MẤT ỔN ĐỊNH TỪ BIẾN DẠNG UỐN PHẲNG CỦA VÒM

Tô Văn Tấn[1], Lê Hải Đăng[2], Phạm Đức Trung[2]

Tóm tắt: *Khi các vòm thành mỏng làm từ vật liệu đàn nhớt chịu lực trong mặt phẳng của chúng thì tìm thời gian vòm bị mất ổn định dạng uốn phẳng là điều cần thiết. Trong bài báo này sử dụng lý thuyết về các điểm phân nhánh giả, tiêu chuẩn ổn định từ biến PB2 [8] và phương pháp "tương tự đàn hồi" để giải bài toán về ổn định dạng uốn phẳng của vòm từ vật liệu đàn nhớt. Đã tìm được thời gian tới hạn và giới hạn ổn định lâu dài của vòm.*

Từ khóa: *Vật liệu đàn nhớt; điểm phân nhánh giả; ổn định từ biến.*

Summary: *When viscoelastic thin-walled arches are subjected to forces in their planes, it is necessary to find a moment corresponding to lost stability. In this paper, using the theory on pseudo-bifurcation point, criterion of creep stability PB2 and method "elastic analogy", the problem on torsional - flexural creep buckling of viscoelastic arches has been solved. The expressions of critical time and limit of longtime stability are obtained.*

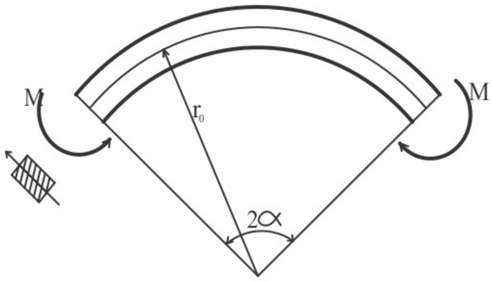
Key words: *viscoelastic material; pseudo-bifurcation; creep stability.*

Nhận ngày 16/6/2013, chỉnh sửa ngày 01/8/2013, chấp nhận đăng 30/9/2013

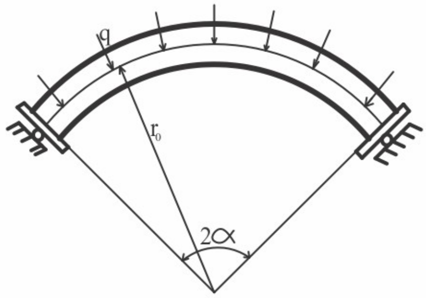
1.Mở đầu

Bài toán ổn định đàn hồi dạng uốn phẳng của vòm đã được trình bày [1]. Bài toán ổn định từ biến dạng uốn phẳng của dầm đã được nghiên cứu [6,11]. Trong [5,7,9] đã giải bài toán ổn định từ biến (dạng nén) của vòm. Bài toán ổn định từ biến dạng uốn phẳng của vòm đã được nghiên cứu [10], trong đó sử dụng tiêu chuẩn ổn định từ biến của Rabotnov - Shescherricov. Tiêu chuẩn này trùng với phân nhánh giả bậc 0 (PB0), nhưng PB2 mới gần kết quả thực nghiệm hơn PB0 [8]. Trong bài báo này, tác giả sử dụng phương pháp *"tương tự đàn hồi"* và tiêu chuẩn ổn định từ biến PB2 đã nêu [2,3,8] để giải bài toán đặt ra và trả lời câu hỏi khi nào thì vòm từ vật liệu đàn nhớt chịu uốn phẳng bị mất ổn định và với những tải trọng nào thì vòm đó không bị mất ổn định theo thời gian.

Xét hai trường hợp: Vòm chịu mômen uốn ở hai đầu (h1) và vòm hai đầu khớp chịu tải phân bố đều hướng tâm (h2).



Hình 1



Hình 2

[1]PGS.TS, Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp. Trường Đại học Xây dựng. E-mail: liengallery@gmail.com
[2]SV, Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp. Trường Đại học Xây dựng

2. Phương pháp giải

Với vật liệu đàn nhớt, sử dụng lý thuyết di truyền tuyến tính cho biến dạng dài và biến dạng trượt [3,4]:

$$\varepsilon = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t K(t,\tau)\sigma(\tau)\,d\tau$$
$$\gamma(t) = \frac{\tilde{\tau}(t)}{G} + 2(1+\nu)\int_0^t K(t,\tau)\tilde{\tau}(\tau)\,d\tau \qquad (1)$$

trong đó $K(t,\tau)$ là nhân từ biến với $K(t,\tau) = \dfrac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau}$, $C(t,\tau)$ là độ đo từ biến và $\tilde{\tau}(t)$ là ứng suất tiếp.

