



PHÂN TÍCH PANEL TRỤ FGM CHỊU UỐN CÓ XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA NHIỆT ĐỘ - LỜI GIẢI GIẢI TÍCH VÀ LỜI GIẢI SỐ

Trần Hữu Quốc^{1*}, Dương Thành Huân², Trần Minh Tú³, Nghiêm Hà Tân⁴

Tóm tắt: Bài báo xây dựng lời giải giải tích và mô hình phần tử hữu hạn với phần tử đẳng tham số 9 nút, mỗi nút 5 bậc tự do theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) để phân tích uốn panel trụ bằng vật liệu có cơ tính biến thiên FGM dưới tác dụng của tải trọng cơ học và nhiệt độ. Vật liệu FGM gồm hai loại vật liệu thành phần ceramic - kim loại với mô đun đàn hồi E biến thiên theo hàm lũy thừa, hệ số Poisson là hằng số dọc theo chiều dày panel (P-FGM). Độ tin cậy của mô hình tính được kiểm chứng qua so sánh với kết quả của một số tác giả đã công bố. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, tham số hình học panel trụ cũng như điều kiện biên đến độ võng của panel trụ đã được khảo sát nhằm đưa ra những nhận xét hữu ích về ứng xử tĩnh của panel trụ FGM.

Từ khóa: Vật liệu có cơ tính biến thiên; panel trụ; phân tích tĩnh; lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT); phương pháp phần tử hữu hạn (FEM); ảnh hưởng của nhiệt độ.

Bending analysis of functionally graded cylindrical shell panel under mechanical load and thermal effect - Analytical solution and Finite element model

Abstract: In this paper, the analytical solution, and the nine-noded isoparametric quadratic element of finite element model based on the first-order shear deformation shell theory are presented for bending analysis of functionally graded cylindrical shell panel under mechanical load and thermal effect. Functionally graded materials (FGM) are made from a mixture of ceramics and metals. Poisson's ratio is assumed to be constant, but their Young's moduli varies continuously in the thickness direction according to a simple power law distribution in terms of the volume fraction of constituents. The accuracy of the formulations are validated by comparing the results with those available in the literature. The effects of material composition, geometric properties, and boundary conditions on the deflection of cylindrical panel are studied.

Keywords: Functionally graded materials; cylindrical shell panel; bending analysis; FSDT; FEM; thermal environment.

Nhận ngày 27/10/2016; sửa xong 29/12/2016; chấp nhận đăng 21/3/2017

Received: October 27, 2016; revised: December 29, 2016; accepted: March 21, 2017



1. Mở đầu

Kết cấu vỏ có cơ tính biến thiên (FGM) nói chung và panel trụ FGM nói riêng ngày càng được ứng dụng rộng rãi trong các ngành công nghiệp khác nhau như công nghiệp hàng không vũ trụ, công nghiệp tàu biển, giao thông vận tải, xây dựng, ... Vật liệu có cơ tính biến thiên điển hình là hỗn hợp của ceramic và kim loại. Khả năng chịu nhiệt cao của ceramic cùng với độ bền dẻo của kim loại tạo nên loại vật liệu có khả năng làm việc trong môi trường nhiệt độ cao mà không xuất hiện ứng suất dư cũng như sự bong tách các lớp vật liệu.

Các lý thuyết vỏ cổ điển (CST) dựa trên giả thiết Kirchhoff-Love-đoạn thẳng pháp tuyến của mặt trung bình luôn thẳng và vuông góc với mặt trung bình khi biến dạng, đồng thời chiều dài đoạn thẳng này không đổi. Nói chung các lý thuyết này không phù hợp với vỏ dày và vỏ bằng vật liệu dị hướng. Để khắc phục hạn chế này, Reissner đề xuất Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT). Bằng việc chấp nhận giả thiết pháp tuyến mặt trung bình sau biến dạng vẫn thẳng nhưng không còn vuông góc, Kraus [1] và Gould [2-3] đã khảo sát tấm và vỏ đẳng hướng. Nhược điểm của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất là phải xác định hệ số hiệu chỉnh cắt. Vì vậy, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đã được phát triển để khắc phục nhược điểm này. Các nghiên cứu chuyên sâu của Reddy theo mô hình này được trình bày trong [4], của Lakis và Toorani trong [5]. Tuy nhiên, cần chú ý rằng, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao của Reddy không thỏa mãn điều kiện biên về ứng suất tại mặt trên và mặt dưới của vỏ. Bài viết tổng quan về các lý thuyết vỏ được Khdeir và nhóm tác giả trình bày trong [6].

¹ TS, Khoa Xây dựng DD&CN, Trường Đại học Xây dựng.

² ThS, Khoa Cơ điện, Học viện Nông nghiệp Việt Nam.

³ PGS. TS, Khoa Xây dựng DD&CN, Trường Đại học Xây dựng.

⁴ ThS, Khoa Xây dựng DD&CN, Trường Đại học Xây dựng.

*Tác giả chính. E-mail: thquoc@gmail.com.

Ảnh hưởng của nhiệt độ là không thể tránh khỏi đối với nhiều kết cấu trong quá trình sản xuất hoặc sử dụng. Hiện nay, việc sử dụng các kết cấu bằng vật liệu mới nói chung, vật liệu có cơ tính biến thiên nói riêng trong các ngành công nghiệp đang có xu thế ngày càng tăng do những ưu điểm nổi bật của loại vật liệu này so với vật liệu truyền thống. Do vậy, việc tìm hiểu về ứng xử của kết cấu FGM dưới tác dụng đồng thời của tải trọng cơ học và nhiệt độ là hướng nghiên cứu thu hút sự quan tâm các nhà khoa học trên thế giới.

