MỘT CÁCH TÌM NGHIỆM GIẢI TÍCH BÀI TOÁN DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI CÓ ĐIỀU KIỆN PHỨC TẠP

Phạm Hoàng Anh[1]

Tóm tắt: *Bài báo giới thiệu một cách tiếp cận mới để tìm nghiệm giải tích của bài toán phân tích kết cấu áp dụng cho dầm trên nền đàn hồi. Phương pháp được thực hiện bằng cách chia kết cấu dầm thành các đoạn dầm và biểu diễn các tải trọng dưới dạng hàm dị thường (singularity functions), kết hợp với các phần mềm tính toán số học hiện đại như Mathematica, Maple… để giải các phương trình vi phân cho từng đoạn dầm. Với phương pháp đề xuất, việc giải bài toán dầm trên nền đàn hồi có tải trọng, độ cứng, điều kiện nền đa dạng có thể được thực hiện khá đơn giản.*

Từ khóa: *Nghiệm giải tích; hàm dị thường; dầm trên nền đàn hồi.*

Summary: *This paper proposes a new approach to obtain the analytical solution of the problem of a beam on elastic foundation. The method is performed by dividing the beam into beam segments and presenting the loading as sum of singularity functions, combining with the resources of modern computational algebra programs such as Mathematica, Maple… for the solutions of ordinary differential equations of the beam segments. By the proposed method, the analysis of beams on elastic foundation with various loads and structural discontinuities such as jumps in beam or foundation stiffness becomes quite simple.*

Keywords: *Analytical solution; singularity functions; beam on elastic foundation*

Nhận ngày 01/10/2013, chỉnh sửa ngày 20/10/2013, chấp nhận đăng 28/2/2014

1. Giới thiệu

Trong phân tích trạng thái ứng suất-biến dạng, các kết cấu được thay thế bằng các mô hình toán dưới dạng phương trình vi phân. Việc giải các phương trình này có thể được thực hiện bằng các phương pháp giải tích hoặc phương pháp số. Các phương pháp giải tích thường áp dụng trên các mô hình toán liên tục và khó có thể thực hiện khi kết cấu có hình dạng, tải trọng, điều kiện biên phức tạp, gián đoạn. Trong trường hợp kết cấu tiếp xúc với môi trường đàn hồi (ví dụ như dầm, bản trên nền đàn hồi) thì việc tìm nghiệm giải tích càng trở nên khó khăn do nghiệm của bài toán là các hàm số siêu việt. Các phương pháp số như sai phân hữu hạn (FDM), phương pháp phần tử hữu hạn (FEM), phương pháp lưới tự do (MFM)… khắc phục được nhược điểm của các phương pháp giải tích thông qua việc giải trên mô hình toán rời rạc. Bằng cách đó, nghiệm của bài toán phức tạp được xấp xỉ bởi tập hợp nhiều nghiệm trên các miền nhỏ.

Mặc dù vậy, do nghiệm giải tích được xem là "hình ảnh chính xác" của ứng xử của kết cấu nên đóng vài trò quan trọng trong những trường hợp như: nghiên cứu ảnh hưởng của các đặc trưng kết cấu đến ứng xử của hệ, làm cơ sở lựa chọn các tham số cũng như đánh giá mức độ chính xác và tin cậy của các phương pháp số, phương pháp gần đúng, phương pháp xác suất, phương pháp phi xác suất. Vì vậy, việc tìm nghiệm giải tích của ứng xử của kết cấu vẫn có ý nghĩa trong công tác học tập nghiên cứu.

Bài báo này đề cập đến việc tìm lời giải chính xác (nghiệm giải tích) cho một bài toán phân tích kết cấu trong thực tế thường gặp là dầm trên nền đàn hồi. Mô hình dầm trên nền đàn hồi được áp dụng rộng rãi để phân tích các kết cấu công trình xây dựng, giao thông, thủy lợi…, ví dụ như móng băng trên nền đất hoặc nền cọc, cầu phao, đường ray trên tà vẹt, cọc đơn chịu tải trọng ngang, tường cừ gia cố thành vách hố đào.