Sử dụng tiêu chuẩn ổn định từ biến [2,8] là xem hệ mất ổn định khi xảy ra phân nhánh giả bậc 2 (PB2). Phân nhánh giả bậc 2 là trường hợp phân nhánh quá trình biến dạng khi:

$$\Delta\ddot{e} \neq 0,\ \Delta\ddot{\sigma} \neq 0 \ \text{ còn } \ \Delta\overset{(r)}{e} = 0,\ \Delta\overset{(r)}{\sigma} = 0 \ \text{ với } r \neq 2 \qquad (2)$$

trong đó $\Delta\ddot{e} = \ddot{e} - \ddot{e}^{(0)}$, $\Delta\ddot{\sigma} = \ddot{\sigma} - \ddot{\sigma}^{(0)}$, với $\ddot{e}^{(0)}, \ddot{\sigma}^{(0)}$ ở quá trình cơ bản và $\ddot{e}, \ddot{\sigma}$ ở quá trình lân cận.

Viết (1) dưới dạng " kích động"Δ, sử dụng định nghĩa (2), sau khi biến đổi ta thu được:

$$\Delta\ddot{\sigma} = \tilde{E}_2(t)\Delta\ddot{e} \qquad (3)$$

trong đó: $$\tilde{E}_2(t) = E\left[1 + \frac{E}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 \ddot{K}(t,\tau)\,d\tau\right]^{-1} \qquad (4)$$

Tương tự với biến dạng trượt ta có:

$$\Delta\tau = \tilde{G}_2(t)\Delta\ddot{\gamma} \qquad (5)$$

trong đó: $$\tilde{G}_2(t) = G\left[1 + \frac{E}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 \ddot{K}(t,\tau)\,d\tau\right]^{-1} \qquad (6)$$

Đẳng thức (3),(5) có dạng giống định luật Húc nhưng mô đun đàn hồi giả tạo $\tilde{E}_2(t)$, $\tilde{G}_2(t)$ chứa thời gian t. Như vậy có thể thay mô đun đàn hồi E, G trong công thức lực tới hạn của bài toán ổn định đàn hồi bằng $\tilde{E}_2(t)$, $\tilde{G}_2(t)$ để đưa việc giải bài toán ổn định từ biến về giải bài toán ổn định đàn hồi với môdun đàn hồi $\tilde{E}_2(t)$, $\tilde{G}_2(t)$. Sau đó tìm thời gian tới hạn và giới hạn ổn định dài hạn. Đây được gọi là phương pháp "*tương tự đàn hồi*" [8].

3. Xét trường hợp 1

Vòm đàn nhớt thành mỏng chịu mô men uốn M ở hai đầu (h.1). Ở trạng thái tới hạn của ổn định đàn hồi, mô men tới hạn được tính theo công thức [1]:

$$M_{th} = \frac{EI_y + GI_p}{2r_0} + \sqrt{\frac{(EI_y - GI_p)^2}{4r_0^2} + \frac{\pi^2}{4\alpha^2}\frac{EI_y GI_p}{r_0^2}} \qquad (7)$$

trong đó I_y, I_p là mô men quán tính đối với trục y và mô men quán tính xoắn của tiết diện; 2α là góc chắn cung tròn và r_0 là bán kính trục vòm.

Sử dụng phương pháp "tương tự đàn hồi" và kí hiệu M là mô men tác dụng thực tế, ta có:

$$M = \frac{\tilde{E}_2(t)I_y + \tilde{G}_2(t)I_p}{2r_0} + \sqrt{\frac{(\tilde{E}_2(t)I_y - \tilde{G}_2(t)I_p)^2}{4r_0^2} + \frac{\pi^2}{4\alpha^2}\frac{\tilde{E}_2(t)I_y\tilde{G}_2(t)I_p}{r_0^2}} \qquad (8)$$

Đặt $S = \dfrac{M(t)}{M_{th}}$, thay (4), (6) vào (8) và sử dụng (7), ta thu được:

$$S=\left[1+\frac{E}{2}\int_0^t(t-\tau)^2\ddot{K}(t,\tau)d\tau\right]^{-1} \tag{9}$$

Chọn nhân từ biến dạng:

$$K(t,\tau)=-\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\varphi_{(\tau)}\left(1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right)\right] \tag{10}$$

trong đó: $\varphi_{(\tau)}=C_0+A_0e^{-\beta\tau}$; C_0, A_0, β, γ là các hằng số của vật liệu.