Trong thực tế, đã có những nghiên cứu về ứng suất nhiệt trong vỏ đẳng hướng trình bày trong sách chuyên khảo của Timoshenko và Woinowsky-Krieger [7], Nowacki [8]. Ứng suất nhiệt trong vỏ trụ có các nghiên cứu của Stavsky và Smolash [9], Padovan [10], Hyer và Cooper [11]. Lời giải về ứng suất nhiệt đàn hồi trong vỏ composite lớp bằng các lý thuyết và phương pháp giải khác nhau được trình bày trong rất nhiều nghiên cứu đã công bố [12-16]. Hay Zhao và cộng sự đã sử dụng phương pháp phần tử tự do kp-Ritz [17-18] để phân tích đàn hồi nhiệt và dao động vỏ trụ có cơ tính biến thiên, phân tích ổn định nhiệt và cơ học panel trụ có cơ tính biến thiên vào các năm 2009 và 2010. Trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), Sheng và Wang [19] đã khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ đến bài toán dao động, ổn định và ổn định động của vỏ trụ tròn FGM trên nền đàn hồi.

Tuy nhiên, những nghiên cứu về ứng xử uốn của kết cấu panel trụ FGM chịu ảnh hưởng của nhiệt độ hay chịu tác dụng đồng thời của tải trọng cơ học và nhiệt độ hiện nay vẫn còn rất hạn chế. Do vậy, mục tiêu của bài báo này, tác giả sẽ xây dựng lời giải giải tích và mô hình phần tử hữu hạn để phân tích ứng xử uốn của Panel trụ chịu tác dụng của tải trọng cơ học và nhiệt độ theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Dạng nghiệm Navier được áp dụng trong lời giải giải tích cho panel trụ bốn biên tựa khớp, đồng thời phần tử tứ giác đẳng tham số chín nút, mỗi nút bậc tự do được sử dụng khi xây dựng mô hình PTHH.



2. Mô hình panel trụ FGM có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ

Xét panel trụ bằng vật liệu có cơ tính biến thiên gồm hai thành phần ceramic và kim loại như Hình 1. Hệ tọa độ (x, θ, z) được đặt tại mặt trung bình của panel. Panel có chiều dài L , bán kính cong của mặt trung bình R , góc mở φ và chiều dày h . Hàm đặc trưng cho các hằng số vật liệu FGM trong panel trụ được giả thiết biến thiên theo qui luật hàm mũ như sau:

$$P(z, T) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m; \quad (1)$$

trong đó: P_c, P_m lần lượt là hằng số vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ của mặt trên $(+h/2)$ và mặt dưới panel $(-h/2)$ có thể biểu diễn theo hàm nhiệt độ:

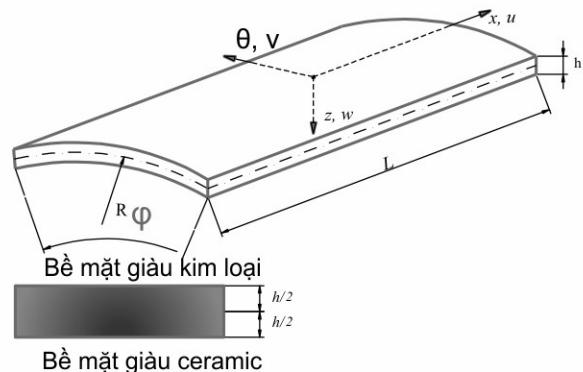
$$P = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (2)$$

với P_0, P_{-1}, P_1, P_2 và P_3 là các hệ số của nhiệt độ T (độ Kelvin). Trong bài báo này, tất các thuộc tính vật liệu được tính toán trong nhiệt độ phòng ($T = 300^\circ \text{K}$). p là tham số vật liệu (chỉ số tỉ lệ thể tích).

Mô đun đàn hồi E và hệ số giãn nở nhiệt α giả thiết là hàm phụ thuộc nhiệt độ, còn hệ số truyền nhiệt κ và khối lượng riêng ρ không phụ thuộc nhiệt độ, hệ số Poisson ν được giả thiết là hằng số và thể hiện dưới các biểu thức sau [21]:

$$\begin{aligned} E(z, T) &= E_m(T) + [E_c(T) - E_m(T)] \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p; \\ \kappa(z) &= \kappa_m + (\kappa_c - \kappa_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p; \\ \alpha(z, T) &= \alpha_m(T) + [\alpha_c(T) - \alpha_m(T)] \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p; \\ \rho(z) &= \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p. \end{aligned} \quad (3)$$

Với giả thiết biến thiên nhiệt độ chỉ theo phương chiều dày z của panel và trường nhiệt độ được xem là hằng số trong mặt phẳng $x\theta$ của panel. Trong trường hợp này, hàm phân bố nhiệt độ dọc theo chiều dày panel có thể nhận được thông qua việc giải phương trình trạng thái truyền nhiệt [22]:



Hình 1. Kích thước hình học của Panel trụ FGM

67% số vụ tai nạn và giảm 50% số người tử vong. Đối với GTĐT, nếu đầu tư 1 USD vào hệ thống đèn tín hiệu giao thông thông minh, lợi ích đạt được là 40 USD từ việc tiết kiệm thời gian và tiết kiệm tiêu hao nhiên liệu, cụ thể là giảm 25% thời gian chờ và giảm 22% lượng khí thải [2]. Sự cải thiện lưu lượng và giảm tắc nghẽn giao thông cũng có tác động tích cực về khí thải và tiêu thụ nhiên liệu [3]. Trong số liệu báo cáo của thành phố Los Angeles và California cho thấy lượng tiêu thụ nhiên liệu giảm 13% và lượng khí thải giảm 14%. Đối với thành phố Abilene, kết quả ứng dụng đã chỉ ra tác động tổng thể về phát thải giảm 6%, tiêu thụ nhiên liệu giảm 10% về HC, 13% về CO và 4% về nitơ oxit. Đối với thành phố Toronto, tiêu thụ nhiên liệu giảm 6%, phát thải khí carbon monoxide giảm 5% và lượng khí thải hydrocarbon giảm 4%.

