



XÂY DỰNG MA TRẬN ĐỘ CỨNG ĐỘNG LỰC VÀ VÉC TƠ TẢI TRỌNG QUY VỀ NÚT CỦA PHẦN TỬ DẦM FGM TIMOSHENKO CÓ NHIỀU VẾT NÚT VÀ ỨNG DỤNG VÀO PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA DẦM LIÊN TỤC NHIỀU NHỊP

Trần Văn Liên^{1*}, Ngô Trọng Đức², Nguyễn Tiến Khiêm³

Tóm tắt: Trong bài báo này, các tác giả trình bày các kết quả nghiên cứu mới về việc xây dựng ma trận độ cứng động lực và véctơ tải trọng quy về nút của phần tử dầm Timoshenko có nhiều vết nứt bằng vật liệu FGM theo phương pháp độ cứng động lực. Từ đó các tác giả đã ứng dụng vào phân tích dao động tự do của dầm liên tục nhiều nhịp có nhiều vết nứt bằng vật liệu FGM. So sánh các kết quả tính toán với các kết quả đã công bố cho thấy độ tin cậy của các kết quả nhận được. Các kết quả nghiên cứu này là cơ sở cho việc nghiên cứu dao động tự do và cưỡng bức của các kết cấu hệ thanh cũng như bài toán đánh giá trạng thái kỹ thuật của công trình hiện hữu.

Từ khóa: Dầm Timoshenko; ma trận độ cứng động lực; véctơ tải trọng quy về nút; FGM; vết nứt.

Establishing the dynamic stiffness matrix and the nodal force vector of a multiple cracked functionally graded Timoshenko beam and its application to analysis of free vibration of multi-span cracked beam

Abstract: In this paper the authors presented new results on establishing of the dynamic stiffness matrix and the nodal force vector of a multiple cracked functionally graded material (FGM) beam element based on Timoshenko beam theory, massless spring model of crack and dynamic stiffness method. Thence, the authors analyzed free vibration of a multiple cracked FGM multi-span continuous beam. The theoretical development validated by numerical examples. The results obtained provides an efficient method for free and forced vibration analysis of multiple cracked FGM framed structures and assessment of the behavior of damaged structures.

Keywords: Timoshenko beam; dynamic stiffness matrix; nodal load vector; FGM; crack.

Nhận ngày 20/4/2017, sửa xong 18/5/2017, chấp nhận đăng 30/5/2017
Received: April 20, 2017; revised: May 18, 2017; accepted: May 30, 2017



1. Giới thiệu chung

Nếu như khi phân tích dao động tự do và cưỡng bức của dầm đơn giản bằng vật liệu FGM có khá nhiều phương pháp khác nhau: phương pháp giải tích [1], bán giải tích (Galerkin, Ritz,...) [2], phương pháp cầu phương vi phân [3],... thì khi phân tích kết cấu hệ thanh người ta phải dùng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) [4-10]. Tuy vậy, hầu hết các nghiên cứu này chỉ dừng lại phân tích dao động tự do của dầm FGM nguyên vẹn [4-8], chỉ có rất ít nghiên cứu về dầm FGM có vết nứt. Akbas [9] dùng các hàm Hermite để nghiên cứu dao động tự do của dầm Euler - Bernoulli bằng vật liệu FGM có 1 vết nứt. Yu, Chu [10] đã xây dựng mô hình PTHH (p-version FEM) cho dầm FGM có 1 vết nứt dựa vào các hàm Hermite và đa thức Legendre để nghiên cứu sự thay đổi tần số, dạng dao động riêng và đường mức tần số của dầm theo vị trí và độ sâu vết nứt, từ đó đề xuất thuật toán nhận dạng vị trí và độ sâu vết nứt trên cơ sở nghiên cứu giao điểm của các đường mức tần số.

Do phương pháp PTHH sử dụng các hàm dạng tĩnh vào các bài toán động lực học nên các đặc trưng động lực học như các tần số và dạng dao động riêng bậc cao có sai số lớn so với phương pháp giải tích hay phương pháp độ cứng động lực (ĐCĐL). Trong khi đó, phương pháp ĐCĐL sử dụng các hàm dạng động chính là nghiệm phương trình cân bằng động nên các tần số và dạng dao động riêng thu được là chính xác. Như vậy, việc tìm nghiệm phương trình cân bằng động mặc dù rất khó khăn nhưng là điểm mấu chốt, là điểm khác biệt cơ bản của phương pháp ĐCĐL với phương pháp PTHH.

Các ứng dụng phương pháp ĐCĐL vào phân tích dao động của kết cấu hệ thanh bằng vật liệu FGM mới chỉ dừng lại cho các phần tử dầm nguyên vẹn [11-13]. Gần đây, Khiêm & Huyền [14] đã nghiên cứu dao động tự do của dầm FGM Timoshenko có 1 vết nứt bằng phương pháp giải tích trong miền tần số. Các phương trình dao

¹PGS.TS, Khoa Xây dựng DD&CN, Trường Đại học Xây dựng.

²ThS, Viện Thiết kế, Bộ Quốc Phòng.

³GS.TSKH, Viện Cơ học, Viện Hàn lâm KHCN Việt Nam.

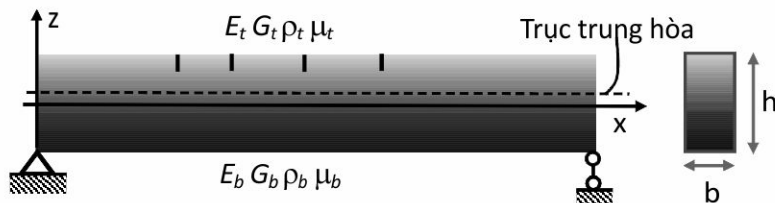
*Tác giả chính. E-mail: lienTV@nuce.edu.vn.

động tự do của dầm FGM chịu uốn có vết nứt được xây dựng trong miền tần số dựa trên mô hình lò xo của vết nứt và tính đến vị trí thực của đường trung hòa [15]. Phát triển các kết quả nghiên cứu ở [14], bài báo này trình bày các kết quả nghiên cứu mới về việc xây dựng ma trận độ cứng động lực và véc tơ tải trọng quy về nứt của phần tử dầm Timoshenko có nhiều vết nứt bằng vật liệu FGM theo phương pháp ĐCĐL. Từ đó các tác giả nghiên cứu dao động tự do của dầm liên tục nhiều nhịp FGM có nhiều vết nứt. Các kết quả nghiên cứu này là cơ sở cho việc nghiên cứu dao động tự do và cưỡng bức của các kết cấu hệ thanh cứng như bài toán đánh giá trạng thái kỹ thuật của công trình hiện hữu.