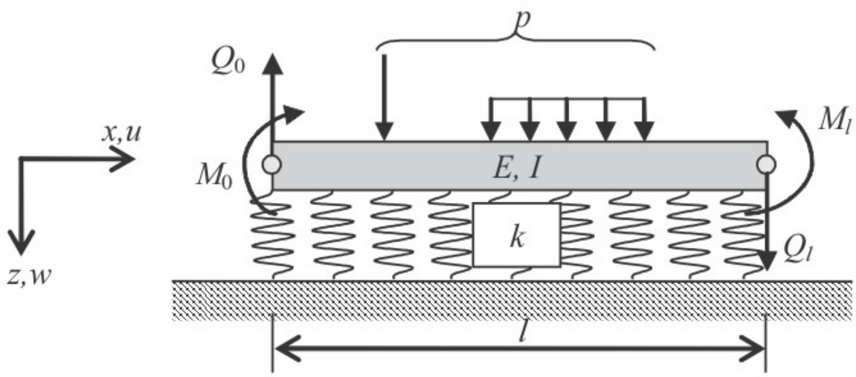
[1]*TS, Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp. Trường Đại học Xây dựng. E-mail: anhpham.nuce@gmail.com*

Bài toán xác định nội lực trong dầm là một dạng bài toán siêu tĩnh đặc biệt, trong đó phản lực nền là một hệ lực phân bố liên tục trên chiều dài của dầm và phụ thuộc vào biến dạng của dầm cũng như mô hình nền [1]. Các phương pháp giải tích để xác định biến dạng, nội lực trong dầm có thể kể đến như phương pháp thông số ban đầu [2], phương pháp cộng tác dụng [3], [4], phương pháp biến đổi Laplace [5], thường đòi hỏi khối lượng lớn các tính toán toán học phức tạp, nhất là khi tải trọng, độ cứng, điều kiện nền thay đổi dọc chiều dài dầm.

Ở đây, bài báo đề xuất một cách tiếp cận khác để giải bài toán dầm chịu uốn trên nền đàn hồi Winkler [6] dựa trên ý tưởng rời rạc hóa kết cấu của phương pháp FEM và sức mạnh của các phần mềm tính toán số học hiện đại. Ưu điểm của phương pháp này là cho phép tìm nghiệm giải tích một cách đơn giản và nhanh chóng ngay cả khi tải trọng, độ cứng của dầm và nền là không liên tục. Hiệu quả của phương pháp được minh họa thông qua hai ví dụ số.

2. Phương trình vi phân độ võng của dầm chịu uốn trên nền Winkler

Xét cân bằng một đoạn dầm có chiều dài l tách ra từ kết cấu dầm trên nền Winkler. Chiều dương của tải trọng, độ võng và nội lực được quy ước như trên hình 1. Ta có:



***Hình 1 .** Đoạn dầm trên nền đàn hồi Winkler*

- Phản lực của nền:

$$r = kbw \tag{1}$$

- Biến dạng dọc trục trong dầm:

$$\varepsilon_x = -z\frac{d^2w}{dx^2} \tag{2}$$

- Ứng suất trong dầm:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -Ez\frac{d^2w}{dx^2} \tag{3}$$

trong đó w là độ võng của dầm, k là hệ số đàn hồi của nền, b là bề rộng dầm tiếp xúc với nền, E là mô đun đàn hồi của đoạn dầm.

