PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC PHI TUYẾN CỦA VỎ TRỤ BẰNG VẬT LIỆU CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN DƯỚI TÁC DỤNG CỦA LỰC KHÍ ĐỘNG SỬ DỤNG LÝ THUYẾT PISTON

Phạm Thị Toan[1]*

Tóm tắt: *Trong bài báo này đã phân tích các đặc trưng động lực của vỏ trụ mỏng FGM dưới tác dụng của lực khí động. Trên cơ sở lý thuyết vỏ cổ điển và mô hình khí động lực theo lý thuyết Piston đã thiết lập các phương trình cơ bản của vỏ trụ FGM trong dòng khí chuyển động vượt âm. Phương pháp Galerkin, giả thiết Volmir và phương pháp Runge-Kutta bậc 4 đã được sử dụng cho phân tích động lực của vỏ. Đối tượng nghiên cứu là tìm số Mach tới hạn của dòng khí làm cho vỏ mất ổn định khi thay đổi các tham số hình học của vỏ và chỉ số phân bố vật liệu thành phần. Kết quả số chỉ ra ảnh hưởng của các tham số hình học, các tính chất vật liệu và điều kiện đầu đến các đặc trưng động lực phi tuyến của vỏ trụ FGM.*

Từ khóa: *Vỏ trụ; vật liệu FGM; hiện tượng tự dao động.*

Nonlinear dynamical analysis of functionally graded cylindrical shell under aerodynamic load using the Piston theory

Abstract: *This paper presents an analytical approach to investigate the dynamic characteristics of the functionally graded cylindrical thin shell subjected to aerodynamic loads. Based on the classical shell theory and the Piston theory supersonic aerodynamic, the governing equations of FGM cylindrical shell in the moving hypersonic airflow are established. The Galerkin technique together with Volmir's assumption and the fourth - order Runge - Kutta method are used to analyze dynamic problems of cylindrical shell. The research target is to find out critical Mach numbers of airflow, which made the shell unstable when geometrical parameters of shell and volume fraction index of the constituent material are varied. Numerical results show the influences of geometrical parameters, the material properties and initial conditions to the nonlinear flutter characteristics of FGM cylindrical shell.*

Keywords: *Cylindrical shell; FGM material; flutter.*

Nhận ngày 15/12/2016; sửa xong 27/01/2017; chấp nhận đăng 21/3/2017

Received: December 15, 2016; revised: January 27, 2016; accepted: March 21, 2017

1. Lời giới thiệu

Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) được nghiên cứu đầu tiên bởi một nhóm các nhà khoa học vật liệu của Nhật vào năm 1984 [1]. Có nhiều loại vật liệu cơ tính biến thiên nhưng loại được dùng phổ biến nhất hiện nay là loại hai thành phần được tạo nên từ gốm và kim loại biến đổi một cách trơn và liên tục từ mặt này sang mặt kia theo chiều dày thành kết cấu. Vật liệu FGM thường được sử dụng trong các kết cấu chịu nhiệt như các cấu kiện cơ bản trong máy bay và lò phản ứng hạt nhân [2].

Đối với phân tích động lực của vỏ FGM, có nhiều nghiên cứu tập trung vào các đặc trưng dao động của vỏ. Ng T Y. và cộng sự [3], Darabi và cộng sự [4] đã trình bày các phân tích tuyến tính và phi tuyến của vỏ trụ FGM. Loy và cộng sự [5], Pradhan và cộng sự [6] nghiên cứu các đặc trưng dao động tự do của vỏ trụ FGM. Bằng cách sử dụng kỹ thuật Galerkin cùng với phương pháp Ritz, Sofiyev [7] và Sofiyev và cộng sự [8] đã xác định các tham số tới hạn cho vỏ trụ mỏng dưới sự tăng tuyến tính của các tải trọng xoắn động và dưới tác dụng của tải trọng xung va chạm tuần hoàn. Bằng cách sử dụng lý thuyết vỏ biến dạng trượt bậc cao và phương pháp phần tử hữu hạn, Shariyat [9] đã nghiên cứu bài toán ổn định động lực phi tuyến của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của tải trọng dọc trục và áp suất ngoài có tính đến yếu tố nhiệt. Shariyat [10] đã trình bày phân tích ổn định động lực cho vỏ trụ FGM dưới tác dụng của tổ hợp phức tạp của các tải trọng nhiệt - điện - cơ. Huang và Han [11] đã trình bày bài toán ổn định động lực phi tuyến của vỏ trụ bằng vật liệu có cơ tính biến thiên chịu tác dụng của tải trọng dọc trục

[1]*TS, Trường Đại học Giao thông vận tải.*
**Tác giả chính. E-mail: phamthitoan155@yahoo.com.*

phụ thuộc thời gian bằng cách sử dụng tiêu chuẩn ổn định động lực của Budiansky - Roth. Bich và cộng sự [12] đã tiến hành phân tích động lực học panel trụ FGM có gân gia cường chịu tác dụng của tải trọng động và trong [13] Bich và Nguyen nghiên cứu dao động phi tuyến của vỏ trụ tròn FGM dựa trên các hệ thức Donnell cải tiến.

Tải trọng khí động lực được xét đến khi tính toán kết cấu của các thiết bị bay và kết cấu của các công trình có độ cao hoặc chiều dài lớn như nhà cao tầng, cầu dây văng, tháp ăng ten. Quan và cộng sự [14] đã nghiên cứu dao động của vỏ thoải mỏng FGM hai độ cong trên nền đàn hồi bằng cách sử dụng lý thuyết khí động lực phi tuyến Ilyushin. Trong [15], Trần Thế Văn đã nghiên cứu ổn định của tấm composite lớp chịu tải trọng khí động bằng phương pháp phần tử hữu hạn sử dụng lý thuyết Piston.