2. Ma trận độ cứng động lực và véc tơ tải trọng quy về nứt

2.1 Các hệ thức cơ bản



Hình 1. Dầm FGM có nhiều vết nứt

Xét dầm có chiều dài L , tiết diện chữ nhật với kích thước $A = b \times h$ được chế tạo từ vật liệu FGM (Hình 1) với hàm đặc trưng vật liệu có dạng lũy thừa

$$\begin{Bmatrix} E(z) \\ G(z) \\ \rho(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_b \\ G_b \\ \rho_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_t - E_b \\ G_t - G_b \\ \rho_t - \rho_b \end{Bmatrix} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n; \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (1)$$

trong đó: E , G và ρ lần lượt là mô đun đàn hồi, mô đun trượt và mật độ khối lượng; chỉ số t và b ký hiệu vật liệu lớp trên và lớp dưới; z là tọa độ tính từ mặt giữa của dầm. Giả thiết biến dạng bé, các chuyển vị của dầm Timoshenko tại một điểm trên tiết diện có dạng

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - (z - h_0)\theta(x, t); \quad w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (2)$$

trong đó: $u_0(x, t)$, $w_0(x, t)$ là chuyển vị của điểm trên trục trung hòa; h_0 là khoảng cách từ trục trung hòa đến trục x ; θ là góc xoay của tiết diện quanh trục y . Ký hiệu

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{12}, A_{22}) &= \int_A E(z) (1, z - h_0, (z - h_0)^2) dA; \quad A_{33} = \eta \int_A G(z) dA; \\ (I_{11}, I_{12}, I_{22}) &= \int_A \rho(z) (1, z - h_0, (z - h_0)^2) dA. \end{aligned} \quad (3)$$

và các ma trận, véc tơ

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & 0 \\ -A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}; \quad [\Pi] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \\ 0 & -A_{33} & 0 \end{bmatrix}; \quad [C(\omega)] = \begin{bmatrix} \omega^2 I_{11} & -\omega^2 I_{12} & 0 \\ -\omega^2 I_{12} & \omega^2 I_{22} - A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 I_{11} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \{U, \Theta, W\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \{u_0(x, t), \theta(x, t), w_0(x, t)\} e^{-i\omega t} dt; \quad \{P(x, \omega), Q(x, \omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{p(x, t), q(x, t)\} e^{-i\omega t} dt \\ \{z\} &= \{U, \Theta, W\}^T; \quad \{q\} = \{P, Q\}^T \end{aligned}$$

Trong miền tần số, phương trình dao động của dầm có dạng [14]

$$[A]\{z'\} + [\Pi]\{z'\} + [C]\{z\} = -\{q\} \quad (5)$$

Khi không có tải trọng ngoài, phương trình (5) có dạng

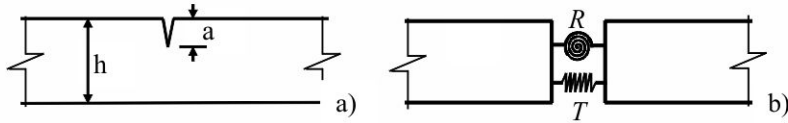
$$[A]\{z''\} + [\Pi]\{z'\} + [C]\{z\} = \{0\} \quad (6)$$

Nghiệm phương trình (6) có thể viết dưới dạng

$$\{z_0(x, \omega)\} = [G(x, \omega)]\{C\} \quad (7)$$

với $\{C\} = (C_1, \dots, C_6)^T$ là các hằng số độc lập và

$$[G(x, \omega)] = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{k_1 x} & \alpha_2 e^{k_2 x} & \alpha_3 e^{k_3 x} & \alpha_1 e^{-k_1 x} & \alpha_2 e^{-k_2 x} & \alpha_3 e^{-k_3 x} \\ e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} & e^{-k_1 x} & e^{-k_2 x} & e^{-k_3 x} \\ \beta_1 e^{k_1 x} & \beta_2 e^{k_2 x} & \beta_3 e^{k_3 x} & -\beta_1 e^{-k_1 x} & -\beta_2 e^{-k_2 x} & -\beta_3 e^{-k_3 x} \end{bmatrix} \quad (8)$$



Hình 2. Dầm FGM với vết nứt mở và mô hình hai lò xo tương đương

Xét dầm có vết nứt tại tiết diện có tọa độ e . Vết nứt được mô hình hóa bằng hai lò xo: lò xo dọc có độ cứng T và lò xo xoắn có độ cứng R (Hình 2). Điều kiện liên tục tại vị trí vết nứt là

$$U(e+0) = U(e-0) + \gamma_1 U'_x(e); \Theta(e+0) = \Theta(e-0) + \gamma_2 \Theta'_x(e); W(e+0) = W(e-0) \quad (9)$$

$$U'_x(e+0) = U'_x(e-0); \Theta'_x(e+0) = \Theta'_x(e-0); W'_x(e+0) = W'_x(e-0) + \gamma_2 \Theta'_x(e)$$

Các tham số γ_1, γ_2 trong (9) là hàm của các tham số vật liệu như mô đun đàn hồi, chiều cao dầm, hệ số nở ngang Poisson, ... bao gồm cả trường hợp dầm đồng nhất $E_t = E_b = E_0$ hay $R_E = 1$

$$\gamma_1 = A_{11} / T = 2\pi(1-\nu^2)h\sigma_1 f_1(z); \gamma_2 = A_{22} / R = 6\pi(1-\nu^2)h\sigma_2 f_2(z) \quad (10)$$

trong đó [14]

$$\sigma_1(R_E, n) = \frac{2(R_E + n)}{(R_E + 1)(1 + n)}; \sigma_2(R_E, n) = \frac{24}{R_E + 1} \left(\frac{3R_E + n}{3(3 + n)} - \frac{2R_E + n}{2 + n} \alpha + \frac{R_E + n}{1 + n} \alpha^2 \right); R_E = \frac{E_t}{E_b}$$

$$f_1(z) = z^2(0.6272 - 0.17248z + 5.92134z^2 - 10.7054z^3 + 31.5685z^4 - 67.47z^5 + 139.123z^6 - 146.682z^7 + 92.3552z^8)$$

$$f_2(z) = z^2(0.6272 - 1.04533z + 4.5948z^2 - 9.9736z^3 + 20.2948z^4 - 33.0351z^5 + 47.1063z^6 - 40.7556z^7 + 19.6z^8)$$

Ký hiệu $\{z_c(x)\}$ là nghiệm riêng của (6) thỏa mãn các điều kiện ban đầu

$$\{z_c(0)\} = (\gamma_1 U'_x(e), \gamma_2 \Theta'_x(e), 0)^T; \{z'_c(0)\} = (0, 0, \gamma_2 \Theta'_x(e))^T \quad (12)$$

$$\text{và } \{z'_0(e)\} = (U'_0(e) \quad \Theta'_0(e) \quad W'_0(e))^T \quad (13)$$