- Thế năng biến dạng của dầm:

$$U_b = \frac{1}{2}\int_V \sigma_x.\varepsilon_x\,dV = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx \tag{4}$$

- Thế năng biến dạng của nền:

$$U_f = \frac{1}{2}\int_0^l kb\,w^2\,dx \tag{5}$$

- Tổng thế năng biến dạng của hệ dầm-nền là:

$$U = U_b + U_f = \frac{1}{2}\int_0^l \left[EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 + kbw^2\right]dx \tag{6}$$

- Công của ngoại lực tác dụng:

$$W = Q_l w|_{x=l} - M_l \frac{dw}{dx}\bigg|_{x=l} - Q_0 w|_{x=0} + M_0 \frac{dw}{dx}\bigg|_{x=0} + \int_0^l pw\,dx \quad (7)$$

trong đó I là mô men quán tính của tiết diện dầm, p là tải trọng tác dụng trên dầm, M_0, Q_0, M_l, Q_l tương ứng là mômen uốn và lực cắt tại đầu trái và đầu phải dầm.

Phiếm hàm thế năng toàn phần do đó được viết như sau:

$$A = U - W = \frac{1}{2}\int_0^l \left[EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 + kb\,w^2\right]dx - Q_l w|_{x=l} + M_l \frac{dw}{dx}\bigg|_{x=l} + Q_0 w|_{x=0} - M_0 \frac{dw}{dx}\bigg|_{x=0} - \int_0^l pw\,dx \quad (8)$$

Thực hiện biến phân đối với (8) thu được:

$$\delta A = \int_0^l EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)\delta\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)dx + \int_0^l kbw\,\delta w\,dx - Q_l\delta w|_{x=l} + M_l\,\delta\left(\frac{dw}{dx}\right)\bigg|_{x=l} + Q_0\delta w|_{x=0} - M_0\,\delta\left(\frac{dw}{dx}\right)\bigg|_{x=0} - \int_0^l p\,\delta w\,dx \quad (9)$$

Tích phân từng phần và biến đổi (9) thu được:

$$\delta A = \int_0^l \left(EI\frac{d^4w}{dx^4} + kbw - p\right)dx + \left[EI\frac{d^2w}{dx^2}\delta\left(\frac{dw}{dx}\right) - EI\frac{d^3w}{dx^3}\delta w\right]_0^l - Q_l\delta w|_{x=l} + M_l\,\delta\left(\frac{dw}{dx}\right)\bigg|_{x=l} + Q_0\delta w|_{x=0} - M_0\,\delta\left(\frac{dw}{dx}\right)\bigg|_{x=0} \quad (10)$$

Điều kiện cân bằng (điều kiện dừng) của hệ là δA = 0 với mọi δw ≠ 0, hay:

$$\begin{cases} EI\dfrac{d^4w}{dx^4} + kbw - p = 0 \\ -EI\dfrac{d^2w}{dx^2}\bigg|_{x=0} = M_0;\ -EI\dfrac{d^3w}{dx^3}\bigg|_{x=0} = Q_0;\ -EI\dfrac{d^2w}{dx^2}\bigg|_{x=l} = M_l\,;\ -EI\dfrac{d^3w}{dx^3}\bigg|_{x=l} = Q_l \end{cases} \quad (11)$$

Biểu thức đầu tiên trong (11) chính là phương trình vi phân độ võng của đoạn dầm đang xét. Các biểu thức còn lại biểu diễn điều kiện biên tại hai đầu đoạn dầm. Nghiệm của (11) là hàm số w(x) có chứa các tham số M_0, Q_0, M_l, Q_l là các giá trị nội lực tại hai đầu đoạn dầm

Như vậy, nếu chia một kết cấu dầm trên nền đàn hồi thành *n* đoạn dầm, ta sẽ thu được *n* phương trình vi phân cho *n* đoạn dầm. Các phương pháp giải tích [2], [3], [4] để tìm nghiệm cho (11) thường dẫn đến tính toán phức tạp khi tải trọng tác dụng trên đoạn dầm là không liên tục. Ở các phần tiếp theo, tác giả trình bày một cách tiếp cận đơn giản hơn để tìm nghiệm giải tích cho phương trình vi phân có điều kiện biên (11).