Mahmoudkhanu và cộng sự [16-17] đã sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển Love phân tích dự đoán hiện tượng tự dao động siêu âm của vỏ nón và vỏ trụ FGM. Sabri và Lakis [18] cũng đã công bố các kết quả bằng phương pháp phần tử hữu hạn hiện tượng tự dao động của vỏ trụ FGM. Phân tích hiện tượng tự dao động siêu âm của panel vỏ nón mở FGM với các cạnh ngàm và tựa đơn được trình bày bởi Davar và Shoknollahi [19]. Dowell cùng các cộng sự [20] đã tổng hợp các nghiên cứu về kết cấu công trình dân dụng chịu lực khí động. Chen và cộng sự [21] đã nghiên cứu bài toán dạng tự dao động uốn xoắn kết hợp với sự rung của cầu dây văng có nhịp chính lớn dưới tác dụng của dòng khi bị nhiễu, sử dụng mô hình lực khí động phi tuyến. Tác giả Nguyễn Đăng Bích, Nguyễn Võ Thông [22] đã khảo sát điều kiện ổn định khí động của công trình theo mô hình khí động lực thực nghiệm là một hàm bậc hai với dịch chuyển, kết quả đã chỉ ra điều kiện ổn định của hiện tượng tự dao động không chỉ phụ thuộc vào vận tốc gió mà còn phụ thuộc vào độ lệch ban đầu. Harry và Homer [23] đã sử dụng lý thuyết Piston phi tuyến để xác định hiện tượng tự dao động của cánh máy bay hình chữ nhật với tốc độ bay lớn, kết quả thực nghiệm tại các số Mach M = 3 và M = 6,86 phù hợp với kết quả tính toán lý thuyết. Ebraheem Al-Qassar [24] đã tính toán hiện tượng tự dao động uốn xoắn cánh máy bay, sử dụng mô hình lực khí động theo lý thuyết Piston phi tuyến để tính toán và xác định ranh giới hiện tượng tự dao động ở các chế độ bay khác nhau tương ứng với các số Mach. Mc Namara và cộng sự [25] đã nghiên cứu ứng xử khí động của cánh thiết bị bay trong chế độ bay siêu âm, sử dụng mô hình lực khí động theo lý thuyết Piston, có xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng nhiệt.

Trong bài báo này tác giả tiến hành phân tích động lực của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của tải trọng khí động lực bằng cách sử dụng lý thuyết Piston.

2. Vỏ trụ mỏng FGM dưới tác dụng của lực khí động của dòng vượt âm

2.1 Vật liệu FGM

Vật liệu có cơ tính biến thiên trong bài báo này, được giả thiết được làm từ hỗn hợp của ceramic (gốm) và kim loại với tỷ lệ thể tích của vật liệu thành phần được cho theo qui luật hỗn hợp:

$$V_m(z) + V_c(z) = 1, V_m(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k \quad (1)$$

trong đó h là chiều dày của vỏ trụ; $k \geq 0$ là chỉ số tỷ lệ thể tích các vật liệu thành phần; z là tọa độ chiều dày $\left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\right)$; Các chỉ số dưới c và m để chỉ thành phần gốm và kim loại tương ứng. Theo quy luật hỗn hợp, mô đun Young và mật độ khối có thể biểu diễn dưới dạng:

$$E(z) = E_m V_m + E_c V_c = E_c + (E_m - E_c)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k$$
$$\rho(z) = \rho_m V_m + \rho_c V_c = \rho_c + (\rho_m - \rho_c)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k \quad (2)$$

hệ số Poisson ν được giả thiết hằng số.

2.2 Các hệ thức liên hệ ứng suất - biến dạng của vỏ trụ FGM

Xét vỏ trụ mỏng với độ dày h, bán kính mặt giữa là R và chiều dài a . Chọn hệ trục tọa độ (x_1,x_2,z) sao cho trục x_1,x_2 là các hướng dọc trục và hướng vòng và trục z vuông góc với mặt giữa vỏ trụ, có chiều dương hướng vào phía trong (Hình 1). Theo lý thuyết vỏ cổ điển với tính phi tuyến hình học Von Karman - Donnell, khi đó các thành phần biến dạng tại mặt giữa và độ cong, độ xoắn của vỏ trụ liên hệ qua các thành phần chuyển vị u,v và w như sau [26]:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1^0 &= \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2, & \chi_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\
\varepsilon_2^0 &= \frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{1}{R}w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2, & \chi_2 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\
\gamma_{12}^0 &= \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_2}, & \chi_{12} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Các thành phần biến dạng tại điểm cách mặt giữa một khoảng z được biểu diễn qua các thành phần biến dạng tại mặt giữa và độ cong, độ xoắn sẽ là:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 - z\chi_1, \varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 - z\chi_2, \gamma_{12} = \gamma_{12}^0 - 2z\chi_{12} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) nhận được phương trình tương thích biến dạng như sau:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_1^0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_2^0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\gamma_{12}^0}{\partial x_1\partial x_2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \quad (5)$$

Định luật Hooke mô tả quan hệ ứng suất và biến dạng được cho bởi:

$$\sigma_1 = \frac{E(z)}{1-v^2}(\varepsilon_1 + v\varepsilon_2), \sigma_2 = \frac{E(z)}{1-v^2}(\varepsilon_2 + v\varepsilon_1), \tau_{12} = \frac{E(z)}{2(1+v)}\gamma_{12} \quad (6)$$

Các thành phần nội lực và mô men được tính qua các thành phần ứng suất như sau:

$$N_1 = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 dz = \frac{E_1}{1-v^2}(\varepsilon_1^0 + v\varepsilon_2^0) - \frac{E_2}{1-v^2}(\chi_1 + v\chi_2),$$

$$N_2 = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 dz = \frac{E_1}{1-v^2}(\varepsilon_2^0 + v\varepsilon_1^0) - \frac{E_2}{1-v^2}(\chi_2 + v\chi_1), \quad (7)$$

$$N_{12} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} dz = \frac{E_1}{2(1+v)}\gamma_{12}^0 - \frac{E_2}{1+v}\chi_{12}.$$

$$M_1 = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 z dz = \frac{E_2}{1-v^2}(\varepsilon_1^0 + v\varepsilon_2^0) - \frac{E_3}{1-v^2}(\chi_1 + v\chi_2),$$

$$M_2 = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 z dz = \frac{E_2}{1-v^2}(\varepsilon_2^0 + v\varepsilon_1^0) - \frac{E_3}{1-v^2}(\chi_2 + v\chi_1), \quad (8)$$

$$M_{12} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} z dz = \frac{E_2}{2(1+v)}\gamma_{12}^0 - \frac{E_3}{1+v}\chi_{12}.$$

trong đó

$$E_1 = \left[E_c + \frac{E_m - E_c}{k+1}\right]h, E_2 = \frac{(E_m - E_c)kh^2}{2(k+1)(k+2)} \quad (9)$$

$$E_3 = \left[\frac{E_c}{12} + (E_m - E_c)\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4}\right)\right]h^3$$