Ta nhận được

$$\{z_c(x)\} = [\Phi(x)][\Sigma] \{z'_0(e)\} = [G_c(x)] \{z'_0(e)\} \quad (14)$$

trong đó $[G_c(x)]$ là ma trận 3×3

$$[G_c(x)] = [\Phi(x)][\Sigma] \quad (15)$$

với

$$[\Phi(x)] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cosh k_1 x & \alpha_2 \cosh k_2 x & \alpha_3 \cosh k_3 x \\ \cosh k_1 x & \cosh k_2 x & \cosh k_3 x \\ \beta_1 \sinh k_1 x & \beta_2 \sinh k_2 x & \beta_3 \sinh k_3 x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

$$\delta_{11} = (k_3 \beta_3 - k_2 \beta_2) / \Delta; \delta_{12} = (\alpha_3 k_2 \beta_2 - \alpha_2 k_3 \beta_3) / \Delta; \delta_{13} = (\alpha_2 - \alpha_3) / \Delta$$

$$\delta_{21} = (k_1 \beta_1 - k_3 \beta_3) / \Delta; \delta_{22} = (\alpha_1 k_3 \beta_3 - \alpha_3 k_1 \beta_1) / \Delta; \delta_{23} = (\alpha_3 - \alpha_1) / \Delta$$

$$\delta_{31} = (k_2 \beta_2 - k_1 \beta_1) / \Delta; \delta_{32} = (\alpha_2 k_1 \beta_1 - \alpha_1 k_2 \beta_2) / \Delta; \delta_{33} = (\alpha_1 - \alpha_2) / \Delta$$

$$\Delta = k_1 \beta_1 (\alpha_2 - \alpha_3) + k_2 \beta_2 (\alpha_3 - \alpha_1) + k_3 \beta_3 (\alpha_1 - \alpha_2)$$

và

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Ta đưa vào ma trận hàm vết nứt

$$[\bar{G}(x)] = \begin{cases} [G_c(x)] : x > 0 \\ [0] : x \leq 0 \end{cases}; [\bar{G}'(x)] = \begin{cases} [G'_c(x)] : x > 0 \\ [0] : x \leq 0 \end{cases} \quad (18)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (6) thỏa mãn điều kiện liên tục (9) tại vị trí vết nứt có thể viết dưới dạng

$$\{z_c(x)\} = \{z_0(x)\} + [\bar{G}(x - e)]\{z'_0(e)\} \quad (19)$$

Biểu thức thứ nhất là nghiệm bài toán dầm không có vết nứt, biểu thức thứ hai là nghiệm bổ sung do sự xuất hiện vết nứt trên dầm. Đối với dầm có nhiều vết nứt, từ (19) ta có:

$$\begin{aligned} \{z_1(x)\} &= \{z_0(x)\} + [\bar{G}(x - e_1)]\{z'_0(e_1)\} = \{z_0(x)\} + [\bar{G}(x - e_1)]\{\mu_1\}; \{\mu_1\} = \{z'_0(e_1)\} \\ \{z_2(x)\} &= \{z_1(x)\} + [\bar{G}(x - e_2)]\{z'_1(e_2)\} = \{z_0(x)\} + [\bar{G}(x - e_1)]\{\mu_1\} + [\bar{G}(x - e_2)]\{\{z'_0(e_2)\} + [\bar{G}'(e_2 - e_1)]\{\mu_1\}\} \\ &= \{z_0(x)\} + [\bar{G}(x - e_1)]\{\mu_1\} + [\bar{G}(x - e_2)]\{\mu_2\}; \{\mu_2\} = \{z'_0(e_2)\} + [\bar{G}'(e_2 - e_1)]\{\mu_1\} \\ \{z_3(x)\} &= \{z_2(x)\} + [\bar{G}(x - e_3)]\{z'_2(e_3)\} \\ &= \{z_0(x)\} + [\bar{G}(x - e_1)]\{\mu_1\} + [\bar{G}(x - e_2)]\{\mu_2\} + [\bar{G}(x - e_3)]\{\{z'_0(e_3)\} + [\bar{G}'(e_3 - e_1)]\{\mu_1\} + [\bar{G}'(e_3 - e_2)]\{\mu_2\}\} \\ &= \{z_0(x)\} + [\bar{G}(x - e_1)]\{\mu_1\} + [\bar{G}(x - e_2)]\{\mu_2\} + [\bar{G}(x - e_3)]\{\mu_3\}; \{\mu_3\} = \{z'_0(e_3)\} + [\bar{G}'(e_3 - e_1)]\{\mu_1\} + [\bar{G}'(e_3 - e_2)]\{\mu_2\} \end{aligned}$$

Như vậy, ta có thể biểu diễn nghiệm phương trình (6) của dầm có n vết nứt dưới dạng truy hồi

$$\{z_c(x)\} = \{z_0(x)\} + \sum_{j=1}^n [\bar{G}(x - e_j)]\{\mu_j\} \quad (20)$$

với $\{\mu_j\}$ là véc tơ 3×1

$$\{\mu_j\} = \{z'_0(e_j)\} + \sum_{k=1}^{j-1} [\bar{G}'(e_j - e_k)]\{\mu_k\}; j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (21)$$

2.2 Ma trận độ cứng động lực và véc tơ tải trọng quy về nứt

Thay biểu thức nghiệm tổng quát (7) vào (19), ta nhận được

$$\{z_c(x)\} = ([G(x, \omega)] + [\bar{G}(x - e)] \cdot [G'(e, \omega)])\{C\} = [\Psi(x, \omega)]\{C\} \quad (22)$$

trong đó: $[\Psi(x, \omega)]$ là ma trận trường chuyển vị của phần tử

$$[\Psi(x, \omega)] = [G(x, \omega)] + [\bar{G}(x - e)] \cdot [G'(e, \omega)] \quad (23)$$

Dựa trên hệ thức truy hồi (20) - (21), ta có thể biểu diễn nghiệm tổng quát của phương trình (6) cho phần tử dầm có n vết nứt như sau

$$\{z_c(x)\} = \left([G(x, \omega)] + \sum_{j=1}^n [\bar{G}(x - e_j)] [\tilde{\chi}_j] \right) \{C\} = [\Psi(x, \omega)]\{C\} \quad (24)$$

trong đó

$$[\Psi(x, \omega)] = [G(x, \omega)] + \sum_{j=1}^n [\bar{G}(x - e_j)] \cdot [\tilde{\chi}_j] \quad (25)$$

và $[\tilde{\chi}_j]$ là ma trận 3×6

$$[\tilde{\chi}_j] = [G'(e_j)] + \sum_{k=1}^{j-1} [\bar{G}'(e_j - e_k)] \cdot [\tilde{\chi}_k]; j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (26)$$

