



PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CỦA DẦM TIMOSHENKO BẰNG VẬT LIỆU FGM CÓ NHIỀU VẾT NỨT

Trần Văn Liên^{1*}, Nguyễn Tiến Khiêm², Ngô Trọng Đức³

Tóm tắt: Trong bài báo này, các tác giả trình bày các kết quả nghiên cứu mới về phân tích dao động cưỡng bức của dầm Timoshenko có nhiều vết nứt bằng vật liệu FGM. Các phương trình dao động của dầm FGM có nhiều vết nứt được xây dựng trong miền tần số dựa trên mô hình lò xo của vết nứt có tính đến vị trí thực của đường trung hòa. Các tác giả đã nhận được biểu thức nghiệm đầy đủ của bài toán dao động cưỡng bức của dầm FGM chịu tải trọng dọc và ngang. So sánh với các kết quả đã công bố cho thấy độ tin cậy của các kết quả nhận được. Các nghiên cứu này là cơ sở cho việc phát triển các phương pháp nhận dạng hư hỏng của dầm FGM dựa trên các dao động cưỡng bức thu được.

Từ khóa: Dầm Timoshenko; FGM; vết nứt; mô hình lò xo; dao động cưỡng bức.

Forced vibration analysis of a multiple cracked functionally graded Timoshenko beam

Abstract: In this paper the authors analyzed forced vibration of multiple cracked functionally graded material (FGM) beam based on Timoshenko beam theory, massless spring model of crack. Material properties vary continuously throughout the thickness direction according to the volume fraction constituent defined by power law function. Consistent theory of forced vibration is formulated for multiple cracked FGM Timoshenko beam taking into account the actual position of neutral axis that is a useful tool for analysis of coupled vibration in the beam. The theoretical development has been illustrated and validated by numerical examples. The forced vibration obtained provides an efficient method for diagnosis multiple cracked FGM Timoshenko beam under harmonic forces.

Keywords: Timoshenko beam; FGM; crack; massless spring model; forced vibration.

Nhận ngày 13/4/2017, sửa xong 27/4/2017, chấp nhận đăng 30/5/2017
Received: April 13, 2017; revised: April 27, 2017; accepted: May 30, 2017



1. Đặt vấn đề

Nếu như nghiên cứu về dao động tự do của dầm FGM nguyên vẹn hay dầm FGM có vết nứt được trình bày trong khá nhiều tài liệu thì nghiên cứu về dao động cưỡng bức của dầm FGM hầu hết mới chỉ dừng lại cho dầm nguyên vẹn sử dụng các phương pháp giải tích [1-4], bán giải tích (Galerkin, Ritz,...) [5-12], phương pháp cầu phương vi phân [13], phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) [14-20] hay phương pháp độ cứng động lực [21-23].

Các nghiên cứu về dao động cưỡng bức của dầm FGM có một hay nhiều vết nứt còn hạn chế. Sử dụng phương pháp giải tích, dựa trên mô hình lò xo của vết nứt [24-26], Yang và cộng sự [27-28] đã nghiên cứu dao động cưỡng bức của dầm FGM Euler-Bernoulli có nhiều vết nứt chịu tải trọng dọc và ngang dựa trên khai triển theo các hàm dạng dao động riêng. Yan, Yang và Kitipornchai [29] dùng phương pháp Galerkin để tính toán phản ứng động của dầm FGM Timoshenko có 1 vết nứt chịu lực kích động tham số.

Gần đây, Khiem & Huyen [30] đã nghiên cứu dao động tự do của dầm FGM Timoshenko có 1 vết nứt bằng phương pháp giải tích trong miền tần số. Phát triển các kết quả nghiên cứu ở [30] cho trường hợp dầm có nhiều vết nứt chịu tải trọng cưỡng bức, bài báo này trình bày các kết quả nghiên cứu mới về dao động cưỡng bức của dầm FGM Timoshenko có nhiều vết nứt chịu tải trọng dọc và ngang. Các phương trình dao động cưỡng bức của dầm FGM có nhiều vết nứt được xây dựng trong miền tần số dựa trên mô hình lò xo của vết nứt có tính đến vị trí thực của trục trung hòa. Phương trình nhận được có dạng đơn giản, thuận tiện cho việc nghiên cứu dao động cưỡng bức của dầm cũng như bài toán ngược nhận dạng tham số vật liệu và hư hỏng kết cấu tiếp theo.

¹PGS.TS, Khoa Xây dựng DD&CN, Trường Đại học Xây dựng.

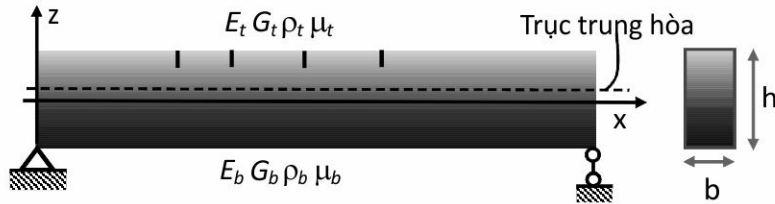
²GS.TSKH, Viện Cơ học, Viện Hàn lâm KHCN Việt Nam.

³ThS, Viện Thiết kế, Bộ Quốc Phòng.

*Tác giả chính. E-mail: lienTV@nuce.edu.vn.

2. Dao động cưỡng bức của dầm Timoshenko bằng vật liệu FGM có nhiều vết nứt

2.1 Phương trình dao động



Hình 1. Dầm FGM có nhiều vết nứt

Xét dầm có chiều dài L , tiết diện chữ nhật với kích thước $A=b \times h$ được chế tạo từ vật liệu FGM (Hình 1) với hàm đặc trưng vật liệu có dạng lũy thừa

$$\begin{cases} E(z) \\ G(z) \\ \rho(z) \end{cases} = \begin{cases} E_b \\ G_b \\ \rho_b \end{cases} + \begin{cases} E_t - E_b \\ G_t - G_b \\ \rho_t - \rho_b \end{cases} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n; \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (1)$$

trong đó: E , G và ρ lần lượt là mô đun đàn hồi, mô đun trượt và mật độ khối lượng; chỉ số t và b ký hiệu vật liệu lớp trên và lớp dưới; z là tọa độ tính từ mặt giữa của dầm.