3. Thay thế tải trọng bằng hàm dị thường

Có thể giảm khối lượng tính toán khi giải phương trình vi phân (11) bằng cách biểu diễn tải trọng dưới dạng tổng đại số của các hàm dị thường. Bằng cách này, tải trọng sẽ trở thành một hàm số và có thể thực hiện các phép tích phân hay vi phân như các hàm số liên tục thông thường. Ý tưởng này do Clebsch [7] đưa ra và sau đó được phát triển bởi Macaulay [8]. Betten [5] và Dinev [9] áp dụng các hàm dị thường vào giải bài toán dầm trên nền đàn hồi có độ cứng và hệ số nền không gián đoạn.

Các hàm dị thường để biểu diễn tải trọng bao gồm:

- Hàm Dirac delta, δ(.)

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad x \neq a \\ 1 & \text{khi} \quad x = a \end{cases} \quad (12)$$

-Hàm Heaviside, H(.)

$$H(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad x < a \\ 1 & \text{khi} \quad x \geq a \end{cases} \quad (13)$$

Một lực tập trung P sẽ được viết dưới dạng: (14)

$P\delta(x - a)$

trong đó a là khoảng cách từ đầu trái dầm đến vị trí đặt lực.

Một lực phân bố p trên dầm trong khoảng $0 < c \le x \le d < l$ sẽ được viết dưới dạng:

$$p = pH(x - c) - pH(x - d) \quad (15)$$

4. Ứng dụng phần mềm tính toán số học

Các phần mềm như Mathematica, Maple là các hệ chương trình tính toán số học hiện đại cho phép thực hiện các phép tính phức tạp với các hàm không liên tục và hàm dị thường. Ở đây, tác giả đề xuất phương pháp tìm nghiệm giải tích cho bài toán dầm trên nền đàn hồi bằng cách chuyển đổi các tải trọng sang dạng hàm dị thường và kết hợp với phần mềm toán học Mathematica để giải n phương trình vi phân (11). Trình tự thực hiện như sau:

- Chia dầm thành một số đoạn dầm (n đoạn);

- Chuyển các tải trọng (không liên tục) trên mỗi đoạn dầm sang dạng hàm dị thường;

- Thực hiện giải từng phương trình vi phân có điều kiện biên trong (11), thu được các hàm chuyển vị w(x), i = 1...n cho n đoạn dầm;

- Đưa các điều kiện về chuyển vị và biến dạng (điều kiện biên và điều kiện liên tục) và giải hệ phương trình tuyến tính để tìm giá trị nội lực tại đầu các đoạn dầm.

- Tính mômen uốn và lực cắt trong từng đoạn dầm theo:

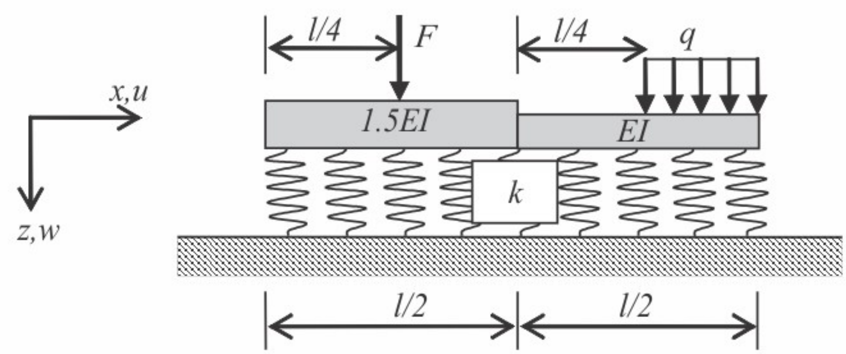
$$M_i(x) = -EI_i\frac{d^2w_i}{dx^2};\ Q_i(x) = \frac{dM_i}{dx},\ i = 1..n \quad (16)$$

5. Các ví dụ minh họa

Các ví dụ trình bày dưới đây cho thấy hiệu quả của phương pháp đề xuất. Các tính toán để tìm nghiệm giải tích được thực hiện sử dụng phần mềm Mathematica.