Nghiệm riêng của phương trình (5) được biểu diễn dưới dạng

$$\{z_q(x, \omega)\} = \int_0^x [H(x - \tau, \omega)] \{q(\tau, \omega)\} d\tau \quad (27)$$

trong đó: $[H(x, \omega)]$ là ma trận hàm truyền thỏa mãn hệ phương trình

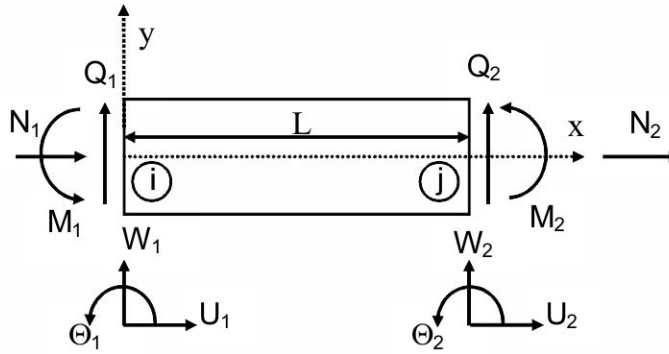
$$[A] \cdot [H''] + [B] \cdot [H'] + [C] \cdot [H] = [0] \quad (28)$$

với các điều kiện ban đầu

$$[H(0)] = [0]; [H'(0)] = [A]^{-1} \quad (29)$$

Nghiệm đầy đủ của phương trình không thuần nhất (5) có thể biểu diễn dưới dạng tổng của nghiệm tổng quát (24) và một nghiệm riêng (27)

$$\{\tilde{z}_c(x, \omega)\} = \{z_c(x, \omega)\} - \{z_q(x, \omega)\} = [\Psi(x, \omega)]\{C\} - \{z_q(x, \omega)\} \quad (30)$$



Hình 3. Phần tử thanh chịu uốn và kéo, nén đồng thời

Ký hiệu các tọa độ nút, lực nút của phần tử thanh chịu uốn và kéo, nén đồng thời như Hình 3

$$\{\hat{\mathbf{U}}_e\} = \{U_1, \Theta_1, W_1, U_2, \Theta_2, W_2\}^T; \{\mathbf{P}_e\} = \{N_1, M_1, Q_1, N_2, M_2, Q_2\}^T \quad (31)$$

trong đó

$$\begin{aligned} U_1 &= z_1(0, \omega); \Theta_1 = z_2(0, \omega); W_1 = z_3(0, \omega) \\ U_2 &= z_1(L, \omega); \Theta_2 = z_2(L, \omega); W_2 = z_3(L, \omega) \\ N_1 &= -(A_{11}\partial_x z_1 - A_{12}\partial_x z_2)_{x=0}; M_1 = -(A_{22}\partial_x z_2 - A_{12}\partial_x z_1)_{x=0}; Q_1 = -A_{33}(\partial_x z_3 - z_2)_{x=0} \\ N_2 &= (A_{11}\partial_x z_1 - A_{12}\partial_x z_2)_{x=L}; M_2 = (A_{22}\partial_x z_2 - A_{12}\partial_x z_1)_{x=L}; Q_2 = A_{33}(\partial_x z_3 - z_2)_{x=L} \end{aligned} \quad (32)$$

Áp dụng các công thức (32) vào (30), ta có được

$$\{\hat{\mathbf{U}}_e\} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(0, \omega) \\ \mathbf{\Psi}(L, \omega) \end{bmatrix} \cdot \{\mathbf{C}\} - \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{z_q(L)\} \end{bmatrix}; \{\mathbf{P}_e\} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_F(\mathbf{\Psi})_{x=0} \\ \mathbf{B}_F(\mathbf{\Psi})_{x=L} \end{bmatrix} \cdot \{\mathbf{C}\} - \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_F(\mathbf{z}_q)_{x=0} \\ \mathbf{B}_F(\mathbf{z}_q)_{x=L} \end{bmatrix} \quad (33)$$

với $[\mathbf{B}_F]$ là toán tử ma trận

$$[\mathbf{B}_F] = \begin{bmatrix} A_{11}\partial_x & -A_{12}\partial_x & 0 \\ A_{12}\partial_x & A_{22}\partial_x & 0 \\ 0 & -A_{33} & A_{33}\partial_x \end{bmatrix} \quad (34)$$

Khử véc tơ hằng số $\{\mathbf{C}\}$ trong (33), ta nhận được

$$\begin{aligned} \{\mathbf{P}_e\} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_F(\mathbf{\Psi})_{x=0} \\ \mathbf{B}_F(\mathbf{\Psi})_{x=L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(0, \omega) \\ \mathbf{\Psi}(L, \omega) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \{\hat{\mathbf{U}}_e\} + \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_F(\mathbf{\Psi})_{x=0} \\ \mathbf{B}_F(\mathbf{\Psi})_{x=L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(0, \omega) \\ \mathbf{\Psi}(L, \omega) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{z_q(L)\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_F(\mathbf{z}_q)_{x=0} \\ \mathbf{B}_F(\mathbf{z}_q)_{x=L} \end{bmatrix} \\ \text{hay } \{\mathbf{P}_e(\omega)\} &= [\hat{\mathbf{K}}_e(\omega)] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}_e\} + \{\hat{\mathbf{F}}_e\} \end{aligned} \quad (35)$$

trong đó: $[\hat{\mathbf{K}}_e]$ và $\{\hat{\mathbf{F}}_e\}$ lần lượt là ma trận độ cứng động lực và véc tơ tải trọng nút của phần tử dầm FGM có nhiều vết nứt

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{K}}_e] &= \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_F(\mathbf{\Psi})_{x=0} \\ \mathbf{B}_F(\mathbf{\Psi})_{x=L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(0, \omega) \\ \mathbf{\Psi}(L, \omega) \end{bmatrix}^{-1} \\ \{\hat{\mathbf{F}}_e\} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_F(\mathbf{\Psi})_{x=0} \\ \mathbf{B}_F(\mathbf{\Psi})_{x=L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(0, \omega) \\ \mathbf{\Psi}(L, \omega) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{z_q(L)\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_F(\mathbf{z}_q)_{x=0} \\ \mathbf{B}_F(\mathbf{z}_q)_{x=L} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

Sau đó, việc lắp ghép ma trận độ cứng động lực và véc tơ tải trọng quy về nút của phần tử vào ma trận độ cứng động lực và véc tơ tải trọng quy về nút của cả kết cấu được thực hiện không khác gì phương pháp phần tử hữu hạn thông thường.

Phương trình dao động tự do của hệ là

$$\hat{\mathbf{K}}(\omega) \cdot \{\hat{\mathbf{U}}\} = \{0\} \quad (37)$$

Các tần số riêng $\{\omega\} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ là nghiệm của phương trình

$$\det[\hat{\mathbf{K}}(\omega)] = 0 \quad (38)$$

Tương ứng với mỗi tần số riêng j ta nhận được dạng dao động riêng tương ứng

$$\{\phi_j(x)\} = C_j^0 [\mathbf{\Psi}(x, \omega)] \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}(0, \omega) \\ \mathbf{\Psi}(L, \omega) \end{bmatrix}^{-1} \{\hat{\mathbf{U}}_j\} \quad (39)$$

trong đó: C_j^0 là hằng số tùy ý và $\{\hat{U}_j\}$ là nghiệm chuẩn hóa của phương trình (37) ứng với tần số ω_j .