Sử dụng nguyên lý Hamilton, ta nhận được phương trình chuyển động có dạng [22,23]

$$\begin{aligned} (I_{11}\ddot{u}_0 - A_{11}u_0'') - (I_{12}\ddot{\theta} - A_{12}\theta'') &= p(x,t) \\ (I_{12}\ddot{u}_0 - A_{12}u_0'') - (I_{22}\ddot{\theta} - A_{22}\theta'') + A_{33}(w_0' - \theta) &= 0 \\ I_{11}\ddot{w}_0 - A_{33}(w_0'' - \theta') &= q(x,t) \end{aligned} \quad (2)$$

với các hệ số A_j được xác định theo công thức

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{12}, A_{22}) &= \int_A E(z)(1, z - h_0, (z - h_0)^2) dA; \quad A_{33} = \eta \int_A G(z) dA; \\ (I_{11}, I_{12}, I_{22}) &= \int_A \rho(z)(1, z - h_0, (z - h_0)^2) dA. \end{aligned} \quad (3)$$

trong đó: h_0 là khoảng cách từ trục trung hòa đến trục x . Sử dụng (1), ta nhận được

$$\begin{aligned} A_{11} &= bh \frac{E_t + nE_b}{1+n}; \quad A_{12} = bh^2 \left(\frac{2E_t + nE_b}{2(2+n)} - \frac{E_t + nE_b}{1+n} \alpha \right); \quad h_0 = \frac{n(R_E - 1)h}{2(n+2)(n+R_E)}; \quad \alpha = \frac{1}{2} + \frac{h_0}{h} \\ A_{22} &= bh^3 \left(\frac{3E_t + nE_b}{3(3+n)} - \frac{2E_t + nE_b}{2+n} \alpha + \frac{E_t + nE_b}{1+n} \alpha^2 \right); \quad A_{33} = \eta bh \frac{G_t + nG_b}{1+n}; \quad I_{11} = bh \frac{\rho_t + n\rho_b}{1+n} \\ I_{12} &= bh^2 \left(\frac{2\rho_t + n\rho_b}{2(2+n)} - \frac{\rho_t + n\rho_b}{1+n} \alpha \right); \quad I_{22} = bh^3 \left(\frac{3\rho_t + n\rho_b}{3(3+n)} - \frac{2\rho_t + n\rho_b}{2+n} \alpha + \frac{\rho_t + n\rho_b}{1+n} \alpha^2 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Đặt

$$\{U, \Theta, W\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{u_0(x,t), \theta(x,t), w_0(x,t)\} e^{-i\omega t} dt; \quad \{P(x, \omega), Q(x, \omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{p(x,t), q(x,t)\} e^{-i\omega t} dt$$

ta nhận được phương trình chuyển động trong miền tần số có dạng

$$\begin{aligned} (\omega^2 I_{11}U + A_{11}U'') - \omega^2 I_{12}\Theta - A_{12}\Theta'' &= -P \\ (\omega^2 I_{22}\Theta + A_{22}\Theta'') - \omega^2 I_{12}U - A_{12}U'' + A_{33}(W' - \Theta) &= 0 \\ \omega^2 I_{11}W + A_{33}(W'' - \Theta') &= -Q \end{aligned} \quad (5)$$

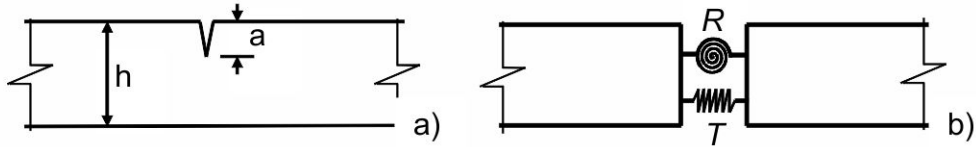
Đưa vào các ma trận và véc tơ

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & 0 \\ -A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \\ 0 & -A_{33} & 0 \end{bmatrix}; \quad [C(\omega)] = \begin{bmatrix} \omega^2 I_{11} & -\omega^2 I_{12} & 0 \\ -\omega^2 I_{12} & \omega^2 I_{22} - A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 I_{11} \end{bmatrix} \\ \{z\} &= \{U, \Theta, W\}^T; \quad \{q\} = \{P, 0, Q\}^T \end{aligned} \quad (6)$$

ta có thể viết phương trình (5) dưới dạng

$$[A]\{z''\} + [B]\{z'\} + [C]\{z\} = -\{q\} \quad (7)$$

2.2 Điều kiện liên tục tại vị trí vết nứt. Mô hình hai lò xo tương đương



Hình 2. Dầm FGM với vết nứt mở và mô hình hai lò xo tương đương

Xét dầm có vết nứt tại tiết diện có tọa độ e . Vết nứt được mô hình hóa bằng hai lò xo tương đương: lò xo dọc có độ cứng T và lò xo xoắn có độ cứng R (Hình 2) [30]. Điều kiện liên tục tại vị trí vết nứt là:

$$\begin{aligned} U(e+0) - U(e-0) &= N(e)/T; \Theta(e+0) - \Theta(e-0) = M(e)/R; W(e+0) = W(e-0) \\ N(e) &= N(e+0) = N(e-0); Q(e+0) = Q(e-0); M(e+0) = M(e-0) = M(e) \end{aligned} \quad (8)$$

trong đó: N , Q và M là các lực dọc, lực cắt và mô men uốn tại tiết diện

$$N = A_{11}U'_x - A_{12}\Theta'_x; M = A_{22}\Theta'_x + A_{12}U'_x; Q = A_{33}(W'_x - \Theta) \quad (9)$$

Xét trường hợp $A_{12}=0$, thay (9) vào (8) ta nhận được

$$U(e+0) = U(e-0) + \gamma_1 U'_x(e); \Theta(e+0) = \Theta(e-0) + \gamma_2 \Theta'_x(e); W(e+0) = W(e-0) \quad (10)$$

$$U'_x(e+0) = U'_x(e-0); \Theta'_x(e+0) = \Theta'_x(e-0); W'_x(e+0) = W'_x(e-0) + \gamma_2 \Theta'_x(e)$$

$$\text{với } \gamma_1 = A_{11}/T; \gamma_2 = A_{22}/R \quad (11)$$

Các tham số γ_1, γ_2 trong (11) là hàm của các tham số vật liệu như mô đun đàn hồi, chiều cao dầm, hệ số nở ngang Poisson,... bao gồm cả trường hợp dầm đồng nhất $E_t=E_b=E_0$ hay $R_E=1$. Mặt khác, ta có thể viết các tham số vết nứt (11) dưới dạng

$$\gamma_1 = \gamma_a \sigma_1(R_E, n); \gamma_2 = \gamma_b \sigma_2(R_E, n) \quad (12)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \gamma_a &= E_0 A/T; \gamma_b = E_0 I/R; I = bh^3/12; E_0 = (E_t + E_b)/2; R_E = E_t/E_b \\ \sigma_1(R_E, n) &= \frac{2(R_E + n)}{(R_E + 1)(1 + n)}; \sigma_2(R_E, n) = \frac{24}{R_E + 1} \left(\frac{3R_E + n}{3(3 + n)} - \frac{2R_E + n}{2 + n} \alpha + \frac{R_E + n}{1 + n} \alpha^2 \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Khi $R_E=1$ các tham số vết nứt γ_1, γ_2 sẽ là γ_{10}, γ_{20} . Các tham số này đã được xác định từ độ sâu vết nứt a tương ứng với dao động dọc và dao động uốn của dầm đồng nhất là [31,32].