2.2 Phân tích triển vọng ứng dụng GTTM vào Việt Nam

Ở Việt Nam, hệ thống GTTM đã được áp dụng cho một số tuyến đường cao tốc (ĐCT), như Hà Nội - Hải Phòng, Cầu Giẽ - Ninh Bình, TP. HCM - Trung Lương, TP. HCM - Long Thành - Dầu Giây, Đà Nẵng - Quảng Ngãi. Các nghiên cứu về GTTM hiện nay mới chỉ tập trung vào lĩnh vực ĐCT [5-7], và một số tiêu chuẩn áp dụng cho GTTM đối với ĐCT đã được ban hành [8-12].

Đối với GTĐT, nghiên cứu về ứng dụng hệ thống GTTM hiện nay vẫn còn mang tính đơn lẻ [13, 14, 15], chưa có các nghiên cứu và định hướng triển khai áp dụng một cách hiệu quả. Trong nghiên cứu này, để phân tích triển vọng của việc ứng dụng GTTM trong GTĐT ở Việt Nam, mô hình SWOT đã được sử dụng cho phân tích điểm mạnh (strength), điểm yếu (weakness), cơ hội (opportunities) và thách thức (threats) khi triển khai ứng dụng GTTM ở Việt Nam:

a) Điểm mạnh (strength, S):

- Chính phủ đang có các chính sách và chiến lược mạnh nhằm phát triển GTĐT, như tập trung đầu tư hệ thống GTCC, thực hiện các giải pháp ATGT và giám sát an ninh trật tự (ANTT) giao thông đô thị, quản lý đô thị văn minh hiện đại;

- Chính phủ đang có các chính sách phát triển và ứng dụng CNTT vào quản lý và vận hành GTĐT;

- Khu vực tư nhân về ngành công nghiệp điện tử và máy tính ở Việt Nam đang phát triển, có khả năng phát triển công nghệ và thiết bị GTTM và có thể cạnh tranh với các ngành công nghiệp phát triển ở các nước khác.

b) Điểm yếu (weakness, W):

- Thiếu kiến thức tổng thể về GTTM và hệ thống tiêu chuẩn hóa dịch vụ ứng dụng GTTM trong GTĐT;

- Thiếu một cơ quan có đủ chức năng để triển khai hệ thống GTTM và liên kết các lĩnh vực ứng dụng GTTM;

- Việc triển khai GTTM đã tập trung vào cấp độ dự án, dẫn đến thiếu sự tích hợp và không thể có sức mạnh tổng hợp của hệ thống kết hợp, có thể gây ra sự đầu tư trùng lặp;

- Hầu hết các công nghệ sử dụng được nhập khẩu từ các nước khác, đòi hỏi phải thích ứng với yêu cầu của địa phương, khó khăn trong công tác bảo trì, nâng cấp và tích hợp hệ thống;

- Thiếu các ngành công nghiệp cơ bản rất quan trọng trong việc triển khai GTTM (ví dụ như ngành công nghiệp ô tô, công nghệ thông tin, ...);

- Hạn chế khả năng và chuyên môn của GTTM và cần có một cách tiếp cận khác (so với các dự án GTĐT truyền thống) để thực hiện các dự án GTTM;

- Hạn chế nguồn nhân lực vận hành và nghiên cứu khoa học và phát triển công nghệ (R&D) về GTTM.

c) Cơ hội (opportunities, O):

- Nền kinh tế của đất nước đang phát triển, tập trung cho các ngành công nghiệp và CNTT;

- Chính phủ đang đầu tư vào hệ thống GTCC có sức chuyên chở lớn đòi hỏi cần có hệ thống GTTM trong việc khai thác và quản lý, như là xe buýt, buýt nhanh (BRT), đường sắt đô thị (MRT, LRT);

- Tiềm năng để nâng cao ATGT bằng cách sử dụng công nghệ giám sát và xử phạt tự động ("phạt nguội"), chẳng hạn như camera vượt đèn đỏ, camera tốc độ, camera sai sử dụng sai làn đường, camera giám sát ANTT giao thông đô thị;

- Các nhà nghiên cứu GTTM trong nước hiểu biết rõ về tình trạng và hạn chế của GTĐT để đưa ra các giải pháp thích hợp;

- Các tập đoàn tư nhân trong khu vực GTTM có thể hỗ trợ trong việc phát triển và thúc đẩy ngành công nghiệp GTTM trong nước;

- Chính phủ và các nhà nghiên cứu đã có nhận thức cao về tiềm năng ứng dụng GTTM.

$$-\frac{d}{dz} \left[\kappa(z) \frac{dT}{dz} \right] = 0. \quad (4)$$

Phương trình này được giải với các điều kiện biên: $T = T_c$ tại $z = h/2$ và $T = T_m$ tại $z = -h/2$. Nghiệm của phương trình này có thể biểu diễn dưới dạng đa thức [22]:

$$T(z) = T_m + (T_c - T_m) \eta(z); \quad (5)$$

với:

$$\eta(z) = \frac{1}{C} \left[\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\kappa_{cm}}{(p+1)\kappa_m} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{p+1} + \frac{\kappa_{cm}^2}{(2p+1)\kappa_m^2} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{2p+1} - \frac{\kappa_{cm}^3}{(3p+1)\kappa_m^3} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{3p+1} \right. \\ \left. + \frac{\kappa_{cm}^4}{(4p+1)\kappa_m^4} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{4p+1} - \frac{\kappa_{cm}^5}{(5p+1)\kappa_m^5} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{5p+1} \right];$$

$$C = 1 - \frac{\kappa_{cm}}{(p+1)\kappa_m} + \frac{\kappa_{cm}^2}{(2p+1)\kappa_m^2} - \frac{\kappa_{cm}^3}{(3p+1)\kappa_m^3} + \frac{\kappa_{cm}^4}{(4p+1)\kappa_m^4} - \frac{\kappa_{cm}^5}{(5p+1)\kappa_m^5}; \quad \kappa_{cm} = \kappa_c - \kappa_m.$$