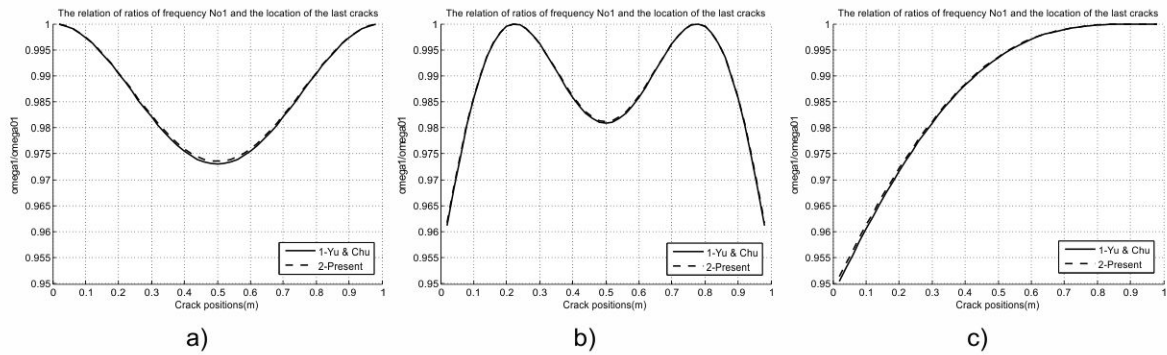


3. Phân tích dầm FGM liên tục nhiều nhịp có nhiều vết nứt

3.1 So sánh với các kết quả đã công bố

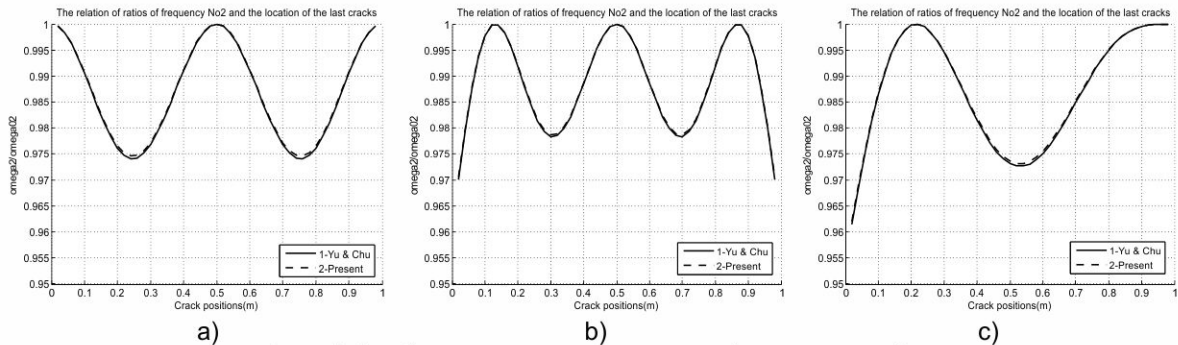
a) Xét dầm FGM có các tham số hình học $L=1.0m$, $b=0.1m$, $h=0.05m$ và vật liệu: $E_t=70GPa$, $\rho_t=2780kg/m^3$, $\mu_t=0.33$, $E_b/E_t=0.2$, $\rho_b=7800kg/m^3$, $\mu_b=0.33$, $n=0.1$ [7].

Hình 4 và 5 so sánh kết quả khảo sát sự thay đổi của tỷ số giữa tần số dao động riêng thứ nhất (và thứ hai) của dầm FGM có 1 vết nứt và độ sâu 20% với tần số dao động riêng thứ nhất (và thứ hai) của dầm FGM không nứt tương ứng khi vị trí vết nứt thay đổi dọc theo chiều dài dầm (đường đứt nét) với kết quả đã công bố của Yu & Chu [7] (đường liền nét) cho dầm: a) đơn giản, b) hai đầu ngàm và c) công xôn. Rõ ràng các kết quả tính toán hiện tại trùng khớp với các kết quả đã công bố của [7].



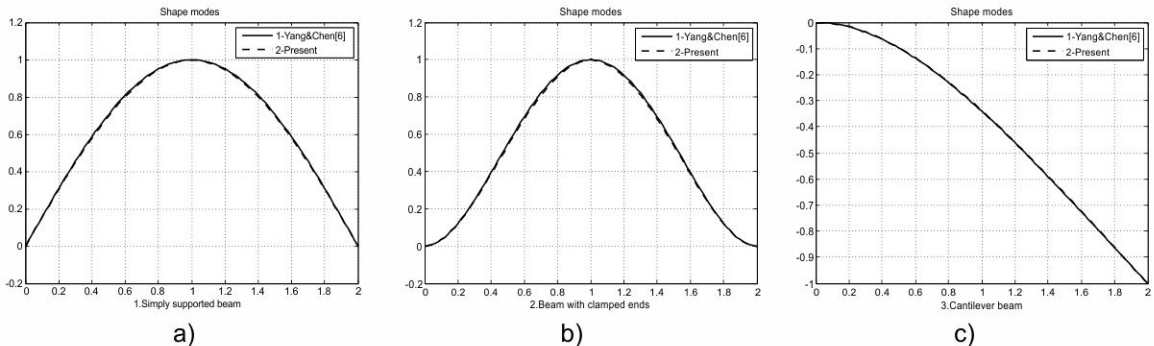
Hình 4. Sự thay đổi tỷ số tần số dao động riêng thứ nhất của dầm FGM có 1 vết nứt và độ sâu 20% với tần số dao động riêng thứ nhất của dầm FGM không nứt khi vị trí vết nứt thay đổi dọc chiều dài dầm:

a) Dầm đơn giản, b) Dầm hai đầu ngàm, c) Dầm công xôn



Hình 5. Sự thay đổi tỷ số tần số dao động riêng thứ hai của dầm FGM có 1 vết nứt và độ sâu 20% với tần số dao động riêng thứ hai của dầm FGM không nứt khi vị trí vết nứt thay đổi dọc chiều dài dầm:

a) Dầm đơn giản, b) Dầm hai đầu ngàm, c) Dầm công xôn



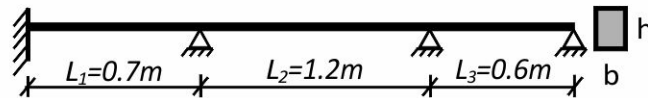
Hình 6. So sánh dạng dao động riêng cơ bản của dầm FGM có 1 vết nứt và điều kiện biên:

2 đầu gối cố định, 2 đầu ngàm và công xôn với kết quả của [16]

b) Xét dầm FGM có các tham số vật liệu: $E_t=70\text{GPa}$, $\rho_t=\rho_b=2780\text{kg/m}^3$, $\mu_t=0.33$, $E_b/E_t=0.2$; $n=1$; kích thước hình học: $L=2.0\text{m}$, $b=0.1\text{m}$, $h=0.1\text{m}$. Dầm có 1 vết nứt tại vị trí 1.0m với độ sâu $a/h=20\%$ [16].