Từ (7) biểu diễn ngược lại, ta có:

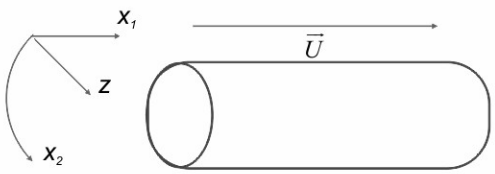
$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{E_1}(N_1 - vN_2) + \frac{E_2}{E_1}\chi_1, \varepsilon_2^0 = \frac{1}{E_1}(N_2 - vN_1) + \frac{E_2}{E_1}\chi_1, \gamma_{12}^0 = \frac{2(1+v)}{E_1}N_{12} + 2\frac{E_2}{E_1}\chi_{12} \quad (10)$$

Từ (7) và (8) ta nhận được:

$$M_1 = \frac{E_2}{E_1}N_1 - \frac{E_1E_3 - E_2^2}{E_1(1-v^2)}(\chi_1 + v\chi_2), M_2 = \frac{E_2}{E_1}N_2 - \frac{E_1E_3 - E_2^2}{E_1(1-v^2)}(\chi_2 + v\chi_1),$$
$$M_{12} = \frac{E_2}{E_1}N_{12} - \frac{E_1E_3 - E_2^2}{E_1(1-v^2)}\chi_{12} \quad (11)$$

2.3 Các phương trình cơ bản của vỏ trụ FGM chịu tải trọng khí động

Giả thiết vỏ trụ FGM nằm dọc theo luồng khí chuyển động với vận tốc vượt âm $\vec{U}$



Hình 1. *Vỏ trụ bằng vật liệu có cơ tính biến thiên*

Dòng khí tác dụng lên mặt của vỏ áp lực q_0 hướng theo pháp tuyến của mặt vỏ. Theo lý thuyết vỏ Love phương trình chuyển động của vỏ có dạng [26]:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{12}}{\partial x_2}=\rho_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}=\rho_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(N_1\frac{\partial w}{\partial x_1}+N_{12}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(N_{12}\frac{\partial w}{\partial x_1}+N_2\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+\frac{N_2}{R}+q_0=\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{14}$$

trong đó

$$\rho_1=\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(z)dz=\left(\rho_c+\frac{\rho_m-\rho_c}{k+1}\right)h. \tag{15}$$

Theo lý thuyết Piston tuyến tính lực khí động xác định theo công thức

$$q_0=-\gamma P_\infty\left(M\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{1}{a_\infty}\frac{\partial w}{\partial t}\right) \tag{16}$$

trong đó γ là tỷ số nhiệt dung của chất khí; a_∞ là vận tốc âm; P_∞ là áp suất khí chưa bị nhiễu; M là số Mach; $M=\frac{U}{a_\infty}$, U là vận tốc dòng khí.

Sử dụng giả thiết Volmir, $\rho_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\to 0, \rho_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\to 0$ vì $u << w$, $v << w$, hai phương trình (12),(13) thỏa mãn đồng nhất khi ta đưa vào hàm ứng suất φ sao cho:

$$N_1=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}, N_2=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, N_{12}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} \tag{17}$$

Phương trình (14) đưa về dạng:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2}+N_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+N_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{N_2}{R}+q_0=\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{18}$$

Thay (10) vào phương trình (5) và sử dụng (17) đưa phương trình tương thích về:

$$\frac{1}{E_1}\Delta\Delta\varphi=-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \tag{19}$$

Thay (11) vào phương trình (18) và sử dụng (16) và (17) ta có phương trình chuyển động:

$$\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\gamma P_\infty\left(M\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{1}{a_\infty}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{E_1E_3-E_2^2}{E_1(1-v^2)}\Delta\Delta w+$$
$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}=0 \tag{20}$$

Các phương trình (19), (20) chứa 2 ẩn φ và w dưới tác dụng của lực khí động được sử dụng nghiên cứu dao động phi tuyến và ổn định động lực của vỏ trụ FGM.

3. Phân tích động lực phi tuyến của vỏ trụ FGM

Giả thiết vỏ trụ tựa đơn ở hai đầu, điều kiện biên có dạng:

$w=0, M_1=0, N_1=0, N_{12}=0$ tại $x_1=0$ và $x_1=a$ (21)

Điều kiện (21) thỏa mãn nếu ta đặt nghiệm như sau:

$$w=f_1(t)\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{nx_2}{R}+f_2(t)\sin\frac{(m+1)\pi x_1}{a}\sin\frac{nx_2}{R} \tag{22}$$

Thay (22) vào phương trình (19) và giải phương trình này ta xác đinh hàm ứng suất φ như sau:

$$\varphi=\varphi_1\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{nx_2}{R}+\varphi_2\sin\frac{(m+1)\pi x_1}{a}\sin\frac{nx_2}{R}+\varphi_3\cos\frac{2nx_2}{R}+\varphi_4\cos\frac{2m\pi x_1}{a}$$
$$+\varphi_5\cos\frac{2(m+1)\pi x_1}{a}+\varphi_6\cos\frac{(2m+1)\pi x_1}{a}+\varphi_7\cos\frac{\pi x_1}{a}+ \tag{23}$$
$$+\varphi_8\cos\frac{2nx_2}{R}\cos\frac{(2m+1)\pi x_1}{a}+\varphi_9\cos\frac{2nx_2}{R}\cos\frac{\pi x_1}{a}$$