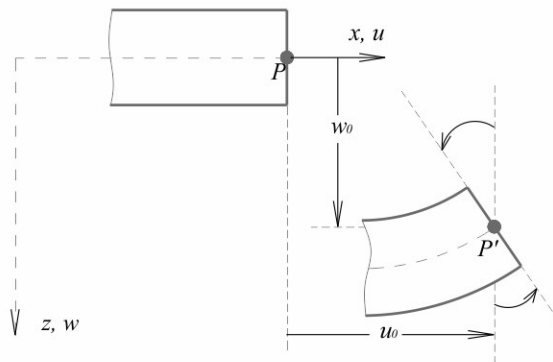
3. Các phương trình quan hệ

Trường chuyển vị theo lý thuyết FSDT của Reissner-Mindlin được giả thiết dưới dạng [4]:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, z) &= u_0(x, \theta) + z \phi_x(x, \theta) \\ v(x, \theta, z) &= v_0(x, \theta) + z \phi_\theta(x, \theta) \\ w(x, \theta, z) &= w_0(x, \theta) \end{aligned} \quad (6)$$

trong đó: u, v, w là chuyển vị của điểm bất kỳ có tọa độ (x, θ, z) trong panel trụ; u_0, v_0, w_0 là chuyển vị của điểm trên mặt trung bình của panel theo các phương x, θ, z ; ϕ_x, ϕ_θ lần lượt là góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh trục θ, x .

Trên Hình 2 biểu diễn sơ đồ biến dạng theo phương dọc trục của panel trụ theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Trong đó quy ước chiều dương của các biến dạng theo chiều các trục tọa độ như hình vẽ.



Hình 2. Sơ đồ biến dạng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT)

Trường biến dạng của điểm bất kỳ thuộc panel được xác định từ quan hệ chuyển vị - biến dạng [23]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right); \quad \varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial v_0}{R \partial \theta} + \frac{w_0}{R} \right) + z \left(\frac{\partial \phi_\theta}{R \partial \theta} \right); \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{R \partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x; \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{R \partial \theta} + \phi_\theta \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Đặt } \varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \quad \varepsilon_\theta^0 = \left(\frac{\partial v_0}{R \partial \theta} + \frac{w_0}{R} \right); \quad \gamma_{x\theta}^0 = \left(\frac{\partial u_0}{R \partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right); \quad \gamma_{xz}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x; \quad \gamma_{\theta z}^0 = \frac{\partial w_0}{R \partial \theta} + \phi_\theta$$

$$k_x = \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right); \quad k_\theta = \left(\frac{\partial \phi_\theta}{R \partial \theta} \right); \quad k_{x\theta} = \left(\frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \right) \quad (7.a)$$

Khi xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ, trường biến dạng được viết như sau:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{c,h} + \varepsilon_x^T; \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^{c,h} + \varepsilon_\theta^T; \quad (7.b)$$

trong đó: Chỉ số c,h có nghĩa biến dạng cơ học; Chỉ số T có nghĩa biến dạng do nhiệt độ gây nên.

Biến dạng do nhiệt độ gây nên được mô tả là hàm bậc nhất của độ chênh lệch nhiệt độ và của vật liệu FGM như sau:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^T \\ \varepsilon_\theta^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x(z,T) \\ \alpha_\theta(z,T) \end{bmatrix} \Delta T \quad (8)$$

trong đó: $\alpha(z,T)$ là hệ số biến dạng nhiệt, $\Delta T = T(z) - T_0$ là chênh lệch nhiệt độ so với nhiệt độ ban đầu T_0 (ở trạng thái không biến dạng).

Các thành phần ứng suất xác định từ quan hệ ứng suất - biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{x\theta} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha(z,T) \Delta T \quad (9)$$

$$\text{với } Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z,T)}{1-\nu^2}; \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{E(z,T) \cdot \nu}{1-\nu^2}; \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z,T)}{2(1+\nu)}.$$

Phương trình quan hệ nội lực - biến dạng được viết dưới dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 & B_{44} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{44} & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_\theta^T \\ N_{x\theta}^T \\ M_x^T \\ M_\theta^T \\ M_{x\theta}^T \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

trong đó, các hệ số độ cứng của panel trụ:

$$(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, z, z^2) dz \text{ với } ij=11, 12, 21, 22, 44; \quad A_{ij} = k \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz \text{ với } ij=55, 66; \quad (10.a)$$

k là hệ số hiệu chỉnh cắt (thường lấy $k = 5/6$).

Các thành phần ứng lực nhiệt được xác định bởi công thức sau:

$$\begin{bmatrix} N_x^T & M_x^T \\ N_\theta^T & M_\theta^T \\ N_{x\theta}^T & M_{x\theta}^T \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{11} + Q_{12} \\ Q_{21} + Q_{22} \\ 0 \end{bmatrix} \alpha(z,T) \Delta T \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{E(z,T) \alpha(z,T) \Delta T}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^T & M^T \end{bmatrix} \quad (10.b)$$



4. Lời giải giải tích

Xét panel trụ chịu uốn bởi lực phân bố q vuông góc với mặt trung bình. Dựa trên nguyên lý Hamilton, hệ phương trình cân bằng tĩnh của vỏ trụ được viết dưới dạng sau [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R \partial \theta} &= 0; \quad \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{R \partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{R \partial \theta} - \frac{N_\theta}{R} + q(x, \theta) &= 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{R \partial \theta} - Q_x = 0 \\ \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_\theta}{R \partial \theta} + Q_\theta &= 0; \end{aligned} \quad (11)$$

Biểu diễn các thành phần biến dạng qua chuyển vị từ công thức (7), thế các thành phần nội lực từ các phương trình quan hệ (10) vào hệ phương trình (11) ta thu được hệ phương trình cân bằng theo 5 ẩn số chuyển vị là $u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_\theta$ được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_x \\ \theta_\theta \\ w_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{11}^* & L_{12}^* & L_{13}^* & L_{14}^* & L_{15}^* \\ L_{21}^* & L_{22}^* & L_{23}^* & L_{24}^* & L_{25}^* \\ L_{31}^* & L_{32}^* & L_{33}^* & L_{34}^* & L_{35}^* \\ L_{41}^* & L_{42}^* & L_{43}^* & L_{44}^* & L_{45}^* \\ L_{51}^* & L_{52}^* & L_{53}^* & L_{54}^* & L_{55}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_\theta^T \\ N_{x\theta}^T \\ M_x^T \\ M_\theta^T \\ M_{x\theta}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

trong đó: L_{ij} và L_{ij}^* là các hệ số xác định bằng code chương trình MATLAB.