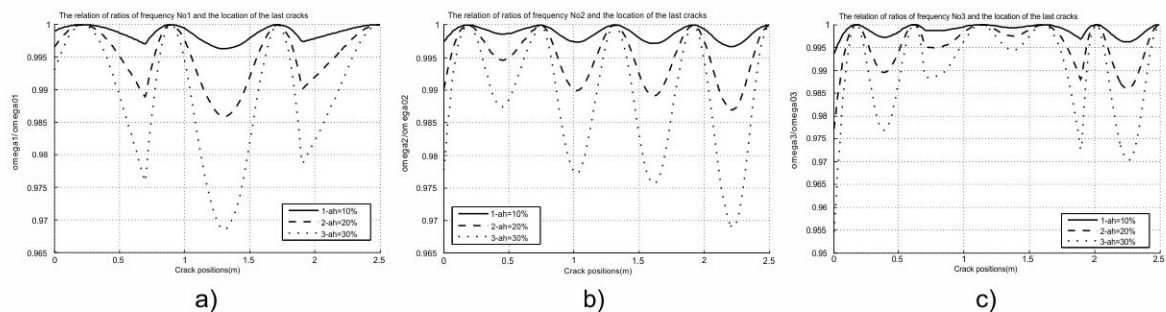
Hình 6 là so sánh kết quả tính dạng dao động riêng cơ bản của dầm FGM có 1 vết nứt theo [16] và theo lý thuyết trên đây với các điều kiện biên: 2 đầu gối tựa cố định, 2 đầu ngàm và công xôn. Ta nhận thấy, các kết quả tính là trùng nhau.

3.2. Phân tích dầm FGM liên tục nhiều nhịp có nhiều vết nứt



Hình 7. Dầm liên tục

Xét dầm FGM liên tục nhiều nhịp có tiết diện chữ nhật $b \times h = 0.1\text{m} \times 0.1\text{m}$ với các tham số vật liệu: $E_t=70\text{GPa}$; $\rho_t=2780\text{kg/m}^3$; $\mu_t=0.33$; $E_b=350\text{GPa}$; $\rho_b=7800\text{kg/m}^3$; $\mu_b=0.33$ và số mũ đặc trưng vật liệu $n=0.5$ (Hình 7).



Hình 8. Ảnh hưởng của vị trí vết nứt với độ sâu 10%, 20%, 30% đến tỷ số tần số của dầm FGM có 1 vết nứt với dầm không nứt tương ứng

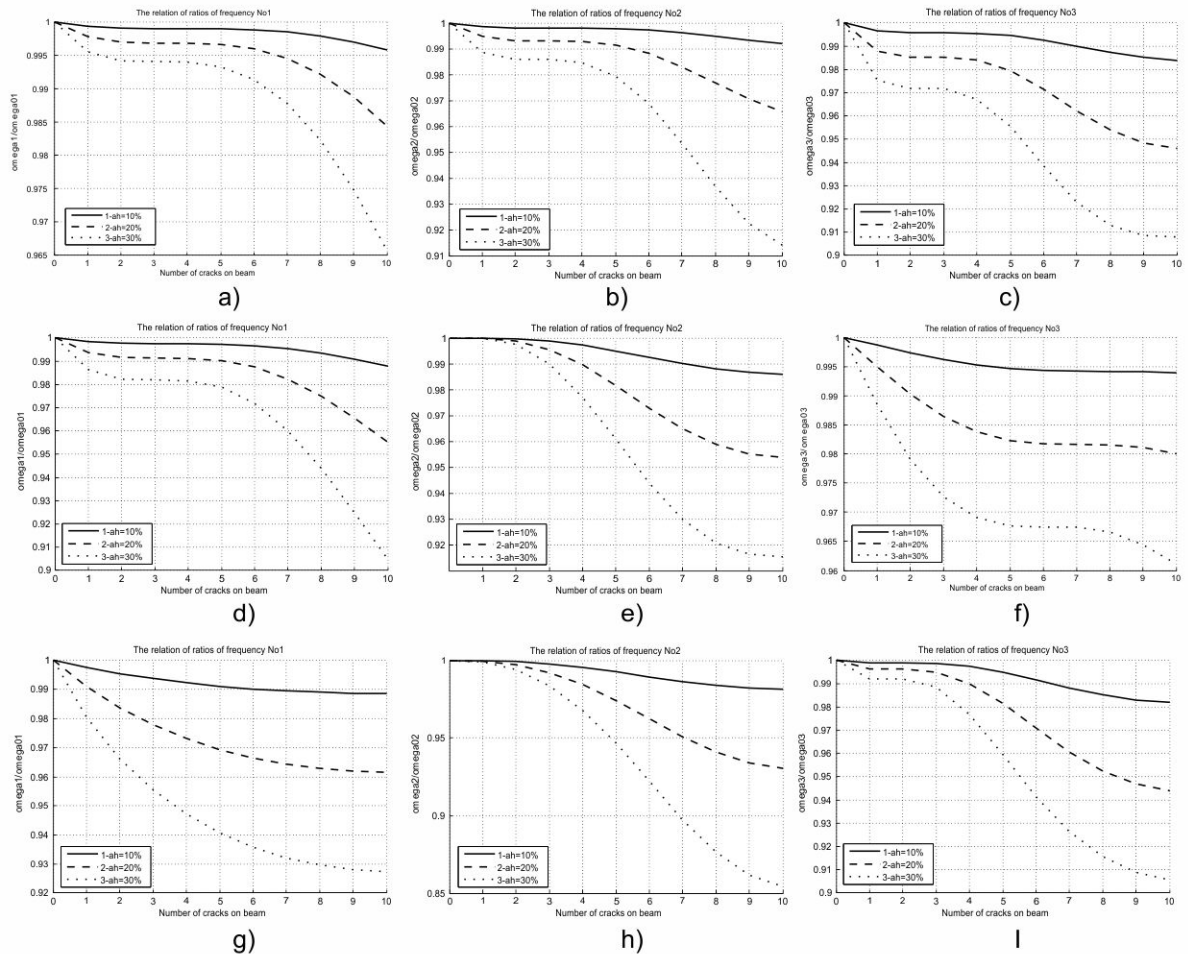
Hình 8 thể hiện sự thay đổi tỷ số tần số giữa 3 tần số đầu tiên của dầm liên tục nhiều nhịp có 1 vết nứt với vị trí thay đổi, độ sâu vết nứt là 10%, 20%, 30% chiều cao dầm với tần số của dầm không nứt tương ứng. Ta nhận thấy rằng:

a) Vết nứt trên từng nhịp khác nhau có ảnh hưởng đến các tần số khác nhau: Tần số thứ nhất thay đổi nhiều khi vết nứt ở nhịp thứ 2 có 2 đầu liên kết gối tựa và dài hơn nhịp thứ 3. Tần số thứ 2 thay đổi nhiều khi vết nứt gần gối di động. Tần số thứ 3 lại thay đổi nhiều nhất khi vết nứt ở gần ngàm của nhịp thứ 1.