ở đây ký hiệu

$$\varphi_1 = \frac{f_1 m^2 a^2 E_1}{R\pi^2[m^2+n^2\lambda^2]^2}, \varphi_2 = \frac{f_2 (m+1)^2 a^2 E_1}{R\pi^2[(m+1)^2+n^2\lambda^2]^2}$$

$$\varphi_3 = \frac{E_1}{32n^2\lambda^2}[f_1^2 m^2 + f_2^2 (m+1)^2], \varphi_4 = \frac{f_1^2 E_1 n^2 \lambda^2}{32m^2} \quad (24)$$

$$\varphi_5 = \frac{f_2^2 E_1 n^2 \lambda^2}{32(m+1)^2}, \varphi_6 = \frac{f_1 f_2 E_1 n^2 \lambda^2}{4(2m+1)^2}, \varphi_7 = \frac{-f_1 f_2 E_1 n^2 \lambda^2}{4}$$

$$\varphi_8 = \frac{-f_1 f_2 E_1 n^2 \lambda^2}{4[(2m+1)^2+4m^2\lambda^2]^2}, \varphi_9 = \frac{f_1 f_2 E_1 n^2 \lambda^2 (2m+1)^2}{4[1+4n^2\lambda^2]^2}$$

Thay thế các biểu thức (22) - (23) vào phương trình (20) và áp dụng phương pháp Galerkin, ta được:

$$\rho_1 \frac{a^4}{\pi^4}\ddot{f}_1 + \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1(1-v^2)}[m^2+n^2\lambda^2]^2 f_1 + \frac{m^4 a^4 E_1}{R^2\pi^4[m^2+n^2\lambda^2]^2} f_1 + \gamma P_\infty \frac{a^4}{\pi^4}\left[-f_2 \frac{4Mm(m+1)}{a(2m+1)} + \frac{1}{a_\infty}\dot{f}_1\right] + \frac{f_1 f_2^2 n^4 \lambda^4 E_1}{16}\left[4 + \frac{m^2(m+1)^2}{n^4\lambda^4} + \frac{(2m+1)^4}{[1+4n^2\lambda^2]^2} + \frac{1}{[(2m+1)^2+4n^2\lambda^2]^2}\right] + f_1^3 \frac{E_1}{16}[m^4+n^4\lambda^4] = 0 \quad (25)$$

$$\rho_1 \frac{a^4}{\pi^4}\ddot{f}_2 + \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1(1-v^2)}[(m+1)^2+n^2\lambda^2]^2 f_2 + \frac{(m+1)^4 a^4 E_1}{R^2\pi^4[(m+1)^2+n^2\lambda^2]^2} f_2 + \gamma P_\infty \frac{a^4}{\pi^4}\left[f_1 \frac{4Mm(m+1)}{a(2m+1)} + \frac{1}{a_\infty}\dot{f}_2\right] + \frac{f_2 f_1^2 n^4 \lambda^4 E_1}{16}\left[4 + \frac{m^2(m+1)^2}{n^4\lambda^4} + \frac{(2m+1)^4}{[1+4n^2\lambda^2]^2} + \frac{1}{[(2m+1)^2+4n^2\lambda^2]^2}\right] + f_2^3 \frac{E_1}{16}[(m+1)^4+n^4\lambda^4] = 0 \quad (26)$$

Từ (25), (26) ta có thể nhận được hệ thức xác định tần số dao động riêng của vỏ:

$$|(K - \omega^2 H)| = 0 \quad (27)$$

trong đó

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1(1-v^2)}[m^2+n^2\lambda^2]^2 + \frac{m^4 a^4 E_1}{R^2\pi^4[m^2+n^2\lambda^2]^2} & 0 \\ 0 & \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1(1-v^2)}[(m+1)^2+n^2\lambda^2]^2 + \frac{(m+1)^4 a^4 E_1}{R^2\pi^4[(m+1)^2+n^2\lambda^2]^2} \end{bmatrix}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} \rho_1 \frac{a^4}{\pi^4} & 0 \\ 0 & \rho_1 \frac{a^4}{\pi^4} \end{bmatrix}$$

Hệ hai phương trình vi phân phi tuyến (25), (26) mô tả dao động của vỏ, kết hợp với điều kiện đầu và sử dụng phương pháp Runge - Kutta bậc 4 và chương trình phần mềm Matlab ta sẽ nhận được đáp ứng động lực của vỏ.

Vấn đề đặt ra là với các giá trị khác nhau của vận tốc dòng khí U tương ứng với số Mach $M = \frac{U}{a_\infty}$, ta cần xác định vận tốc dòng để với vận tốc này trong khoảng thời gian khảo sát đáp ứng động lực của vỏ tăng liên tục theo thời gian. Ta gọi số Mach tương ứng này là số Mach tới hạn, ký hiệu là M_{th}. Khi $M \geq M_{th}$ vỏ trụ mất ổn định. Đó cũng là tiêu chuẩn để xét vỏ trụ bắt đầu bị mất ổn định.

4. Kết quả số và thảo luận

4.1 Đánh giá độ tin cậy

Để đánh giá độ tin cậy của chương trình tính toán, tần số dao động riêng của vỏ trụ FGM đạt được từ biểu thức (25), (26) được so sánh với Loy và cộng sự [5] và Bich và cộng sự [13]. Đối tượng nghiên cứu của [5] và [13] đều là vỏ trụ FGM như bài báo. Theo [5], xét vỏ trụ FGM gồm các thành phần từ thép không gỉ và Nickel với các tính chất vật liệu $E_m = 207{,}7877.10^9$ N/m^2, $\rho_m = 8166$kg/m^3, $E_c = 205{,}0980.10^9$ N/m^2, $\rho_c = 8900$kg/m^3, $\nu_c = \nu_m = \nu = 0{,}31$, ta đưa các số liệu này vào chương trình tính toán của bài báo, kết quả nhận được tần số dao động riêng để so sánh độ tin cậy.