$$\begin{aligned} \gamma_{10} &= E_0 A/T_0 = 2\pi(1-\nu^2)hf_1(z); z = a/h \\ f_1(z) &= z^2(0.6272 - 0.17248z + 5.92134z^2 - 10.7054z^3 + 31.5685z^4 - 67.47z^5 + \\ &\quad + 139.123z^6 - 146.682z^7 + 92.3552z^8) \\ \gamma_{20} &= E_0 I/R_0 = 6\pi(1-\nu^2)hf_2(z) \\ f_2(z) &= z^2(0.6272 - 1.04533z + 4.5948z^2 - 9.9736z^3 + 20.2948z^4 - 33.0351z^5 + \\ &\quad + 47.1063z^6 - 40.7556z^7 + 19.6z^8) \end{aligned} \quad (14)$$

Dưới đây, trong phân tích dao động của dầm FGM có vết nứt, ta sẽ sử dụng các công thức gần đúng (12), (14) với $\gamma_a = \gamma_{10}, \gamma_b = \gamma_{20}$, tức là

$$\gamma_1 = F_1(z) = 2\pi(1-\nu^2)h\sigma_1 f_1(z); \gamma_2 = F_2(z) = 6\pi(1-\nu^2)h\sigma_2 f_2(z) \quad (15)$$

Các hàm số này được sử dụng để tính toán độ cứng lò xo theo độ sâu vết nứt cho trước.

2.3 Nghiệm tổng quát của phương trình dao động tự do cho dầm không có vết nứt

Trường hợp dao động tự do, phương trình vi phân dao động (7) trở thành

$$[A]\{z''\} + [B]\{z'\} + [C]\{z\} = \{0\} \quad (16)$$

Chọn nghiệm phương trình (16) dưới dạng $\{z_0\} = \{d\}e^{\lambda x}$, dẫn đến hệ phương trình

$$(\lambda^2 [A] + \lambda [B] + [C])\{d\} = \{0\} \quad (17)$$

Hệ phương trình (17) có nghiệm không tầm thường khi

$$\det(\lambda^2 [A] + \lambda [B] + [C]) = 0$$

Khai triển phương trình này, ta nhận được phương trình bậc 3 đối với $s = \lambda^2$ là

$$s^3 + as^2 + bs + c = 0 \quad (18)$$

Phương trình này có 3 nghiệm là s_1, s_2, s_3 . Ký hiệu

$$\lambda_{1,4} = \pm k_1 = \pm \sqrt{s_1}; \lambda_{2,5} = \pm k_2 = \pm \sqrt{s_2}; \lambda_{3,6} = \pm k_3 = \pm \sqrt{s_3} \quad (19)$$

Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (16) có dạng

$$\{z_0(x, \omega)\} = \sum_{j=1}^6 \{d_j\} e^{\lambda_j x} \quad (20)$$

có thể biểu diễn dưới dạng ma trận

$$\{z_0\} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & \dots & d_{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ e^{\lambda_6 x} \end{Bmatrix}$$

với d_j là các hằng số cần tìm. Từ phương trình thứ nhất và thứ ba của (16), ta có

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & \dots & d_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 d_{21} & \alpha_2 d_{22} & \dots & \alpha_6 d_{26} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{26} \\ \beta_1 d_{21} & \beta_2 d_{22} & \dots & \beta_6 d_{26} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\text{trong đó } \alpha_j = \frac{\omega^2 I_{12}}{\omega^2 I_{11} + \lambda_j^2 A_{11}}; \beta_j = \frac{\lambda_j A_{33}}{(\omega^2 I_{11} + \lambda_j^2 A_{33})}; j = 1, 2, \dots, 6 \quad (22)$$

Từ (19), ta nhận thấy

$$\alpha_4 = \alpha_1; \alpha_5 = \alpha_2; \alpha_6 = \alpha_3; \beta_4 = -\beta_1; \beta_5 = -\beta_2; \beta_6 = -\beta_3$$

nên biểu diễn (20) có thể viết dưới dạng

$$\{z_0(x, \omega)\} = [G(x, \omega)] \{C\} \quad (23)$$

với 6 hằng số độc lập $\{C\} = (C_1, \dots, C_6)^T = (d_{21}, \dots, d_{26})^T$ và

$$[G(x, \omega)] = [[G_1(x, \omega)] [G_2(x, \omega)]]$$

$$[G_1(x, \omega)] = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{k_1 x} & \alpha_2 e^{k_2 x} & \alpha_3 e^{k_3 x} \\ e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} \\ \beta_1 e^{k_1 x} & \beta_2 e^{k_2 x} & \beta_3 e^{k_3 x} \end{bmatrix}; [G_2(x, \omega)] = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-k_1 x} & \alpha_2 e^{-k_2 x} & \alpha_3 e^{-k_3 x} \\ e^{-k_1 x} & e^{-k_2 x} & e^{-k_3 x} \\ -\beta_1 e^{-k_1 x} & -\beta_2 e^{-k_2 x} & -\beta_3 e^{-k_3 x} \end{bmatrix} \quad (24)$$

2.4 Xác định hàm vết nứt $[\bar{G}(x)]$

Ký hiệu $\{S(x)\}$ là nghiệm (23) thỏa mãn các điều kiện ban đầu

$$\{S(0)\} = (S_1^0, S_2^0, 0)^T; \{S'(0)\} = (0, 0, S_3^0)^T \quad (25)$$

Ta nhận được

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \Delta_1 \alpha_1 \cosh k_1 x + \Delta_2 \alpha_2 \cosh k_2 x + \Delta_3 \alpha_3 \cosh k_3 x \\ S_2(x) &= \Delta_1 \cosh k_1 x + \Delta_2 \cosh k_2 x + \Delta_3 \cosh k_3 x \\ S_3(x) &= \Delta_1 \beta_1 \sinh k_1 x + \Delta_2 \beta_2 \sinh k_2 x + \Delta_3 \beta_3 \sinh k_3 x \end{aligned} \quad (26)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_{11} S_1^0 + \delta_{12} S_2^0 + \delta_{13} S_3^0; \Delta_2 = \delta_{21} S_1^0 + \delta_{22} S_2^0 + \delta_{23} S_3^0; \Delta_3 = \delta_{31} S_1^0 + \delta_{32} S_2^0 + \delta_{33} S_3^0 \\ \delta_{11} &= (k_3 \beta_3 - k_2 \beta_2) / \Delta; \delta_{12} = (\alpha_3 k_2 \beta_2 - \alpha_2 k_3 \beta_3) / \Delta; \delta_{13} = (\alpha_2 - \alpha_3) / \Delta \\ \delta_{21} &= (k_1 \beta_1 - k_3 \beta_3) / \Delta; \delta_{22} = (\alpha_1 k_3 \beta_3 - \alpha_3 k_1 \beta_1) / \Delta; \delta_{23} = (\alpha_3 - \alpha_1) / \Delta \\ \delta_{31} &= (k_2 \beta_2 - k_1 \beta_1) / \Delta; \delta_{32} = (\alpha_2 k_1 \beta_1 - \alpha_1 k_2 \beta_2) / \Delta; \delta_{33} = (\alpha_1 - \alpha_2) / \Delta \\ \Delta &= k_1 \beta_1 (\alpha_2 - \alpha_3) + k_2 \beta_2 (\alpha_3 - \alpha_1) + k_3 \beta_3 (\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned} \quad (27)$$