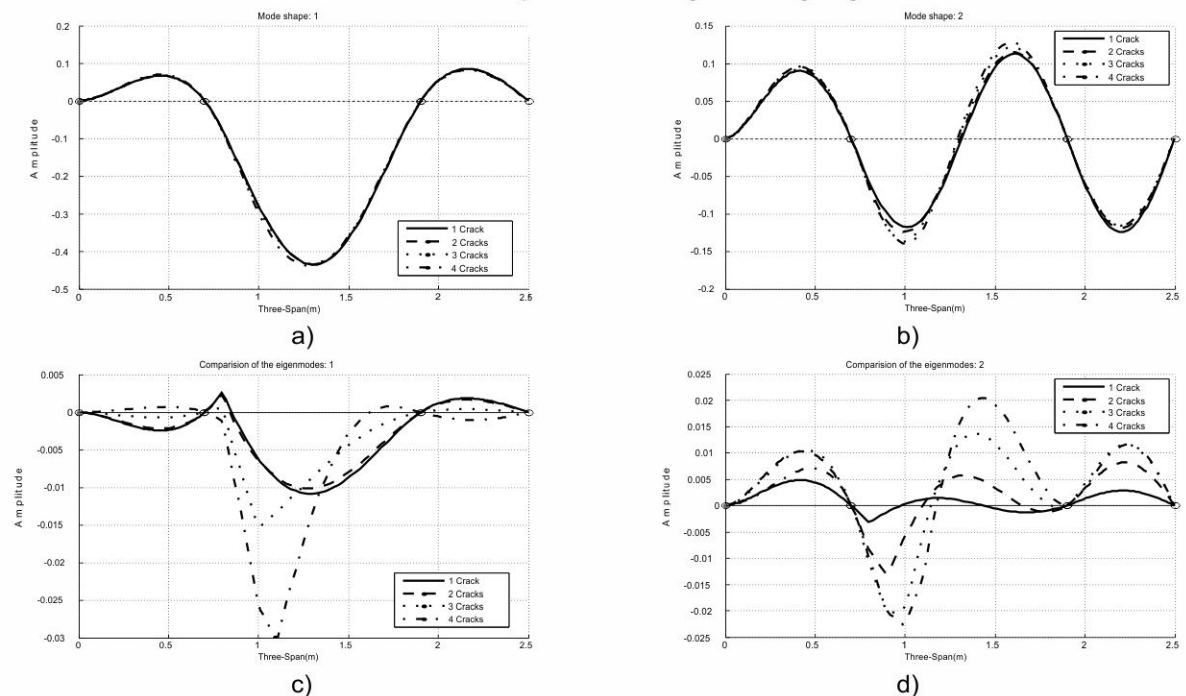
b) Cũng như dầm đơn giản, trên dầm liên tục nhiều nhịp cũng tồn tại những điểm tới hạn đối với từng tần số. Vị trí các điểm tính từ đầu dầm là: Với tần số thứ nhất: 0.22m , 0.895m , 1.72m ; Với tần số thứ hai: 0.185m , 0.74m , 1.31m , 1.915m ; Với tần số thứ ba: 0.17m , 0.62m , 1.134m , 1.61m , 2.011m .

Hình 9 thể hiện sự thay đổi ba tỷ số tần số dao động riêng đầu tiên của dầm FGM có 1 đến 10 vết nứt với độ sâu 10%, 20%, 30% và dầm không nứt tương ứng trên các nhịp 1 (Hình 6a-c), 2 (Hình 6d-f) và 3 (Hình 6g-i). Trong đó vị trí vết nứt đầu tiên trên các nhịp đều cách gối bên trái là 0.05m , khoảng cách giữa các vết nứt đều là 0.05m . Ta thấy, tần số thứ nhất thay đổi nhiều khi số vết nứt tăng trên nhịp thứ hai, tần số thứ hai thay đổi nhiều khi số vết nứt tăng trên nhịp thứ ba trong khi tần số thứ ba thay đổi nhiều khi số vết nứt tăng trên nhịp thứ nhất và ba.

Hình 10a-b thể hiện sự thay đổi của 2 dạng dao động riêng đầu tiên của dầm liên tục nhiều nhịp có số lượng vết nứt tăng dần từ 1 đến 4 vết nứt trên nhịp thứ 2. Các vết nứt cách đều nhau 0.1m với vị trí vết nứt đầu tiên cách gối trái 0.1m và độ sâu vết nứt đều là 30%. Hình 10c-d là hiệu số của hai dạng dao động riêng của dầm không có vết nứt và dạng dao động riêng của dầm không có vết nứt tương ứng. Từ các hình vẽ cho thấy, khi số lượng vết nứt tăng lên, dạng dao động riêng của dầm có thay đổi nhưng chỉ thay đổi chủ yếu trên nhịp dầm có vết nứt, tại đó dạng dao động có những gẫy khúc ở vị trí vết nứt. Còn trên các nhịp liền kề, tuy biên độ dao động riêng có thay đổi nhưng dạng dao động vẫn là đường cong trơn.



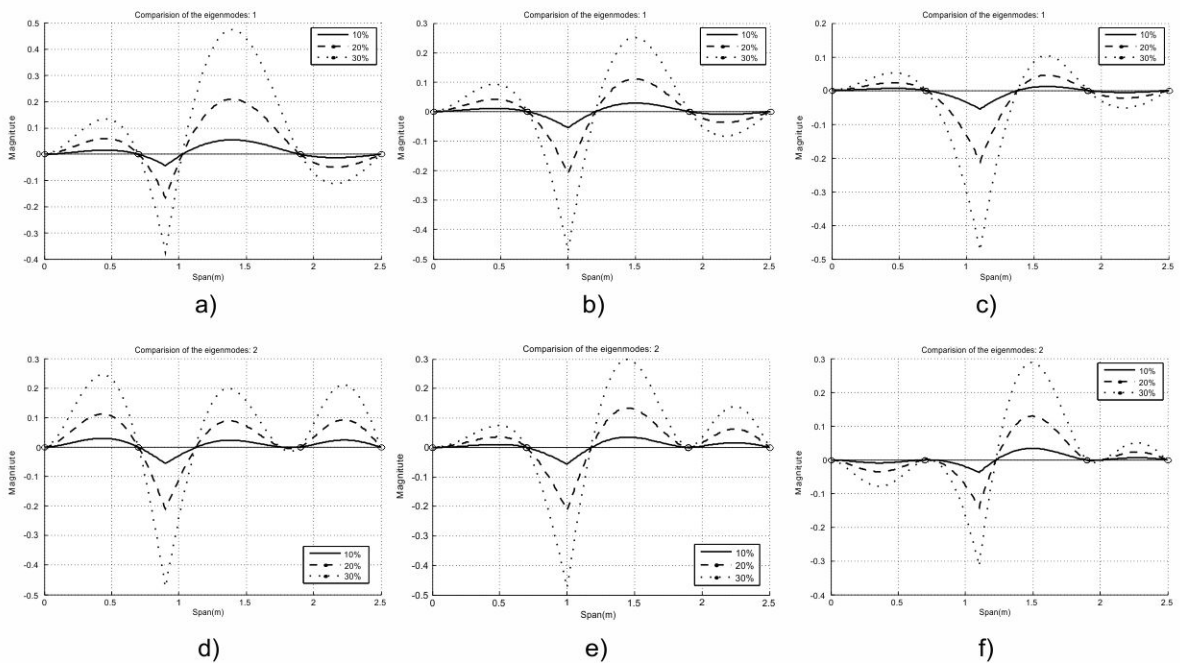
Hình 9. Sự thay đổi tỷ số tần số dao động đầu tiên của dầm FGM có 1 đến 10 vết nứt độ sâu 10%, 20%, 30% trên các nhịp với dầm không nứt tương ứng



Hình 10. Sự thay đổi 2 dạng dao động riêng đầu tiên của dầm FGM nhiều nhịp có số lượng vết nứt tăng dần từ 1 đến 4 trên nhịp thứ hai.