So sánh tần số dao động riêng được thể hiện ở Bảng 1, loại trừ số hạng đầu với $m = 1$, $n = 1$, các số hạng khác sai khác không đáng kể.

Bảng 1. *So sánh các tần số dao động riêng khác nhau (Hz) tương ứng với số sóng tròn n với m = 1, h/R=0.002, a/R=20, k=2*

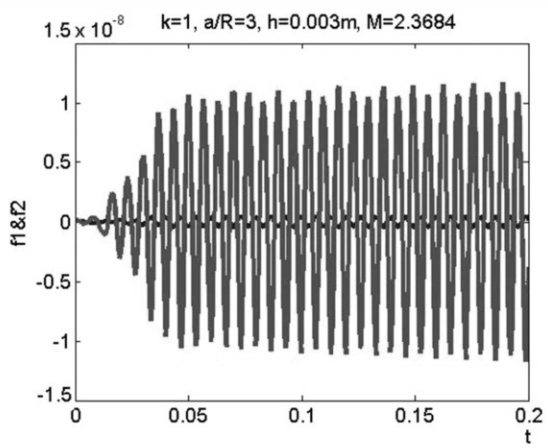
n	Bài báo	Bich và cộng sự [13]	Loy và cộng sự [5]
1	19.0286	19.0079	13.321
2	5.207	5.0554	4.5114
3	4.8407	4.4188	4.1827
4	7.7707	7.3179	7.0905
5	12.0222	11.5577	11.329
6	17.277	16.8187	16.587
7	23.5031	23.0521	22.454
8	30.7006	30.2487	30.014
9	38.8375	38.4063	38.171
10	47.9458	47.5242	47.288

4.2 Đáp ứng hiện tượng tự dao động phi tuyến và số Mach tới hạn

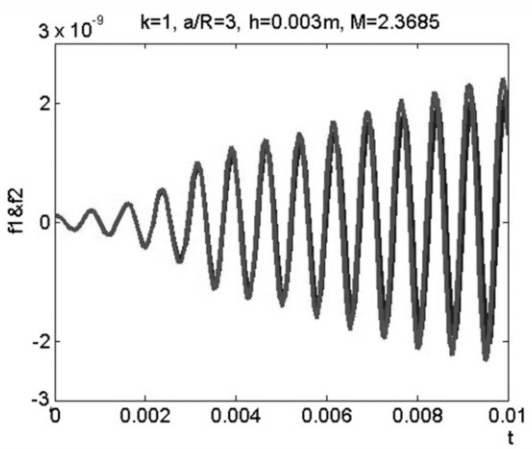
Dưới đây, tác giả sử dụng phương pháp Runge - Kutta bậc 4 và ngôn ngữ lập trình Matlab để giải hệ phương trình (25), (26). Để minh họa cho cách tiếp cận này, ta xét vỏ trụ FGM nhôm-oxit nhôm với các tham số hình học và vật liệu sau đây [12]: h=0,003m, R=1m, a=3m, k=1, E_c = 380 x 10^9 N/m^2, ρ_c = 3800 kg/m^3, E_m = 70 x 10^9N/m^2, ρ_c = 2720 kg/m^3, ν = 0,3 và các đặc trưng của lực khí động [15]: γ = 1,4 , P_∞ = 99473,4 N/m^2 , a_∞ = 340m/s. Điều kiện đầu $f_1(0) = 1e\text{-}10$, $\dot{f}_1(0) = 0$, $f_2(0) = 1e\text{-}10$, $\dot{f}_2(0) = 0$

Ta khảo sát ở giai đoạn gần mất ổn định dáng điệu của đáp ứng động lực của vỏ thể hiện như thế nào. Hình 2 là đáp ứng động lực tự dao động phi tuyến của vỏ trụ FGM với M = 2.3684, vỏ chưa mất ổn định. Hàm f_2 dao động điều hòa với biên độ nhỏ. Hàm f_1 dao động với biên độ tăng trong khoảng thời gian đầu t < 0,05s sau đó giảm dần và với t > 0,05s thực hiện dao động điều hòa.

Khi số Mach tăng xấp xỉ 0,0001 (tương ứng vận tốc tăng ≈ 0,034m/s), tức là M_{th}=2.3685 đáp ứng động lực bắt đầu tăng liên tục, vỏ mất ổn định (Hình 3).



Hình 2. *Đáp ứng động lực của vỏ trụ với số Mach M=2,3684*



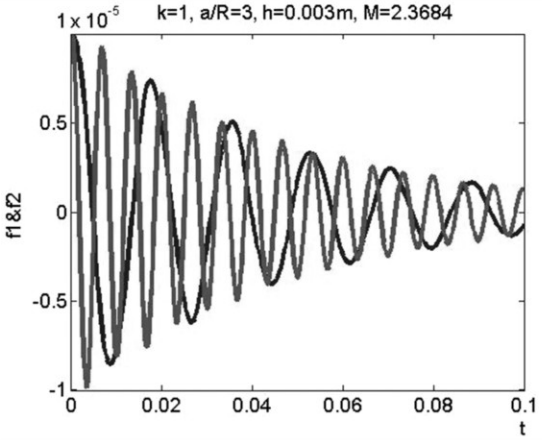
Hình 3. *Đáp ứng động lực của vỏ trụ mất ổn định với số M_{th} =2,3685 khi h = 0.003m*

a) Ảnh hưởng của điều kiện đầu

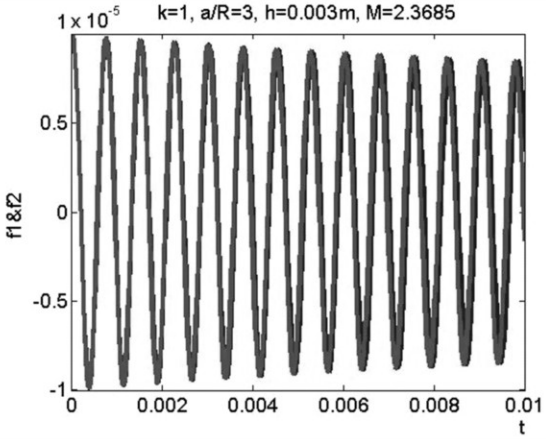
Xét trường hợp thay đổi điều kiện đầu. Tại t = 0, $f_1(0) = 1e - 5$, $f_2(0) = 1e - 5$ và t = 0, $\dot{f}_1(0)$, $\dot{f}_2(0)$, Đáp ứng động lực thể hiện trên các Hình 4 và Hình 5.