Với panel trụ chịu tải phân bố đều, tựa khớp trên chu vi, các điều kiện biên có dạng:

$$\begin{aligned} \text{Tại } x=0, x=L: w=0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ \text{Tại } \theta=0, \theta=\varphi: w=0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Giả thiết hàm tải trọng và các hàm chuyển vị, góc xoay được khai triển dưới dạng các chuỗi lượng giác kép thỏa mãn điều kiện biên (13) có dạng như sau:

$$\begin{aligned} u_0(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{0mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta \theta) \quad v_0(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{0mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta \theta); \\ w_0(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{0mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta \theta) \quad \theta_x(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{xmn} \cos(\alpha x) \sin(\beta \theta); \\ \theta_\theta(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{\theta mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta \theta) \quad p = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta \theta) \end{aligned} \quad (14)$$

trong đó: $\alpha = \frac{m\pi}{L}$; $\beta = \frac{n\pi}{\varphi}$; $q_{mn} = \frac{4}{\varphi L} \iint_0^\varphi q(x, \theta) \sin(\alpha x) \sin(\beta \theta) dx d\theta$; Chọn $q(x, \theta) = q_0 = \text{const}$

Thay các biểu thức tải trọng, chuyển vị từ (14) vào hệ phương trình cân bằng biểu diễn qua các thành phần chuyển vị (12) ta nhận được hệ phương trình với năm ẩn số $U_{0mn}, V_{0mn}, W_{0mn}, \theta_{xmn}, \theta_{\theta mn}$. Sau khi có được trường chuyển vị ta có thể tính được giá trị độ võng, độ võng không thứ nguyên (theo công thức $\bar{w} = w/h$) tại một điểm bất kì của panel trụ chịu tải trọng cơ học thông thường và khi có xét đến ảnh hưởng của các yếu tố nhiệt độ.

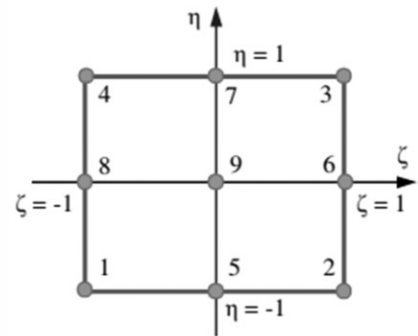
5. Mô hình phần tử hữu hạn

Mô hình phần tử hữu hạn (Hình 3) được xây dựng trong bài báo này sử dụng phần tử đẳng tham số chín nút, mỗi nút nằm bậc tự do để mô hình phần tử vỏ.

Chuyển vị tại điểm bất kỳ trong phần tử xác định bởi:

$$\delta = \sum_{i=1}^9 N_i \cdot \delta_i \quad (15)$$

với $\delta = \{u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_\theta\}^T$ và $\delta_i = \{u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \theta_{xi}, \theta_{\theta i}\}^T$ tương ứng là vec tơ chuyển vị nút thứ i của phần tử, N_i là hàm dạng tương ứng với nút thứ i .



Hình 3. Phần tử vỏ đẳng tham số chín nút

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta); \quad N_2 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta); \quad N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta); \quad N_4 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta); \quad N_8 = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (16)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta); \quad N_6 = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2); \quad N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

Như vậy vec tơ biến dạng có thể viết lại dưới dạng:

$$\{\epsilon_u\} = \sum_{i=1}^9 [B_u^e] \{\delta\}; \quad \{\gamma_c\} = \sum_{i=1}^9 [B_c^e] \{\delta\} \quad (17)$$

trong đó $[B_u^e]$ và $[B_c^e]$ là ma trận tính biến dạng màng uốn và ma trận tính biến dạng cắt được viết như sau:

$$[B_u^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad [B_c^e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Hệ phương trình cân bằng nhận được khi cực tiểu hóa thế năng toàn phần của phần tử có dạng:

$$[K_L^e]\{\delta\} = \{P_L^e\} + \{P_L^{eT}\} \quad (19)$$

trong đó ma trận độ cứng $[K_L^e]$ của phần tử được tính trong hệ tọa độ địa phương như sau:

$$[K_L^e] = \int_A [B^e]^T [D] [B^e] dA \quad (20)$$

vec tơ lực nút phần tử do tải trọng cơ học gây ra:

$$\{P_e\} = \int_A [N_i^e]^T \{\delta\} dA \quad (21)$$

vec tơ lực nút phần tử do tải trọng nhiệt độ gây ra:

$$\{P_L^{eT}\} = \int_A [B^e]^T \{NL^T\} dA \quad (22)$$

trong đó $\{NL^T\} = \{N_x^T \ N_\theta^T \ N_{x\theta}^T \ M_x^T \ M_\theta^T \ M_{x\theta}^T\}$ là nội lực do nhiệt độ sinh ra.

Thực hiện chuyển đổi từ hệ tọa độ địa phương sang hệ tọa độ tổng thể ta được:

$$[K_G^e] = [T][K_L^e][T] \quad (23)$$

$$\{P_G^e\} = [T]\{P_L^e\} \quad (24)$$

Với $[T]$ là ma trận chuyển đổi trục tọa độ

Bằng phép ghép nối các ma trận độ cứng phần tử thông thường, ta nhận được phương trình PTHH cho toàn panel trụ như sau:

$$[K]\{Q\} = \{P\}$$

với $[K]$, $[Q]$, $[P]$ lần lượt là ma trận độ cứng tổng thể, vec tơ chuyển vị nút tổng thể và vec tơ lực nút tổng thể.