Nghiệm (26) có thể viết dưới dạng ma trận

$$\{S(x)\} = [\Phi(x)] \{S^0\} \quad (28)$$

trong đó $\{S^0\} = (S_1^0, S_2^0, S_3^0)^T$ và ma trận $[\Phi]$ có dạng

$$[\Phi(x)] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cosh k_1 x & \alpha_2 \cosh k_{21} x & \alpha_3 \cosh k_3 x \\ \cosh k_1 x & \cosh k_{21} x & \cosh k_3 x \\ \beta_1 \sinh k_1 x & \beta_2 \sinh k_{21} x & \beta_3 \sinh k_3 x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Giả thiết rằng $S_1^0 = \gamma_1 U'_x(e), S_2^0 = S_3^0 = \gamma_2 \Theta'_x(e)$ hay $\{S^0\} = [\Sigma] \{z'_0(e)\}$ với ma trận

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Ký hiệu $\{z_c(x)\}$ là nghiệm riêng của (28) thỏa mãn các điều kiện ban đầu

$$\{z_c(0)\} = (\gamma_1 U'_x(e), \gamma_2 \Theta'_x(e), 0)^T; \{z'_c(0)\} = (0, 0, \gamma_2 \Theta'_x(e))^T \quad (31)$$

Ta nhận được

$$\{z_c(x)\} = [\Phi(x)][\Sigma] \{z'_0(e)\} = [G_c(x)] \{z'_0(e)\} \quad (32)$$

trong đó $[G_c(x)]$ là ma trận 3×3

$$[G_c(x)] = [\Phi(x)][\Sigma] \quad (33)$$

$$\text{và } \{z'_0(e)\} = (U'_0(e) \quad \Theta'_0(e) \quad W'_0(e))^T \quad (34)$$

Ta đưa vào ma trận hàm vết nứt

$$[\bar{G}(x)] = \begin{cases} [G_c(x)] & : x > 0 \\ [0] & : x \leq 0 \end{cases}; [\bar{G}'(x)] = \begin{cases} [G'_c(x)] & : x > 0 \\ [0] & : x \leq 0 \end{cases} \quad (35)$$

2.5 Nghiệm tổng quát của phương trình dao động tự do cho dầm có vết nứt

Nghiệm tổng quát của phương trình (16) thỏa mãn điều kiện (8) tại vị trí vết nứt có thể viết dưới dạng

$$\{z_c(x)\} = \{z_0(x)\} + [\bar{G}(x - e)] \{z'_0(e)\} \quad (36)$$

trong đó biểu thức thứ nhất $\{z_0(x)\}$ là nghiệm bài toán dầm không có vết nứt, biểu thức thứ hai là nghiệm bổ sung do sự xuất hiện vết nứt trên dầm.

Đối với dầm có nhiều vết nứt, từ (36) ta nhận được

$$\begin{aligned} \{z_1(x)\} &= \{z_0(x)\} + [\bar{G}(x - e_1)] \{z'_0(e_1)\} = \{z_0(x)\} + [\bar{G}(x - e_1)] \{\mu_1\}; \{\mu_1\} = \{z'_0(e_1)\} \\ \{z_2(x)\} &= \{z_1(x)\} + [\bar{G}(x - e_2)] \{z'_1(e_2)\} = \{z_0(x)\} + [\bar{G}(x - e_1)] \{\mu_1\} + [\bar{G}(x - e_2)] \{\mu_2\} + [\bar{G}'(e_2 - e_1)] \{\mu_1\} \\ &= \{z_0(x)\} + [\bar{G}(x - e_1)] \{\mu_1\} + [\bar{G}(x - e_2)] \{\mu_2\}; \{\mu_2\} = \{z'_1(e_2)\} + [\bar{G}'(e_2 - e_1)] \{\mu_1\} \\ \{z_3(x)\} &= \{z_2(x)\} + [\bar{G}(x - e_3)] \{z'_2(e_3)\} \\ &= \{z_0(x)\} + [\bar{G}(x - e_1)] \{\mu_1\} + [\bar{G}(x - e_2)] \{\mu_2\} + [\bar{G}(x - e_3)] \{\mu_3\} + [\bar{G}'(e_3 - e_1)] \{\mu_1\} + [\bar{G}'(e_3 - e_2)] \{\mu_2\} \\ &= \{z_0(x)\} + [\bar{G}(x - e_1)] \{\mu_1\} + [\bar{G}(x - e_2)] \{\mu_2\} + [\bar{G}(x - e_3)] \{\mu_3\}; \{\mu_3\} = \{z'_2(e_3)\} + [\bar{G}'(e_3 - e_1)] \{\mu_1\} + [\bar{G}'(e_3 - e_2)] \{\mu_2\} \end{aligned}$$

Như vậy, ta có thể biểu diễn nghiệm phương trình dao động tự do (16) của dầm có n vết nứt dưới dạng truy hồi

$$\{z_c(x)\} = \{z_0(x)\} + \sum_{j=1}^n [\bar{G}(x - e_j)] \{\mu_j\} \quad (37)$$

với $\{\mu_j\}$ là véc tơ 3×1

$$\{\mu_j\} = \{z'_0(e_j)\} + \sum_{k=1}^{j-1} [\bar{G}'(e_j - e_k)] \{\mu_k\}; j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (38)$$

Đối với dầm một nhịp, điều kiện biên tại hai đầu dầm có thể viết dưới dạng

$$\{B_0(z_c)|_{x=0}\} = \{0\}; \{B_L(z_c)|_{x=L}\} = \{0\} \quad (39)$$

trong đó: $[B_0]$, $[B_L]$ là các ma trận toán tử 3×3 . Vì rằng số hạng thứ hai của (36) thỏa mãn điều kiện biên tầm thường tại $x=0$ nên khi áp điều kiện biên thứ nhất của (39) cho nghiệm (36) ta nhận được

$$[B_{01}]\{C_1\} + [B_{02}]\{C_2\} = \{0\} \quad (40)$$

với $\{C_1\} = (C_1, C_2, C_3)^T$; $\{C_2\} = (C_4, C_5, C_6)^T$ và

$$[B_{01}(\omega)] = [B_0(G_1(x, \omega))]|_{x=0}; [B_{02}(\omega)] = [B_0(G_2(x, \omega))]|_{x=0} \quad (41)$$