5.1 Dầm có độ cứng thay đổi và tải trọng gián đoạn

Xét dầm trên hình 2 với hệ số đàn hồi của nền k = 4803.14kN/m^3. Dầm có chiều dài l = 20m, bề rộng b = 0.5m, độ cứng EI = 1125000kN/m^2. Tải trọng tập trung F = 500kN, tải trọng phân bố q = 50kN/m.



Hình 2 . *Dầm có độ cứng thay đổi và tải trọng gián đoạn*

Chia dầm thành 2 đoạn dài *l/2* = 10m. Ký hiệu *M* và *Q* lần lượt là mô men uốn và lực cắt tại tiết diện giữa dầm.

Tải trọng tập trung trên đoạn dầm trái được biểu diễn theo hàm *Dirac delta* như sau:

$$p(x) = F\delta(x - 5) \quad (17)$$

Tải trọng phân bố *q* trên đoạn dầm phải được biểu diễn theo hàm *Heaviside* như sau:

$$p(x) = qH(x - 5) \quad (18)$$

Phương trình vi phân có điều kiện biên cho đoạn trái và đoạn phải viết theo (11) lần lượt là:

$$\begin{cases} 1.5EI\dfrac{d^4w_1}{dx^4}+kbw_1=F\delta(x-5) \\ -1.5EI\dfrac{d^2w_1}{dx^2}(0)=0 \\ -1.5EI\dfrac{d^3w_1}{dx^3}(0)=0 \\ -1.5EI\dfrac{d^2w_1}{dx^2}(l/2)=M \\ -1.5EI\dfrac{d^3w_1}{dx^3}(l/2)=Q \end{cases};\quad \begin{cases} EI\dfrac{d^4w_2}{dx^4}+kbw_2=qH(x-5) \\ -EI\dfrac{d^2w_2}{dx^2}(0)=M \\ -EI\dfrac{d^3w_2}{dx^3}(0)=Q \\ -EI\dfrac{d^2w_2}{dx^2}(l/2)=0 \\ -EI\dfrac{d^3w_2}{dx^3}(l/2)=0 \end{cases} \tag{19}$$

Điều kiện liên tục tại tiết diện giữa dầm là:

$$w_1(l/2)=w_2(0);\quad \frac{dw_1}{dx}(l/2)=\frac{dw_2}{dx}(0) \tag{20}$$

Giải các phương trình trên với các dòng lệnh *Mathematica* đơn giản như sau:

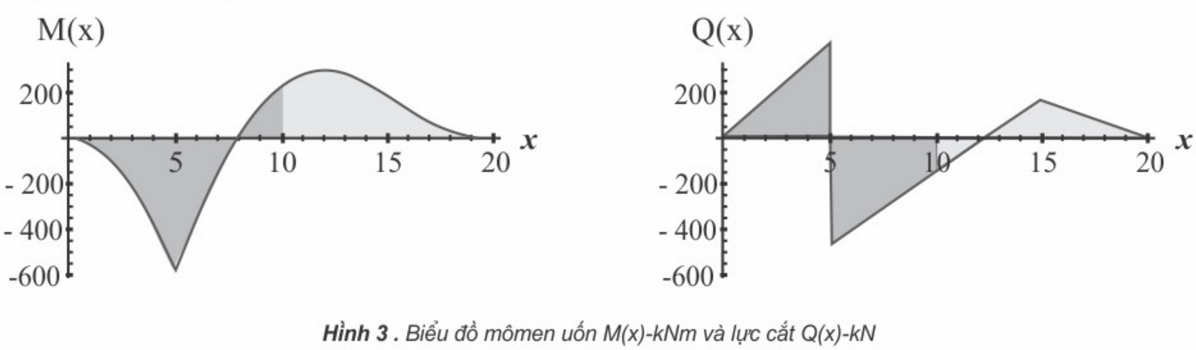
```
w1=w[x]/.DSolve[{1687500*w''''[x]+2401.57*w[x]==500*DiracDelta[x-5],
    -1687500*w''[0]==0,-1687500*w'''[0]==0,
    -1687500*w''[10]==M,-1687500*w'''[10]==Q},w[x],x][[1]];
w2=w[x]/.DSolve[{1125000*w''''[x]+ 2401.57*w[x]==50*HeavisideTheta[x-5],
    -1125000*w''[0]==M,-1125000*w'''[0]==Q,
    -1125000*w''[10]==0,-1125000*w'''[10]==0},w[x],x][[1]];


Sol=Solve[{(w1/.{x->10})==(w2/.{x->0}),
(D[w1,x]/.{x->10})==( D[w2,x]/.{x->0})},{M,Q}][[1]];
w1=w1/.Sol; w2=w2/.Sol;
```