6. Kết quả số

Sử dụng các công thức và thuật toán ở trên, thực hiện viết chương trình bằng Matlab và khảo sát số các bài toán cụ thể với vật liệu sử dụng có các thông số như như Bảng 1 và Bảng 2.

Bảng 1. Thuộc tính của các thành phần Ceramic và Kim loại trong vật liệu FGM (Al/ZrO₂)

Vật liệu	Các thuộc tính				
	E (N/m ²)	v	α (°C ⁻¹)	K (W/mK)	ρ (kg/m ³)
Aluminum (Al)	70,0 x 10 ⁹	0,30	23,0 x 10 ⁻⁶	204	2707
Zirconia (ZrO ₂)	151 x 10 ⁹	0,30	10,0 x 10 ⁻⁶	2,09	3000

Bảng 2. Các hệ số phụ thuộc nhiệt độ của Ceramic và Kim loại trong vật liệu FGM (Si₃N₄/SUS304)

Vật liệu	Hằng số	P ₀	P ₋₁	P ₁	P ₂	P ₃	P (T = 300 K)
Si ₃ N ₄	E (Pa)	348.43e+9	0.0	-3.070e-4	2.160e-7	-8.946e-11	322.2715e+9
	α (1/K)	5.8723e-6	0.0	9.095e-4	0.0	0.0	7.4746e-6
SUS304	E (Pa)	201.04e+9	0.0	3.079e-4	-6.534e-7	0.0	207.7877e+9
	α (1/K)	12.330e-6	0.0	8.086e-4	0.0	0.0	15.321e-6

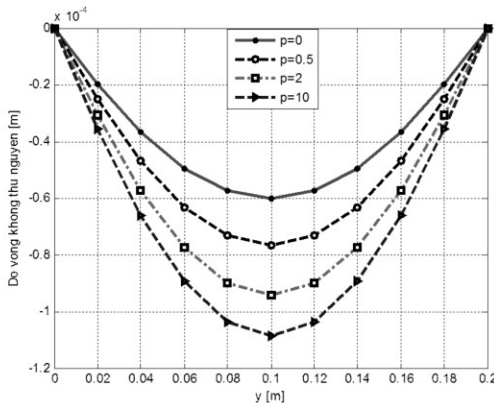
6.1 Phân tích uốn Panel trụ chịu tải trọng cơ học

Xét panel trụ FGM gồm hai thành phần vật liệu cấu thành Al/ZrO₂ (Bảng 1) chịu tải trọng cơ học phân bố đều vuông góc với mặt trung bình $q_0 = 10^6 \text{ N/m}^2$, với các thông số hình học $\varphi = 0,2 \text{ rad}$, $R = 1 \text{ m}$, $L = 0,2 \text{ m}$. Giá trị độ võng không thứ nguyên lớn nhất tại tâm panel trụ ($\bar{w} = w_{\max}/h$) được tính toán thông qua lời giải giải tích và lời giải số đã được thiết lập bằng ngôn ngữ Matlab với cả hai trường hợp bốn biên tựa khớp (SSSS) và bốn biên ngàm (CCCC) được thể hiện trên Bảng 3.

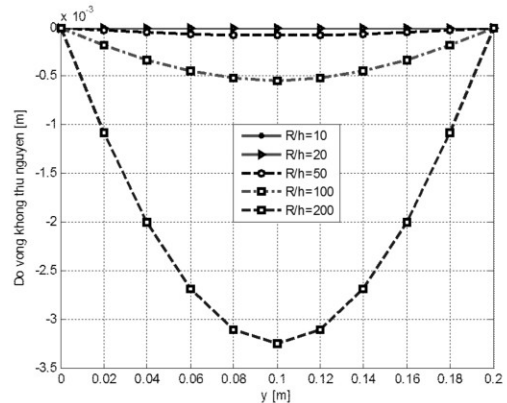
Bảng 3. Độ võng không thứ nguyên của Panel trụ $\bar{w}$ khi chịu tải trọng cơ học

Tỉ số R/h	Mô hình	SSSS			CCCC		
		$p = 0,5$	$p = 1,0$	$p = 2,0$	$p = 0,5$	$p = 1,0$	$p = 2,0$
50	[17]	0,003824	0,004279	0,004683	0,001309	0,001465	0,001611
	Giải tích	0,003837	0,004296	0,004702	-	-	-
	PTHH	0,003842	0,004301	0,004708	0,001344	0,001504	0,001653
	Sai lệch (%)	0,35	0,39	0,41	2,61	2,61	2,57
100	[17]	0,05425	0,06072	0,06658	0,01711	0,01915	0,02102
	Giải tích	0,05441	0,06091	0,06679	-	-	-
	PTHH	0,05444	0,06094	0,06682	0,01760	0,01970	0,02163
	Sai lệch (%)	0,30	0,31	0,31	2,79	2,79	2,80
200	[17]	0,6503	0,7283	0,8057	0,2026	0,2269	0,2509
	Giải tích	0,6501	0,7281	0,8056	-	-	-
	PTHH	0,6522	0,7305	0,8082	0,2074	0,2323	0,2570
	Sai lệch (%)	0,04	0,03	0,01	2,31	2,31	2,37

Kết quả khảo sát số này đã được so sánh với kết quả thu được từ phương pháp phần tử tự do kp - Ritz của Zhao và cs. [17]. Từ Bảng 3 ta thấy, giá trị độ võng không thứ nguyên được tính toán bằng các phương pháp khác nhau nhưng có sự tương đồng lớn, sai lệch lớn nhất của lời giải giải tích chỉ là 0,41 (%), trong khi sai lệch lớn nhất của kết quả thu được bằng phương pháp PTHH là 2,80 (%). Từ đó cho thấy sự tin cậy của lời giải giải tích cũng như lời giải số mà tác giả đã thiết lập.