Phương trình (40) cho phép khử một trong hai véc tơ $\{C_i\}$, $\{C_2\}$, do đó nghiệm $\{z_c(x)\}$ có thể viết lại dưới dạng

$$\{z_c(x, \omega)\} = [G_0(x, \omega)] \{D\} \quad (42)$$

Ma trận $[G_0(x, \omega)]$ là ma trận hàm số 3×3 và $\{D\}$ là véc tơ hằng số $\{D\} = [D_1, D_2, D_3]^T$. Thế (42) vào (36) ta nhận được

$$\{z_c(x)\} = ([G_0(x, \omega)] + [\bar{G}(x - e)] \cdot [G'_0(e, \omega)]) \{D\} = [G_L(x, \omega)] \{D\} \quad (43)$$

$$\text{trong đó } [G_L(x, \omega)] = [G_0(x, \omega)] + [\bar{G}(x - e)] \cdot [G'_0(e, \omega)] \quad (44)$$

Dựa trên hệ thức truy hồi (37) - (38), ta có thể biểu diễn nghiệm tổng quát (43) - (44) cho đảm có n vết nứt dưới dạng

$$\{z_c(x)\} = \left([G_0(x)] + \sum_{j=1}^n [\bar{G}(x - e_j)] \cdot [\chi_j] \right) \{D\} = [G_L(x, \omega)] \{D\} \quad (45)$$

$$\text{trong đó } [G_L(x, \omega)] = [G_0(x)] + \sum_{j=1}^n [\bar{G}(x - e_j)] \cdot [\chi_j] \quad (46)$$

và $[\chi_j]$ là ma trận 3×3

$$[\chi_j] = [G'_0(e_j)] + \sum_{k=1}^{j-1} [\bar{G}'(e_j - e_k)] \cdot [\chi_k], j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (47)$$

2.6 Nghiệm riêng của phương trình dao động cưỡng bức

Nghiệm đầy đủ $\{\tilde{z}_c(x, \omega)\}$ của phương trình vi phân không thuần nhất (7) có thể biểu diễn dưới dạng tổng của nghiệm tổng quát $\{z_c(x, \omega)\}$ của phương trình vi phân thuần nhất (45) và một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $\{z_q(x, \omega)\}$, nghĩa là

$$\{\tilde{z}_c(x, \omega)\} = \{z_c(x, \omega)\} + \{z_q(x, \omega)\} \quad (48)$$

Nghiệm riêng có thể biểu diễn dưới dạng

$$\{z_q(x, \omega)\} = \int_0^x [H(x - \tau, \omega)] \{q(\tau, \omega)\} d\tau \quad (49)$$

trong đó: $[H(x, \omega)]$ là ma trận hàm truyền thỏa mãn hệ phương trình

$$[A] \cdot [H'] + [B] \cdot [H] + [C] \cdot [H] = [0] \quad (50)$$

với các điều kiện ban đầu

$$[H(0)] = [0]; [H'(0)] = [A]^{-1} \quad (51)$$

$$\text{Thật vậy } \{z'_q(x, \omega)\} = [H(0)] \{q(x, \omega)\} + \int_0^x [H'(x - \tau, \omega)] \{q(\tau, \omega)\} d\tau = \int_0^x [H'(x - \tau, \omega)] \{q(\tau, \omega)\} d\tau$$

$$\{z''_q(x, \omega)\} = [H'(0)] \{q(x, \omega)\} + \int_0^x [H''(x - \tau, \omega)] \{q(\tau, \omega)\} d\tau = [A]^{-1} \{q(x, \omega)\} + \int_0^x [H''(x - \tau, \omega)] \{q(\tau, \omega)\} d\tau$$

Kết hợp biểu thức cuối cùng với (50) - (51), ta nhận được

$$[A] \{z''_q\} + [B] \{z'_q\} + [C] \{z_q\} = \{q(x, \omega)\} + \int_0^x ([A] [H''(x - \tau)] + [B] [H'(x - \tau)] + [C] [H(x - \tau)]) \{q(\tau, \omega)\} d\tau = \{q(x, \omega)\}$$

Nghiệm phương trình (50) - (51) có thể viết dưới dạng

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \\ H_{31} & H_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \sinh k_1 x & \alpha_2 \sinh k_2 x & \alpha_3 \sinh k_3 x \\ \sinh k_1 x & \sinh k_2 x & \sinh k_3 x \\ \beta_1 \cosh k_1 x & \beta_2 \cosh k_2 x & \beta_3 \cosh k_3 x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\begin{Bmatrix} H_{13} \\ H_{23} \\ H_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cosh k_1 x & \alpha_2 \cosh k_2 x & \alpha_3 \cosh k_3 x \\ \cosh k_1 x & \cosh k_2 x & \cosh k_3 x \\ \beta_1 \sinh k_1 x & \beta_2 \sinh k_2 x & \beta_3 \sinh k_3 x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{13} \\ h_{23} \\ h_{33} \end{Bmatrix}$$

trong đó

$$\begin{aligned} h_{11} &= (k_3 \beta_2 - k_2 \beta_3) / \Delta_1; h_{21} = (k_1 \beta_3 - k_3 \beta_1) / \Delta_1; h_{31} = (k_2 \beta_1 - k_1 \beta_2) / \Delta_1 \\ h_{12} &= (\alpha_2 k_2 \beta_3 - \alpha_3 k_3 \beta_2) / \Delta_1; h_{22} = (\alpha_3 k_3 \beta_1 - \alpha_1 k_1 \beta_3) / \Delta_1; h_{32} = (\alpha_1 k_1 \beta_2 - \alpha_2 k_2 \beta_1) / \Delta_1 \\ h_{13} &= (\alpha_3 - \alpha_2) / \Delta_2; h_{23} = (\alpha_1 - \alpha_3) / \Delta_2; h_{33} = (\alpha_2 - \alpha_1) / \Delta_2 \\ \Delta_1 &= \beta_1 k_2 k_3 (\alpha_3 - \alpha_2) + \beta_2 k_1 k_3 (\alpha_1 - \alpha_3) + \beta_3 k_1 k_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \\ \Delta_2 &= \beta_1 k_1 (\alpha_3 - \alpha_2) + \beta_2 k_2 (\alpha_1 - \alpha_3) + \beta_3 k_3 (\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \quad (53)$$

Do nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện ban đầu $\{z_q(0, \omega)\} = \{z'_q(0, \omega)\} = \{0\}$ nên nghiệm phương trình không thuần nhất (7) có thể viết dưới dạng

$$\{\tilde{z}_c(x)\} = \left[\mathbf{G}_0(x, \omega) + \sum_{j=1}^n [\bar{\mathbf{G}}(x - e_j)] \mathbf{I}[\chi_j] \right] \{\mathbf{D}\} - \{z_q(x, \omega)\} \quad (54)$$