Nội lực trong các đoạn dầm được xác định theo (16) bằng các lệnh sau:

```
M1=-1687500*D[D[w1,x],x]; Q1=D[M1,x];
M2=-1125000*D[D[w2,x],x]; Q2=D[M2,x];
```

Kết quả thu được *w1, w2, M1, M2, Q1, Q2* là các hàm số của chuyển vị, mô men uốn và lực cắt theo tọa độ x trong các đoạn dầm. Từ đó có thể xác định giá trị của chuyển vị/nội lực tại một tiết diện bất kỳ trên dầm hay biểu diễn dưới dạng đồ thị như hình 3.



***Hình 3 .** Biểu đồ mômen uốn M(x)-kNm và lực cắt Q(x)-kN*

5.2 Cọc đơn chịu tải trọng ngang

Bài toán phân tích kết cấu cọc chịu tải trọng ngang có thể xem xét giống như dầm trên nền đàn hồi. Điểm khác biệt là chỉ có tải trọng tập trung tác dụng trên đầu cọc và hệ số đàn hồi của nền biến đổi theo chiều sâu.

Ví dụ sau minh họa cách tính một kết cấu cọc bằng phương pháp đề xuất. Cọc có độ cứng EI = 101600kNm^2, tiết diện HP 360x174 với bề rộng 378mm chịu một lực tập trung theo phương ngang tại đầu cọc là F = 50.78kN. Chiều dài cọc là l = 10m, trong đó có 3m bên trên nằm trong tầng đất yếu, 7m tiếp theo xuyên vào nền đất tốt, đầu cọc ngàm vào đài cọc. Giả thiết hệ số đàn hồi của 3m đất bên trên là k=200kN/m^3, của 7m đất bên dưới là k=1000kN/m^3

Phương trình cân bằng của 3m cọc bên trên như sau:

$$EI\frac{d^4w_1}{dx^4}+200bw_1=0 \tag{21}$$

Phương trình cân bằng của 7m cọc xuyên trong nền đất tốt là:

$$EI\frac{d^4w_2}{dx^4}+1000bw_2=0 \tag{22}$$

Điều kiện biên tại đầu cọc và mũi cọc tương ứng là:

$$\frac{dw_1}{dx}(0)=0;\quad -EI\frac{d^3w_1}{dx^3}(0)=-F \tag{23}$$

và

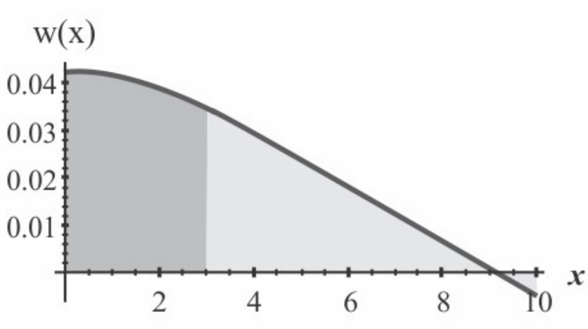
$$-EI\frac{d^2w_2}{dx^2}(7)=0;\quad -EI\frac{d^3w_2}{dx^3}(7)=0 \tag{24}$$

Các dòng lệnh Mathematica để giải hệ như sau:

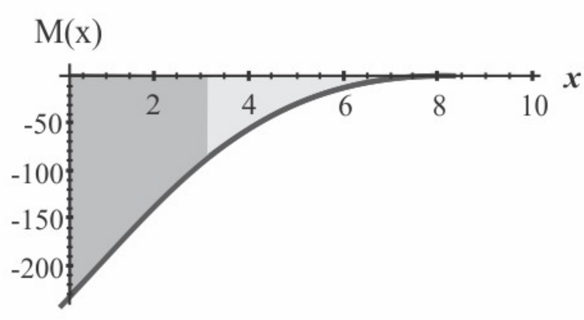
```
w1=w[x]/.DSolve[{101600*w''''[x]+75.6*w[x]==0,
-101600*w''[0]==M0,-101600*w'''[0]==-50.78,
-101600*w''[3]==M,-101600*w'''[3]==Q},w[x],x][[1]];
w2=w[x]/.DSolve[{101600*w''''[x]+378.0*w[x]==0,
-101600*w''[0]==M,-101600*w'''[0]==Q,
-101600*w''[7]==0,-101600*w'''[7]==0},w[x],x][[1]];

Sol=Solve[{(D[w1,x]/.{x->0.0})==0,
(w1/.{x->3})==(w2/.{x->0}),
(D[w1,x]/.{x->3})==(D[w2,x]/.{x->0})},{M0,M,Q}][[1]];
w1=w1/.Sol; w2=w2/.Sol;
M1=-101600.*D[D[w1,x],x];
M2=-101600.*D[D[w2,x],x];
```

Hình 4 và hình 5 lần lượt mô tả chuyển vị và mô men uốn trong cọc.



***Hình 4 .** Chuyển vị của cọc, m*



***Hình 5 .** Mômen uốn trong cọc, kNm*

6. Kết luận

Thông qua các ví dụ cho thấy phương pháp đề xuất cho phép xác định nghiệm giải tích của kết cấu dầm trên nền đàn hồi với khả năng:

- Tính dầm có nhiều tải trọng tác dụng;
- Áp dụng được điều kiện biên tại đầu dầm;
- Áp dụng cho trường hợp dầm, nền có độ cứng không liên tục;
- Có thể dùng để phân tích các dầm có các gối tựa/khớp dọc chiều dài dầm;
- Việc tính toán được thực hiện đơn giản với các phần mềm số học hiện đại.

Với những ưu điểm trên, phương pháp này có thể là công cụ hữu ích trong công tác nghiên cứu. Kết quả chính xác của nghiệm giải tích là căn cứ so sánh như trường hợp riêng của kết quả nghiên cứu theo các phương pháp khác (phương pháp số, phương pháp gần đúng, phương pháp xác suất hoặc phi xác xuất…).

Tài liệu tham khảo

1. Hồng L. N., Thạch L.N. (2011), *Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản Khoa học & Kỹ thuật, Hà Nội.

2. Krilov, A. N. (1931), *On analysis of beams resting on elastic foundation,* Science Academy of USSR, Leningrad.

3. Hetenyi, M. (1946), *Beams on elastic foundation,* University of Michigan Press.

4. Yavari A., Sarkani S. and Reddy J.N. (2001), “Generalized solution of beams with jump discontinuities on elastic foundations”, *Archive of Applied Mechanics,* Vol. 71, 625-639.

5. Betten, J. (2008), “Beam on elastic foundation”, *Mathematical Models in Materials Science and Continuum Mechanics.*

6. Winkler, E. (1867), *Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit,* Dominicus, Prague.

7. Clebsch, A. (1862), *Theorie der Elasticitat Fester Korper,* B.B. Teubner.

8. Macaulay, W.H. (1919), “A note on the deflection of beams”, *Messenger Mathematics*, Vol. XLVIII.

9. Dinev, D. (2012), “Analytical solution of beam on elastic foundation by singular functions”, *Engineering MECHANICS,* Vol. 19 (6), 381–392.