Hình 4. Đồ thị độ võng panel trụ khi p thay đổi



Hình 5. Đồ thị độ võng panel trụ khi tỉ số R/h thay đổi

6.2 Ảnh hưởng của chỉ số tỉ lệ thể tích, tỉ số bán kính/chiều dày đến độ võng panel trụ FGM

Xét panel trụ FGM gồm hai thành phần vật liệu cấu thành SUS304/Si₃N₄ có các hệ số phụ thuộc vào nhiệt độ như trong Bảng 2 chịu đồng thời tải trọng phân bố đều vuông góc với mặt trung bình $q_0 = 10^6 \text{ N/m}^2$ và trong điều kiện tải trọng nhiệt độ mặt trên $T_c = 200^\circ \text{ K}$, nhiệt độ mặt dưới $T_m = 20^\circ \text{ K}$. Các thuộc tính của vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ và đạt giá trị hằng số tại nhiệt độ 300° K . Các thông số hình học $\varphi = 0,2 \text{ rad}$, $R = 1 \text{ m}$, $L = 0,2 \text{ m}$, tỉ số bán kính/chiều dày panel (R/h) thay đổi, chỉ số tỉ lệ thể tích (p) thay đổi. Giá trị độ võng không thứ nguyên lớn nhất tại tâm panel trụ ($\bar{w} = w_{\max}/h$) được tính toán thông qua lời giải giải tích và lời giải số đã được thiết lập bằng ngôn ngữ Matlab với trường hợp bốn biên tựa khớp (SSSS) được thể hiện trên Bảng 4.

Bảng 4. Độ võng không thứ nguyên của Panel trụ khi có ảnh hưởng của nhiệt độ

Tỉ số R/h	Mô hình	Chỉ số tỉ lệ thể tích p					
		$p = 0$	$p = 0,5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$
50	Giải tích	0,0015	0,0017	0,0018	0,0018	0,0019	0,0020
	PTHH	0,0015	0,0017	0,0018	0,0019	0,0019	0,0020
	Sai lệch (%)	0,00	0,00	0,00	5,26	0,00	0,00
100	Giải tích	0,0207	0,0238	0,0252	0,0263	0,0274	0,0283
	PTHH	0,0207	0,0238	0,0252	0,0263	0,0274	0,0283
	Sai lệch (%)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
200	Giải tích	0,2497	0,2855	0,3026	0,3178	0,3334	0,3440
	PTHH	0,2504	0,2864	0,3035	0,3188	0,3344	0,3450
	Sai lệch (%)	0,28	0,31	0,30	0,31	0,30	0,29

Từ Bảng 4 ta thấy kết quả độ võng không thứ nguyên của Panel trụ có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ được tính toán thông qua lời giải giải tích và lời giải số đều có giá trị tương đồng khi khảo sát với các giá trị chỉ số tỉ lệ thể tích p khác nhau và khảo sát tỉ số bán kính/chiều dày panel trụ (R/h) thay đổi. Từ đó cho thấy sự tin cậy của các mô hình và lời giải đã thiết lập.

Để biểu diễn quan hệ giữa độ võng của panel trụ với tham số vật liệu (chỉ số tỷ lệ thể tích) p , tác giả tiến hành khảo sát ảnh hưởng của độ võng khi các trường hợp p thay đổi. Xét panel trụ FGM Al/ZrO₂ (Bảng 1) bốn biên tựa khớp (SSSS) chịu tải trọng cơ học phân bố đều vuông góc với mặt trung bình $q_0 = 10^6$ N/m², với các thông số hình học $\varphi = 0,2$ rad, $R = 1$ m, $L = 0,2$ m, $R/h = 50$. Giá trị độ võng không thứ nguyên lớn nhất tại tâm panel trụ ($\bar{w} = w_{max}/h$) được tính toán thông qua lời giải giải tích được thể hiện trên Hình 4. Từ Hình 4 ta thấy khi p càng tăng thì độ võng không thứ nguyên tại tâm panel trụ càng tăng theo. Điều này được giải thích do khi p tăng lên thì hàm lượng kim loại trong vật liệu FGM tăng, trong khi hàm lượng ceramic lại giảm xuống dẫn đến độ cứng của panel trụ giảm, hệ quả là độ võng sẽ tăng lên.

Cũng dựa trên kết quả giải tích, Hình 5 biểu diễn quan hệ giữa độ võng với tỉ số bán kính/chiều dày (R/h) của panel trụ. Xét panel trụ FGM có các thông số vật liệu và hình học giống như các giá trị đã sử dụng khảo sát trên Hình 4 và $p = 0,5$, R/h thay đổi. Từ Hình 5 ta thấy, khi tỉ số $R/h = 10, 20$ thì giá trị độ võng rất nhỏ nhưng khi tỉ số R/h tăng lên thì độ võng không thứ nguyên tại tâm panel lại càng tăng. Sự thay đổi này là do khi R/h càng lớn thì panel càng trở nên mỏng hơn, dẫn đến độ võng tại tâm panel lớn.

6.3 Ảnh hưởng của nhiệt độ đến độ võng của panel trụ FGM

Trong phần khảo sát này, xét panel trụ FGM gồm hai thành phần vật liệu cấu thành SUS304/Si₃N₄ có các hệ số phụ thuộc vào nhiệt độ (Bảng 2) chịu đồng thời tải trọng phân bố đều vuông góc với mặt trung bình $q_0 = 10^6$ N/m² và trong điều kiện tải trọng nhiệt độ mặt trên (T_c) và mặt dưới (T_m) có những giá trị khác nhau. Các thuộc tính của vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ và đặt giá trị hằng số tại nhiệt độ 300° K. Các thông số hình học $\varphi = 0,2$ rad, $R = 1$ m, $L = 0,2$ m, tỉ số bán kính/chiều dày panel $R/h = 20$, lấy chỉ số tỷ lệ thể tích $p = 0,5$. Giá trị độ võng không thứ nguyên lớn nhất tại tâm panel trụ ($\bar{w} = w_{max}/h$) được tính toán thông qua lời giải giải tích và lời giải số đã được thiết lập bằng ngôn ngữ matlab với trường hợp bốn biên tựa khớp (SSSS) được thể hiện trên Bảng 5.