Áp điều kiện biên bên phải dành cho nghiệm (54), ta nhận được phương trình xác định các hằng số $\{\mathbf{D}\}$ như sau

$$\left[\mathbf{B}_{L0}(\omega) + \sum_{j=1}^n [\mathbf{B}_{LG}(e_j)] \mathbf{I}[\chi_j] \right] \{\mathbf{D}\} - \{\mathbf{b}_{Lq}(\omega)\} = \{0\} \quad (55)$$

$$\text{trong đó } [\mathbf{B}_{L0}(\omega)] = [\mathbf{B}_L(\mathbf{G}_0(x, \omega))|_{x=L}]; [\mathbf{B}_{LG}(e_j)] = [\mathbf{B}_L(\bar{\mathbf{G}}(x - e_j))|_{x=L}] \quad (56)$$

$$\text{và } \{\mathbf{b}_{Lq}(\omega)\} = \{\mathbf{B}_L(z_q(x, \omega))|_{x=L}\} \quad (57)$$

Giải phương trình (55), ta xác định được các hằng số $\{\mathbf{D}\}$. Từ đó ta nhận được nghiệm đầy đủ của phương trình dao động cưỡng bức (7) có dạng

$$\{\tilde{z}_c(x)\} = [\mathbf{G}_0(x, \omega)] \{\mathbf{D}\} + \left[\sum_{j=1}^n [\bar{\mathbf{G}}(x - e_j)] \mathbf{I}[\chi_j] \right] \{\mathbf{D}\} - \{z_q(x, \omega)\} \quad (58)$$

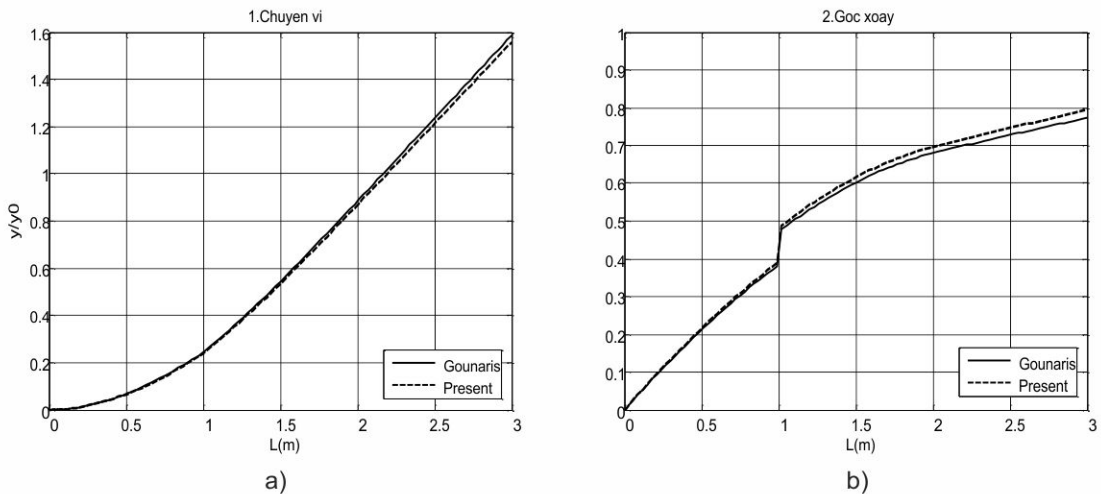
Số hạng đầu của nghiệm (58) thể hiện đáp ứng tần số của dầm nguyên vẹn, số hạng thứ hai thể hiện ảnh hưởng của vết nứt, số hạng cuối là nghiệm riêng tương ứng với dạng tải trọng ngoài cho trước.



3. Phân tích dầm FGM có nhiều vết nứt chịu tải trọng cưỡng bức

3.1 So sánh với các kết quả đã công bố

Xét dầm công xôn đồng nhất với các tham số vật liệu: $E_t = E_b = 210 \text{ GPa}$, $\rho_t = \rho_b = 7850 \text{ kg/m}^3$; hệ số cản vật liệu và môi trường: $\mu_t = 0.002$, $\mu_b = 0$ và hình học: $L = 3.0 \text{ m}$, $b = 0.2 \text{ m}$, $h = 0.2 \text{ m}$ chịu tải trọng tập trung $P = -3000 \text{ N}$ tại vị trí $x = 2.0 \text{ m}$ với tần số kích động $\omega = 60 \text{ rad/s}$. Dầm có một vết nứt xuất hiện tại vị trí $x_1 = 1.0 \text{ m}$ với độ sâu vết nứt $a/h = 40\%$ [33].

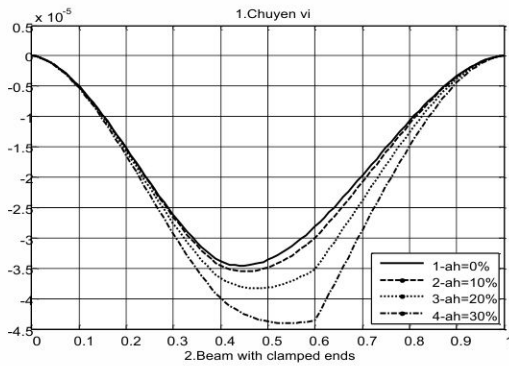


Hình 3. So sánh chuyển vị (a), góc xoay (b) của dầm công xôn thuần nhất có 1 vết nứt với độ sâu 40% và tần số kích thích $\omega = 60 \text{ rad/s}$

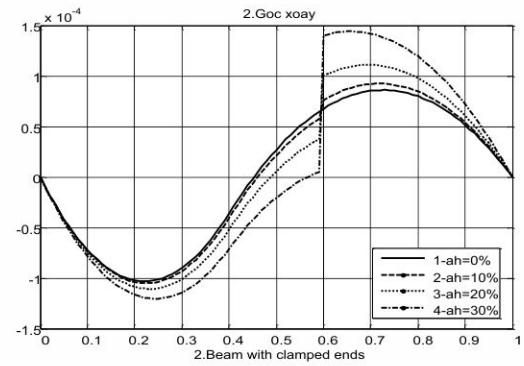
Hình 3 là so sánh kết quả tính chuyển vị, góc xoay của dầm công xôn có 1 vết nứt theo phương pháp đề xuất với kết quả tính chuyển vị và góc xoay theo phương pháp phần tử hữu hạn đã được các tác giả Gounaris và Dimarogonas công bố [33]. Rõ ràng kết quả nhận được là trùng với các kết quả đã công bố, cho thấy độ tin cậy của phương pháp được lập trên đây.