Hình 4 với số Mach M = 2.3684 đồ thị thể hiện dao động giảm dần. Khi M = 2.3685, hiện tượng mất ổn định như trên không xảy ra. Do ảnh hưởng của điều kiện đầu, biên độ dao động lúc đầu giảm sau đó có xu hướng là dao động điều hòa.

Như vậy khi thay đổi điều kiện đầu, tần số dao động không thay đổi. Do yếu tố lực cản khí động và yếu tố phi tuyến trong các phương trình (25) và (26) biên độ dao động không tăng đến vô cùng mà đến thời điểm nào đó hiện tượng tự dao động là điều hòa.



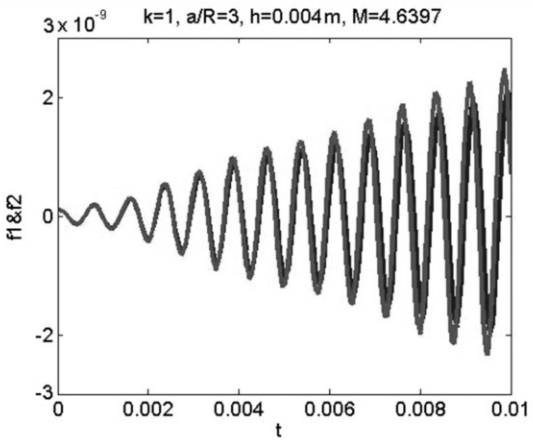
Hình 4. *Đáp ứng động lực của vỏ trụ với số Mach M=2,3684 khi thay đổi điều kiện đầu*



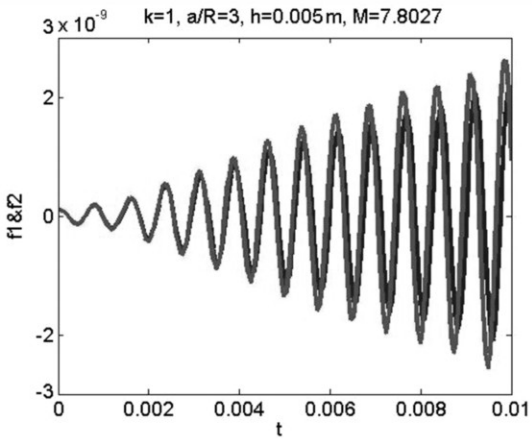
Hình 5. *Đáp ứng động lực của vỏ trụ với số M_{th} =2,3685 khi thay đổi điều kiện đầu*

b) Ảnh hưởng của tỷ số $\frac{h}{R}$

Khi tăng chiều dày của vỏ, M_{th} tăng. Ta xét vỏ nêu trên với k = 1, a = 3m. R =1m nhưng với h = 0,004m khi đó M_{th} = 4.6397, trạng thái mất ổn định xảy ra thể hiện trên Hình 6.



Hình 6. *Đáp ứng động lực của vỏ trụ mất ổn định với M_{th}=4.6397 khi h = 0.004m*



Hình 7. *Đáp ứng động lực của vỏ trụ với mất ổn định M_{th}=7.8027 khi h = 0.005m*

Trên Hình 7 xét vỏ nêu trên với h = 0.005m ta nhận được M_{th} = 7.8027. Khảo sát cho thấy trong giai đoạn chưa mất ổn định, sự thay đổi của số Mach ảnh hưởng không đáng kể đến tần số dao động. Khi chiều dày h của vỏ trụ tăng, M_{th} tăng nhanh. Bảng 2 thể hiện M_{th} khi tỷ số h/R tăng.

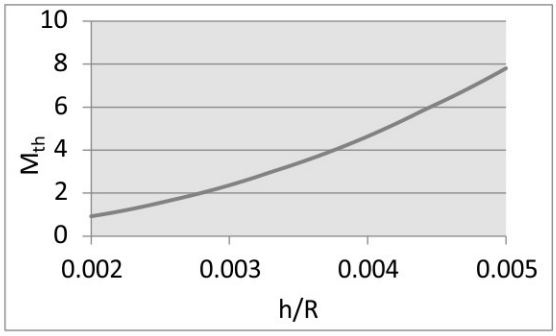
Bảng 2. *M_{th} khi tỷ số h/R thay đổi, k = 1, a = 3m*

H (m) / R (m)	0.002	0.0025	0.003	0.0035	0.004	0.0045	0.005
1	0.9235	1.5539	2.3685	3.4012	4.6397	6.142	7.8027
1.1	0.8112	1.364	2.0878	3.0057	4.0894	5.3869	6.9602
1.2	0.7212	1.2159	1.872	2.6649	3.6615	4.8132	6.1312
1.3	0.6527	1.0972	1.6721	2.4174	3.2793	4.3191	5.5811
1.4	0.588	0.9911	1.5274	2.1751	2.9793	3.9603	5.011
1.5	0.541	0.9066	1.3861	1.991	2.7383	3.5717	4.5786

Hình 8 thể hiện M_{th} thay đổi theo chiều dày của h (k = 1, R = 1m, a = 3m), M_{th} lớn nhất khi R = 1m, h = 0.005m, M_{th} = 7.8027.

c) Ảnh hưởng của tỷ số $\frac{a}{R}$

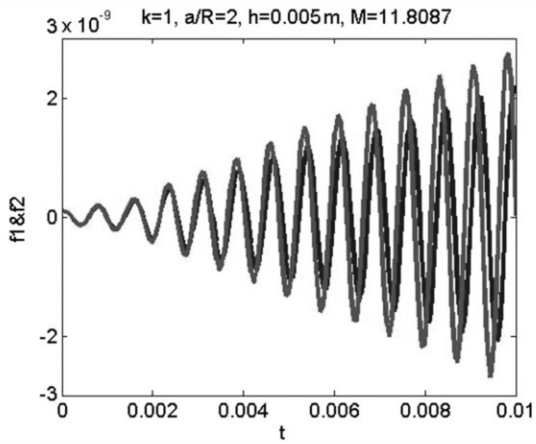
Ảnh hưởng của tỷ số a/R đến đáp ứng động lực của vỏ FGM được chỉ ra trên Hình 9 với $\frac{a}{R}$ =2, h=0.005m. Khi M_{th} = 11.8087, vỏ mất ổn định. Bảng 3 thể hiện khi tỷ số a/R thay đổi, M_{th} thay đổi. Khi a/R tăng, M_{th} giảm.



