, CRC press.
16. Swaminathan K., Ragounadin D. (2004), "Analytical solutions using a higher-order refined theory for the static analysis of antisymmetric angle-ply composite and sandwich plates", *Composite Structures*, 64(3):405-417.
17. Pagano N. (1970), "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates: Journal of Composite Materials", *Composites*. 4:20-34.
18. Noor A.K. (1973), "Free vibrations of multilayered composite plates", *AIAA journal*, 11(7):1038-1039.
19. Burton W.S. (1990), "Three-dimensional solutions for antisymmetrically laminated anisotropic plates", *Journal of applied mechanics*, 57:182-188.