Bảng 5. Độ võng không thứ nguyên của Panel với các giá trị nhiệt độ mặt trên, mặt dưới khác nhau

Trường hợp	Nhiệt độ (°K)	Mô hình		
		Giải tích	PTHH	Sai lệch (%)
1	$T_c = 0, T_m = 300$	0,0544	0,0545	0,18
2	$T_c = 300, T_m = 300$	0,0562	0,0563	0,18
3	$T_c = 400, T_m = 300$	0,0568	0,0569	0,18
4	$T_c = 600, T_m = 300$	0,0579	0,0580	0,17

Từ Bảng 5, xét với panel trụ có cơ tính biến thiên chịu đồng thời cả tải trọng cơ học và nhiệt độ tác dụng, trường hợp nhiệt độ tác dụng lên mặt dưới panel không thay đổi ($T_m = 300^\circ$ K) và cho nhiệt độ tác dụng lên mặt trên với các giá trị từ 0° K đến 600° K ($T_c = 0, T_c = 300, T_c = 400, T_c = 600$), ta thấy giá trị độ võng không thứ nguyên tại tâm panel tăng lên. Kết quả khảo sát số bằng hai mô hình đã xây dựng cho thấy sự tương đồng cao giữa lời giải giải tích và lời giải số, với sai lệch không đáng kể (0,18 %).



7. Kết luận

Trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) và phương pháp phần tử hữu hạn với phần tử đẳng tham số chín nút, mỗi nút năm bậc tự do để mô hình phần tử vỏ, bài báo đã xây dựng nghiệm giải tích và nghiệm số để phân tích uốn panel trụ bằng vật liệu có cơ tính biến thiên. Panel trụ được khảo sát với các trường hợp liên kết khớp (SSSS) và liên kết ngàm (CCCC) trên chu tuyến, chịu tải trọng cơ học và có xét đến sự ảnh hưởng của yếu tố nhiệt độ.

Với code chương trình viết bằng Matlab bài báo đã khảo sát sự ảnh hưởng của tham số vật liệu FGM (chỉ số tỷ lệ thể tích p), các tham số hình học, các trường hợp nhiệt độ tác dụng lên mặt trên và mặt dưới của panel trụ khác nhau tới độ võng của panel trụ. Qua tham chiếu kết quả tính theo nghiệm giải tích, nghiệm số với các kết quả đã được công bố với mô hình và lời giải khác, có thể kết luận rằng các lời giải mà bài báo đã xây dựng có độ tin cậy. Các kết quả số có thể là nguồn tham khảo hữu ích cho các nghiên cứu trong cùng lĩnh vực.

Tài liệu tham khảo

1. Kraus H. (1967), *Thin elastic shells*, John Wiley & Sons.
2. Gould PL. (1984), *Finite element analysis of shells of revolution*, Pitman Publishing.
3. Gould PL. (1999), *Analysis of plates and shells*, Prentice-Hall.
4. Reddy, J. N. (2004), *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*: CRC press.
5. Toorani MH, Lakis AA. (2000), "General equations of anisotropic plates and shells including transverse shear deformations, rotary inertia and initial curvature effects", *Journal of Sound and Vibration*, 237(4):561-615
6. Khdeir AA, Reddy JN, Frederick D. (1989), "A study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories", *International Journal of Engineering Science*, 27(1):1337-51.
7. Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. (1959), *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill.
8. Nowacki. W. (1962), *Thermo-Elasticity*, Addison-Wesley, Reading, MA.
9. Stavsky, Y., & Smolash, I. (1970), "Thermoelasticity of heterogeneous orthotropic cylindrical shells", *International Journal of Solids and Structures*, 6(8): 1211-1231.
10. Padovan, J. (1976), "Thermoelasticity of cylindrically anisotropic generally laminated cylinders", *ASME J. Appl. Mech*, 43: 124-130.
11. Ovan, J. P., & Lestingi, J. (1980), "Thermoelasticity of anisotropic cylindrical shells", *Journal of thermal stresses*, 3(2): 261-276.
12. Zenkour, A., & Fares, M. (2000), "Thermal bending analysis of composite laminated cylindrical shells using a refined first-order theory", *Journal of thermal stresses*, 23(5): 505-526.
13. Zhang, X. (2001), "Vibration analysis of cross-ply laminated composite cylindrical shells using the wave propagation approach", *Applied Acoustics*, 62(11): 1221-1228.
14. Shu. C, Du. H. (1997), "Free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells by DQM", *Composites Part B: Engineering*, 28(3): 267-74.
15. Haftchenari. H., Darvizeh. M., Darvizeh. A, Ansari. R. & Sharma. C.B. (2007), "Dynamic analysis of composite cylindrical shells using differential quadrature method (DQM)", *Composite Structures*, 78(2):292-8
16. Lee, S. Y., & Yen, W. J. (1989), "Hygrothermal effects on the stability of a cylindrical composite shell panel", *Computers & structures*, 33(2): 551-559.
17. Zhao, X., Lee, Y., & Liew, K. M. (2009), "Thermoelastic and vibration analysis of functionally graded cylindrical shells", *International Journal of Mechanical Sciences*, 51(9): 694-707.
18. Zhao, X., & Liew, K. M. (2010), "A mesh-free method for analysis of the thermal and mechanical buckling of functionally graded cylindrical shell panels", *Computational Mechanics*, 45(4): 297-310.
19. Sheng, G., & Wang, X. (2008), "Thermal vibration, buckling and dynamic stability of functionally graded cylindrical shells embedded in an elastic medium", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 27(2): 117-134.
20. Touloukian, Y. S., & Center, T. P. R. (1967), *Thermophysical properties of high temperature solid materials*, Vol. 1, *Elements.-Pt. 1*: Macmillan.
21. Huang, X.-L., & Shen, H.-S. (2004), "Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments", *International Journal of Solids and Structures*, 41(9): 2403-2427.
22. Javaheri, R., & Eslami, M. (2002), "Thermal buckling of functionally graded plates", *AIAA journal*, 40(1): 162-169.
23. Amabili, M. (2008), *Nonlinear vibration and stability of shell and plates*: Cambridge University Press.