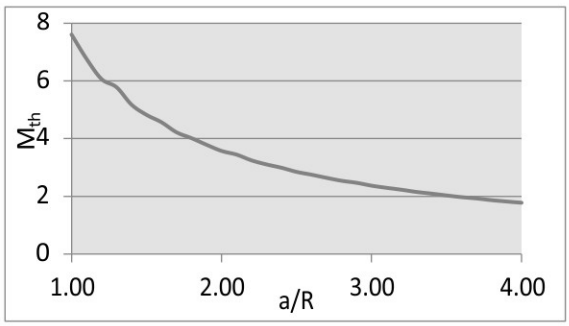
Hình 8. *Đồ thị của M_{th} theo tỷ số h/R*

Bảng 3. *Số Mach tới hạn ứng với tỷ số a/R và h thay đổi (k = 1, R = 1m)*

H (m) / a/R	0.002	0.003	0.004	0.005
1	2.805	7.6051	14.5099	25.1604
1.5	1.856	4.8219	9.5478	16.1834
2	1.3861	3.5717	7.0906	11.8087
2.5	1.1084	2.846	5.5757	9.5293
3	0.9235	2.3685	4.6397	7.8027
3.5	0.7881	2.0294	3.9895	6.7013
4	0.6881	1.7759	3.4705	5.8428



Hình 9. *Đáp ứng động lực của vỏ trụ mất ổn định với M_{th}=11.8087*



Hình 10. *Đồ thị của M_{th} theo tỷ số a/R*

Hình 10 thể hiện đồ thị M_{th} khi $\frac{a}{R}$ tăng với h=0.003m. M_{th} giảm nhanh ở giai đoạn từ 1 đến 2.5, sau đó giảm chậm hơn. Đối với vỏ trụ dài xuất hiện mất ổn định sớm hơn.

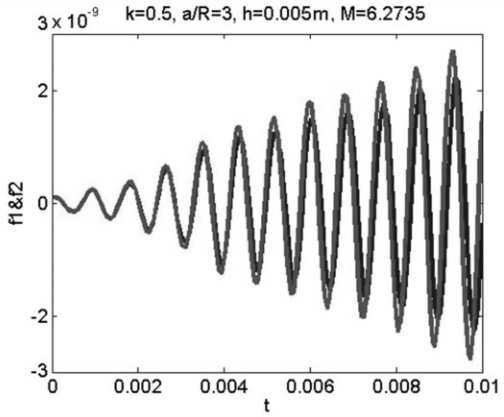
d) Ảnh hưởng của chỉ số k

Khi cho chỉ số thể tích k thay đổi, M_{th} thay đổi. Khi k = 0, vật liệu hoàn toàn là kim loại, M_{th} nhỏ, khi $k = \infty$, vật liệu hoàn toàn là ceramic, M_{th} tăng rõ rệt. Điều này hợp lý vì môđun đàn hồi của thép nhỏ hơn ceramic nhiều. Trên Bảng 4 thể hiện số M_{th} thay đổi khi k, h thay đổi của vỏ với $\frac{a}{R}$ =3.

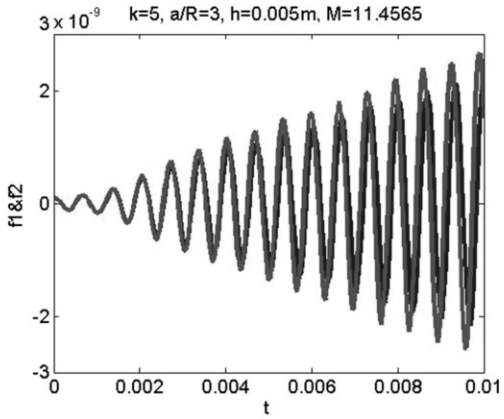
Bảng 4. *M_{th} khi cho tỷ số thể tích k và chiều dày h thay đổi của vỏ với $\frac{a}{R}$ =3*

h (m) / k	0	0.2	0.5	1	2	5	∞
0.002	0.3207	0.5519	0.741	0.9235	1.1152	1.3565	1.7409
0.003	0.8317	1.4296	1.9073	2.3685	2.8623	3.4784	4.5147
0.004	1.6312	2.8037	3.7381	4.6397	5.606	6.8145	8.8551
0.005	2.7285	4.6919	6.2735	7.8027	9.4354	11.4565	14.8118

Hình 11 - 12 thể hiện đáp ứng động lực của vỏ khi mất ổn định với k = 0,5 và k = 5. Khi k = 0.5, M_{th} = 6.2735, vỏ trụ mất ổn định. Khi k = 5, M_{th} = 11.4565, vỏ trụ mất ổn định.



Hình 11. *Đáp ứng động lực của vỏ trụ mất ổn định với M_{th}=6.2735 khi k = 0.5*



Hình 12. *Đáp ứng động lực của vỏ trụ mất ổn định với M_{th}=11.4565 khi k = 5*

5. Kết luận

Trong bài báo đã tiếp cận cách phân tích đáp ứng động lực của hiện tượng tự dao động phi tuyến của vỏ trụ mỏng FGM dưới tác dụng của lực khí động theo lý thuyết Piston bằng cách sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển. Các kết quả số của đáp ứng động lực của vỏ trụ FGM đã đạt được bằng phương pháp Runge - Kutta và nhận biết giá trị tới hạn của vận tốc dòng khí qua số Mach tới hạn. Với kết quả tính toán và các hình ảnh minh họa ta có các nhận xét sau đây:

- Khi tăng *k*, tức là ceramic tăng, M_{th} tăng, vỏ ổn định hơn.