3.2 Phân tích dầm FGM có nhiều vết nứt chịu tải trọng cưỡng bức

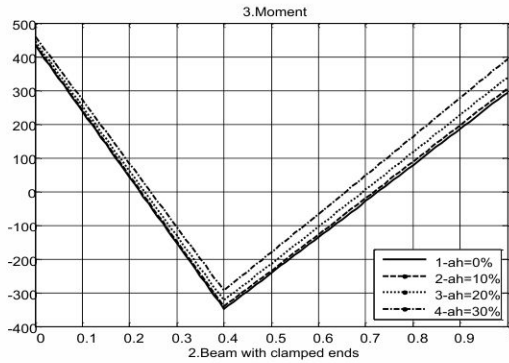
Xét dầm FGM Timoshenko hai đầu ngàm với các tham số vật liệu: $E_t = 70 \text{ GPa}$; $\rho_t = 2780 \text{ kg/m}^3$; $\mu_t = 0.33$; $E_b/E_t = 0.5$; $\rho_b = 7850 \text{ kg/m}^3$; $\mu_b = 0.33$ và số mũ đặc trưng vật liệu $n = 0.5$. Dầm có các kích thước: $L = 1.0 \text{ m}$, $b = 0.1 \text{ m}$, $h = 0.1 \text{ m}$ chịu tải trọng tập trung $P = -3000 \text{ N}$ tại vị trí $x = 0.4 \text{ m}$, tần số kích động $\omega = 100 \text{ rad/s}$.



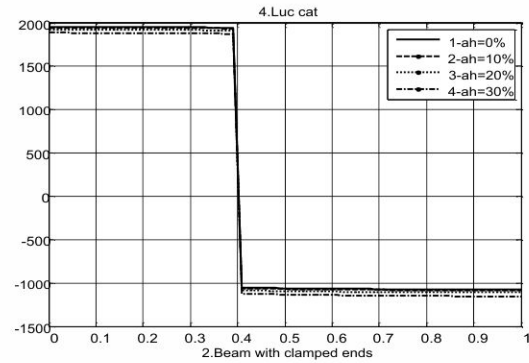
a)



b)

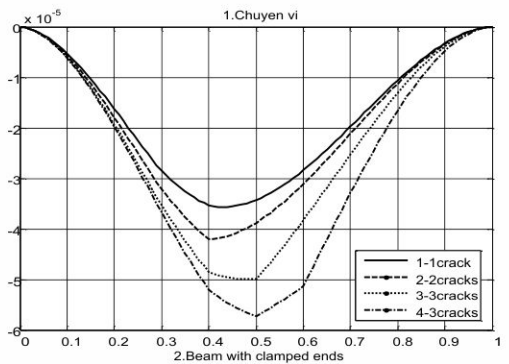


c)

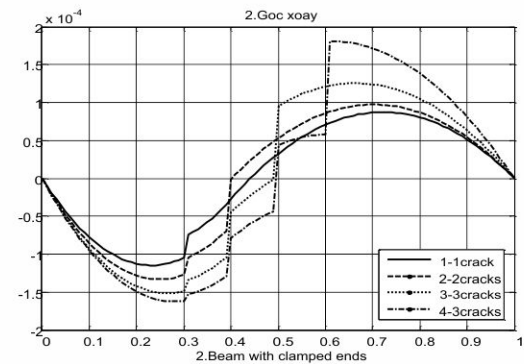


d)

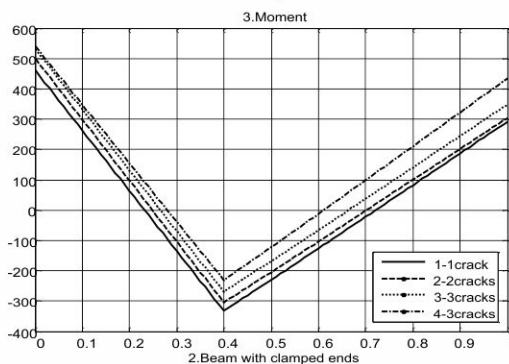
Hình 4. Chuyển vị (a), góc xoay (b), mômen (c), lực cắt (d) của dầm FGM hai đầu ngàm có 1 vết nứt với độ sâu 10%, 20%, 30% và tần số kích thích $\omega=200\text{rad/s}$



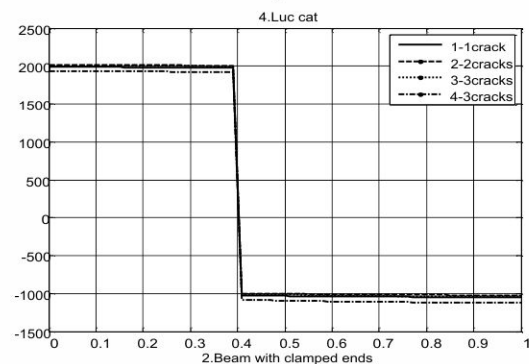
a)



b)



c)



d)

Hình 5. Chuyển vị (a), góc xoay (b), mômen (c), lực cắt (d) của dầm FGM hai đầu ngàm có 1 đến 4 vết nứt với độ sâu 30% và tần số kích thích $\omega=200\text{rad/s}$

Hình 4 là biểu đồ chuyển vị, góc xoay, mômen, lực cắt của dầm FGM hai đầu ngàm có 1 vết nứt tại vị trí $x=0.6m$ với độ sâu 10%, 20%, 30% và tần số kích thích $\omega=200rad/s$. Khi độ sâu vết nứt tăng lên thì chuyển vị và góc xoay dầm tăng lên trong khi mô men và lực cắt thay đổi rất nhỏ. Tại vị trí vết nứt luôn xuất hiện điểm gãy khúc trên biểu đồ chuyển vị, bước nhảy trên biểu đồ góc xoay trong khi bước nhảy của lực cắt là tại vị trí đặt lực kích thích.

Hình 5 là biểu đồ chuyển vị, góc xoay, mômen, lực cắt của dầm FGM hai đầu ngàm có số lượng vết nứt thay đổi từ 1 đến 4, vị trí vết nứt đầu tiên $x=0.2m$. khoảng cách các vết nứt không đổi là 0.1m, chiều sâu vết nứt không đổi $a/h=30\%$. Khi số lượng vết nứt tăng lên thì chuyển vị của dầm tăng lên, tại vị trí vết nứt luôn xuất hiện điểm gãy khúc trong khi giá trị mô men uốn trong dầm giảm đi rõ rệt. Chuyển vị động của dầm tăng theo số lượng và chiều sâu vết nứt, góc xoay xuất hiện bước nhảy tại vị trí vết nứt, vết nứt càng sâu thì bước nhảy càng lớn.