Hình 11 là hiệu số dạng dao động thứ 1 (Hình 11a-c) và thứ 2 (Hình 11d-f) của dầm có 1 vết nứt trên nhịp thứ 2 với vị trí vết nứt thay đổi lần lượt là 0.2m, 0.3m, 0.4m tính từ nút thứ hai bên trái, độ sâu vết nứt lần lượt là 10%, 20%, 30%. Ta có một số nhận xét:

- Tại vị trí vết nứt, dạng dao động riêng có sự thay đổi đột ngột (đỉnh nhọn) nhưng độ lớn của sự thay đổi biên độ dạng dao động riêng tại vị trí vết nứt không phải là lớn nhất.
- Độ lớn của sự thay đổi biên độ dạng dao động riêng tăng lên khi độ sâu vết nứt tăng lên.
- Tại nhịp xuất hiện vết nứt dạng dao động riêng có sự thay đổi đột ngột, nhưng ở các nhịp khác sự thay đổi này lại là liên tục, đồng thời sự thay đổi cũng là tương đối lớn ở các nhịp liền kề.
- Có những vị trí vết nứt không làm thay đổi biên độ dạng dao động riêng của một hay nhiều điểm trên dầm. Ví dụ: vết nứt tại vị trí 0.2m từ đầu nhịp thứ hai không làm thay đổi biên độ dao động riêng tại vị trí 1.05m của dạng dao động riêng thứ nhất (Hình 11a) hay vị trí 1.12m của dạng dao động riêng thứ hai (Hình 11d). Các điểm như vậy gọi là các điểm bất biến của dạng dao động riêng để phân biệt với các điểm nút của dạng dao động riêng, tại đó dạng dao động riêng bằng 0.



Hình 11. Hiệu số 2 dạng dao động riêng đầu tiên của dầm nhiều nhịp có vị trí vết nứt thay đổi trên nhịp thứ hai của dầm FGM liên tục nhiều nhịp



4. Kết luận

Trong bài báo này, các tác giả đã xây dựng được ma trận độ cứng động lực và véc tơ tải trọng quy về nút của một phần tử dầm FGM có nhiều vết nứt dựa trên mô hình dầm Timoshenko, quy luật lũy thừa của vật liệu FGM và mô hình lò xo của vết nứt theo phương pháp độ cứng động lực có tính đến vị trí thực của đường trung hòa.

Từ đó các tác giả đã ứng dụng vào phân tích dao động tự do của dầm liên tục nhiều nhịp có nhiều vết nứt bằng vật liệu FGM. Các tác giả đã chỉ ra sự tồn tại của các điểm tới hạn cho các tần số dao động khác nhau. Các dạng dao động riêng nhạy cảm với vết nứt hơn và phụ thuộc nhiều vào đặc trưng vật liệu và kích thước hình học của dầm. Tại các vết nứt, dạng dao động riêng có sự thay đổi đột ngột (dạng đỉnh nhọn) và vết nứt càng sâu thì sự thay đổi hiệu số dạng dao động riêng càng lớn.

Các kết quả nhận được trên đây là cơ sở cho các nghiên cứu tiếp theo nhằm xây dựng các phương pháp nhận dạng số lượng, vị trí và độ sâu vết nứt trong các kết cấu hệ thanh.

Tài liệu tham khảo

1. Zhong Z., Yu T. (2007), "Analytical solution of a cantilever functionally graded beam", *Composites Science and Technology*, 67:481-488
2. Chen D., Yang J., Kitipornchai S. (2016), "Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, 108-109, 14-22
3. Xiang H.J., Yang J. (2008), "Free and forced vibration of a laminated FGM Timoshenko beam of variable thickness under heat conduction", *Composites: Part B*, 39:292-303.
4. Azadi M. (2010), "Free and forced vibration analysis of FG beam considering temperature dependency of material properties", *Journal of Mechanical Science and Technology*, 25(1):69-80.
5. Akbas S.D. (2016), "Forced vibration responses of Functionally graded viscoelastic beams under thermal environment", *International Journal of innovative research in science, engineering and technology*, 5.
6. Trinh T.H., Gan B.S., Nguyen D.K. (2015), "Finite Element Analysis of Non-uniform Beam Made of Axially FGM Subjected to Multiple Loads", *Applied Mechanics and Materials*, 764-765:1170-1174
7. Ziou H., Guenfoud H., Guenfoud M. (2013), "Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method", *Int. J. Structural Engineering*, 7(3).
8. Vo T.P., Thai H.T., Nguyen T.K., Inam F. (2014), "Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory", *Meccanica*, 49:155-168, DOI 10.1007/s11012-013-9780-1
9. Akbas S.D. (2013), "Free Vibration Characteristics of Edge Cracked Functionally Graded Beams by Using Finite Element Method", *International Journal of Engineering Trends and Technology*, 4(10).
10. Yu Z.G., Chu F.L. (2009), "Identification of crack in functionally graded material beams using the p-version of finite element method", *Journal of Sound and Vibration*, 325 (1-2):69-84
11. Su H., Banerjee J.R. (2015), Development of dynamic stiffness method for free vibration of functionally graded Timoshenko beam, *Computers & Structures*, 81:1915-22.
12. Khiem N.T., Kien N.D., Huyen N.N. (2014), "Vibration theory of FGM beam in the frequency domain", *Proceedings of National Conference on Engineering Mechanics celebrating 35th Anniversary of the Institute of Mechanics*, VAST, April 9, 1(93-98) (in Vietnamese).
13. Lien T.V., Duc N.T. and Khiem N.T. (2016), "Free vibration analysis of functionally graded Timoshenko beam using dynamic stiffness method", *Journal of Science and Technology in Civil Engineering*, National University of Civil Engineering, 31.
14. Khiem N.T., Huyen N.N. (2016), "A method for crack identification in functionally graded Timoshenko beam", *Nondestructive Testing and Evaluation*, DOI:10.1080/10589759.2016.1226304
15. Eltaher M.A., Alshorbagy A.E., Mahmoud F.F. (2013), "Determination of neutral axis position and its effect on natural frequencies of functionally graded macro/nanobeams", *Composite Structures*, 99:193-201.
16. Yang J., Chen Y. (2008), "Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks", *Composite Structure*, 83:48-60.