- Các tham số hình học đóng vai trò quan trọng trong hiện tượng tự dao động của vỏ FGM. Khi tỷ số $\frac{h}{R}$ tăng, M_{th} tăng nhanh. Khi tỷ số $\frac{a}{R}$ tăng, M_{th} giảm nhanh.

- Điều kiện ban đầu có ảnh hưởng đến giá trị của M_{th}.

Tài liệu tham khảo

1. Koizumi M (1993), "The concept of FGM", *Ceram Trans Funct Grad Mater*:34:3-10.

2. Miyamoto Y, Kaysser W.A, Rabin BH, Kawasaki A, Ford RG (1999), "Functionally graded materials: design, processing and applications", *London: Kluwer Academic Publishers.*

3. Ng TY, Lam KY, Liew KM, Reddy JN (2001), "Dynamic stability analysis of functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading", *Int J Solids Struct*; 38:1295-309.

4. Darabi M, Darvizeh M, Darvizeh A (2008), "Non-linear analysis of dynamic stability for functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading", *Compos Struct*, 83:201-11.

5. Loy CT, Lam KY, Readdy JN (1999), "Vibration of functionally graded cylindrical shells", *Int J Mech Sci*, 41:309-24.

6. Pradhan SC, Loy CT, Lam KY,Reddy JN (2000), "Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditons", *Appl Acoust*, 61:111-29.

7. Sofiyev AH. (2005), "The stability of compositionally graded ceramic-metal cylindrical shells under aperiodic axial impulsive loading", *Compos Struct*, 69:247-57.

8. Sofiyev AH, Schnack E (2004), "The stability of functionally graded cylindrical shells under linearly increasing dynamic torsional loading", *Eng Struct*, 26:1321-31.

9. Shariyat M (2008), "Dynamic thermal buckling of suddenly heated temperature-dependent FGM cylindrical shells under combined axial compression and external pressure", *Int J Solids Struct*, 45:2598-612.

10. Shariyat M (2008), "Dynamic buckling of suddenly loaded imperfect hybrid FGM cylindrical with temperature-dependent material properties under thermo-electro-mechanical loads", *Int J Mech Sci*, 50:1561-71.

11. Huang H, Han Q (2010), "Nonlinear dynamic buckling of functionally graded cylindrical shells subjected to a time-dependent axial load", *Compos Struct*, 92-593-8.

12.Dao Huy Bich, Dao Van Dung, Vu Hoai Nam (2012), "Nonlinear dynamical analysis of eccentrically stiffened functionally graded cylindrical panels", *Composite Structures*, 94(8):2465-73.

13. Dao Huy Bich, Nguyen Xuan Nguyen (2012), "Nonlinear vibration of functionally graded circular cylindrical shells based on improved Donnell equations", *Journal of Sound and Vibration*, 331: 5488-5501.

14. Tran Quoc Quan, Dao Huy Bich, Nguyen Dinh Duc (2015), "Nonlinear flutter of double curved thin FGM shallow shells on elastic foundations using Ilyushin nonlinear supersonic aerodynamic theory", *Proccedings of the XII National conference on solid Mechanics*, 2:1178-1185.

15. Tran The Van (2012), *Nghiên cứu ổn định của tấm composite lớp chịu tải trọng khí động*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật.

16. S.Mahmoudkhani, H.Haddadpour, H.M. Navazi (2010), "Supersonic flutter prediction of functionally graded conical shells", *Composite Structures*, 92(2):377-386.

17. H.Haddadpour, S.Mahmoudkhani, H.M. Navazi (2008), "Supersonic flutter prediction of functionally graded conical shells", *Composite Structures*, 83(4):391-386.

18. F.Sabri, A.A. Lakis (2013), "Efficient Hybrid Finite Element Method for Flutter Prediction of Functionally Graded Cylindrical Shells", *Journal of Vibration and Acoustics*, 136(1) First published as doi: 10.1115/1.4025397.

19. A. Davar, H. Shokrollahi (2013), "Flutter of functionally graded open conical shell panels subjected to supersonic air flow", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 27(6):1036-1052 (in Iran).

20. Dowell E.H., Crawley E.F., Curtiss Jr.H.C., Peters D.A.,Scanlan R.H., and Fernando Sisto (1995), *A Modern Course in Aeroelasticity*, third revised and enlarged edition, Kluwer Academic Publishers.

21. Chen X.,Kareem A. and Haan Jr.F.L.(2000),"Nonlinear Aerodynamic Analysis of Bridges under Turbulent Winds: The New Frontier in Bridge Aerodynamics", *University of Notre Dame*, IN 46556-0767,USA.

22. Nguyễn Đăng Bích , Nguyễn Võ Thông (1999), "Ổn định hệ tự dao động có cưỡng bức khi lực khí động có yếu tố phi tuyến bậc hai với dịch chuyển của công trình", *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị CHVRBD toàn quốc lần thứ VI*, Hà Nội, tr.53-59.

23. Harry L.R. and Homer G.M. (1961), *Flutter at very high speeds*, Technical Note D-942, National Aeronautics and Space Administration Washington.

24. Ebraheem Al-QASSAE A.A.(2008), "Numerical modeling and dynamic simulations of nonlinear aerothermoelastic of a double-wedge lifting surface", *Journal of Engineering Science and Technology*, 3(3):213-223.

25. McNamara J.J., Friedmann P.P., Powell K.G., Thuruthimattam B.J. (2005), "Three- dimensional Aeroelastic and Aerothermoelastic behavior in Hypersonic Flow", *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Material Conference,* 18-21, Texas.

26. Brush DD, Almroth BO (1975), *Buckling of bars, plates and shells*, Mc.Graw-Hill, Inc.