4. Kết luận

Trong bài báo này, các tác giả đã tìm được nghiệm bài toán dao động cưỡng bức của dầm FGM có nhiều vết nứt trong miền tần số dựa trên mô hình dầm Timoshenko, quy luật lũy thừa của vật liệu FGM và mô hình lò xo của vết nứt có tính đến vị trí thực của đường trung hòa. Biểu thức nhận được có dạng đơn giản, thuận tiện cho việc nghiên cứu dao động cưỡng bức của dầm FGM có nhiều vết nứt. Từ đó, các tác giả đã nghiên cứu sự thay đổi ứng xử động bao gồm chuyển vị động, góc xoay, mô men, lực cắt của dầm FGM chịu tải trọng cưỡng bức theo các tham số vết nứt. Các nghiên cứu này là cơ sở cho việc phát triển các phương pháp nhận dạng hư hỏng của dầm FGM dựa trên các dao động cưỡng bức thu được.

Tài liệu tham khảo

1. Zhong Z., Yu T. (2007), "Analytical solution of a cantilever functionally graded beam", *Composites Science and Technology*, 67:481-488
2. H.T. Thai, T.P. Vo (2012), "Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories", *International Journal of Mechanical Sciences*, 62:57-66
3. Yan T., Kitipornchai S., Yang J., He X.Q.(2011), "Dynamic behaviour of edge-cracked shear deformable functionally graded beams on an elastic foundation under a moving load", *Composite Structures*, 93: 2992-3001
4. Hosseini S.M., Mareishi S., Kalhori H., Raffiee M.(2014), "Large Amplitude Free and Forced Oscillations of Functionally Graded Beams", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 21:255-262
5. Simsek M., Kocaturk T.(2009), "Free and Forced vibration of functionally graded beams subjected to concentrated moving harmonic load", *Composite Structure*, 90:465-473.
6. Simsek M., Kocatürk T., Akbas S.D. (2012), "Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load", *Composite Structures*, 94:2358-2364.
7. Simsek M. (2010), "Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories", *Composite Structures*, 92:904-917.
8. Simsek M. (2010), "Non-linear vibration analysis of a functionally graded Timoshenko beam under action of a moving harmonic load", *Composite Structures*, 92:2532-2546
9. Chen D., Yang J., Kitipornchai S.(2016), "Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, 108-109:14-22
10. Shooshtari A., Rafiee M.(2011), "Nonlinear forced vibration analysis of claimed functional graded beams", *Acta Mech*, 221:23-38.
11. Arefi M., Pourjamshidian M., Arani A.G.(2016), "Nonlinear free and forced vibration analysis of embedded functionally graded sandwich micro beam with moving mass", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 0:1-31, DOI: 10.1177/1099636216658895
12. Yan T., Yang J., Kitipornchai S.(2012), "Nonlinear dynamic response of an edge-cracked functionally graded Timoshenko beam under parametric excitation", *Nonlinear Dyn*, 67:527-540, DOI 10.1007/s11071-011-0003-9
13. Xiang H.J., Yang J.(2008), "Free and forced vibration of a laminated FGM Timoshenko beam of variable thickness under heat conduction", *Composites: Part B*, 39:292-303.

14. Azadi M.(2010), "Free and forced vibration analysis of FG beam considering temperature dependency of material properties", *Journal of Mechanical Science and Technology*, 25(1):69-80.
15. Akbas S.D.(2016), "Forced vibration responses of Functionally graded viscoelastic beams under thermal environment", *International Journal of innovative research in science, engineering and technology*, 5.
16. Yu Z.G., Chu F.L.(2009), "Identification of crack in functionally graded material beams using the p-version of finite element method", *Journal of Sound and Vibration*, 325(1-2):69-84
17. Akbas S.D.(2013), "Free Vibration Characteristics of Edge Cracked Functionally Graded Beams by Using Finite Element Method", *International Journal of Engineering Trends and Technology*, 4(10).
18. Trinh T.H., Gan B.S., Nguyen D.K.(2015), "Finite Element Analysis of Non-uniform Beam Made of Axially FGM Subjected to Multiple Loads", *Applied Mechanics and Materials*, 764-765:1170-1174
19. Ziou H., Guenfoud H., Guenfoud M.(2013), "Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method", *Int. J. Structural Engineering*, 7(3).
20. Vo T.P., Thai H.T., Nguyen T.K., Inam F.(2014), "Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory", *Meccanica*, 49:155-168, DOI 10.1007/s11012-013-9780-1
21. Su H., Banerjee J.R. (2015), Development of dynamic stiffness method for free vibration of functionally graded Timoshenko beam, *Computers & Structures*, 81:1915-22.
22. Khiem N.T., Kien N.D., Huyen N.N.(2014), "Vibration theory of FGM beam in the frequency domain", *Proceedings of National Conference on Engineering Mechanics celebrating 35th Anniversary of the Institute of Mechanics*, VAST, April 9, 1:93-98 (in Vietnamese).
23. Lien T.V., Duc N.T. and Khiem N.T.(2016), "Free vibration analysis of functionally graded Timoshenko beam using dynamic stiffness method", *Journal of Science and Technology in Civil Engineering*, National University of Civil Engineering, 31.
24. Erdogan F., Wu B.H.(1997), "The surface crack problem for a plate with functionally graded properties", *Journal of Applied Mechanics*, 64:448-456.
25. Swamidas A.S.J., Yang X., Seshadri R.(2004), "Identification of cracking in beam structures using Timoshenko and Euler formulations", *Journal of Engineering Mechanics*, 130(11):1297-1308.
26. Ke L.L., Yang J., Kitipornchai S., Xiang Y.(2009), "Flexural vibration and elastic buckling of a cracked Timoshenko beam made of functionally graded materials", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 16:488-502.
27. Yang J., Chen Y., Xiang Y., Jia X.L.(2008), "Free and forced vibration of cracked inhomogeneous beams under an axial force and a moving load", *Journal of Sound and Vibration*, 312:166-181.
28. Yan T., Yang J.(2011), "Forced vibration of edge-cracked functional graded beams due to a transverse moving load", *Procedia Engineering*, 14:3293-3300.
29. Yan T., Yang J., Kitipornchai S.(2012), "Nonlinear dynamic response of an edge-cracked functionally graded Timoshenko beam under parametric excitation", *Nonlinear Dyn*, 67:527-540, DOI 10.1007/s11071-011-0003-9
30. Khiem N.T., Huyen N.N.(2016), "A method for crack identification in functionally graded Timoshenko beam", *Nondestructive Testing and Evaluation*, DOI:10.1080/10589759.2016.1226304
31. Chondros T.G., Dimarogonas A.D., Yao J.(1988), "Longitudinal vibration of a continuous cracked bar", *Engineering Fracture Mechanics*, 61:593-606.
32. Chondros T.G., Dimarogonas A.D., Yao J.(1998), "A continuous cracked beam theory", *Journal of Sound and Vibration*, 215:17-34.
33. Gounaris G., Dimarogonas A.(1988), "A finite element of a cracked prismatic beam for structural analysis", *Computers & Structures*, 28:309-313.