Thay vào ta thu được quan hệ giữa tải trọng, đại lượng không thứ nguyên S và thời gian tới hạn (theo PB2) :

$$S=\left\{1+EC_0\left[1-e^{-\gamma t}\left(1+\gamma t+\frac{\gamma^2t^2}{2}\right)\right]+\frac{EA_0\gamma^2}{(\gamma-\beta)^2}\left[e^{-\beta t}-e^{-\gamma t}\left(1+(\gamma-\beta)t+\frac{(\gamma-\beta)^2t^2}{2}\right)\right]\right\}^{-1} \tag{11}$$

Cho $t\to\infty$, từ (11) ta tìm được giới hạn ổn định dài hạn:

$$S_{dh}=\frac{1}{1+EC_0} \tag{12}$$

Hay $$M_{dh}=\frac{M_{th}}{1+EC_0} \tag{13}$$

Khi $M=M_{th}$ vòm mất ổn định tức thời (mất ổn định đàn hồi); Khi $M_{dh}\le M\le M_{th}$ vòm mất ổn định sau thời gian nào đó; Khi $M<M_{dh}$ thì vòm luôn ổn định với mọi "t".

Nếu chọn nhân từ biến dạng:

$$K(t,\tau)=\frac{A}{(t-\tau)^{\alpha}}\quad ;0<\alpha<1\,,A>0$$

Bằng cách tương tự như (10) ta có:

$$S=\frac{M}{M_{th}}=\left[1+\frac{EA\alpha(1+\alpha)}{2(\alpha-1)}t^{1-\alpha}\right]^{-1}$$

Từ đây có thể rút ra biểu thức tính thời gian theo S:

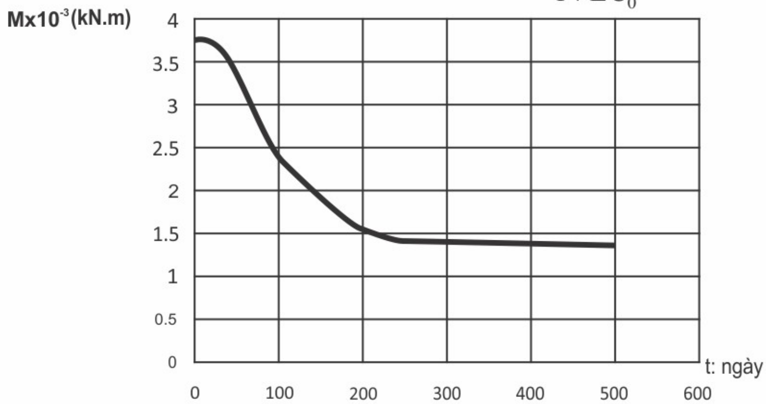
$$t=\left[\frac{2(1-\alpha)\left(\frac{1}{S}-1\right)}{EA\alpha(\alpha+1)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{14}$$

Ví dụ áp dụng: Tìm thời gian tới hạn và giới hạn ổn định dài hạn của vòm chịu uốn ở hai đầu với kích thước tiết diện chữ nhật 0,2x1,0m, r_0 = 10m, 2α= 2,4 rad, vật liệu có E= 2.10^4 Mpa, μ= 0,18, γ= 0,026 $(\text{ngày})^{-1}$, β= 0,03 $(\text{ngày})^{-1}$, A0= $0,482.10^{-3}$ ngày/Mpa, C_0= $0,09.10^{-3}$ 1/Mpa. Ta tính được: G= $8,5.10^3$, mô men quán tính Iy = $7,8.10^{-4}$ m^4, mô men quán tính xoắn Ip= 23.10^{-4} m^4. Theo (7) mô men tới hạn M_{th}= $3,8.10^3$ kN.m.

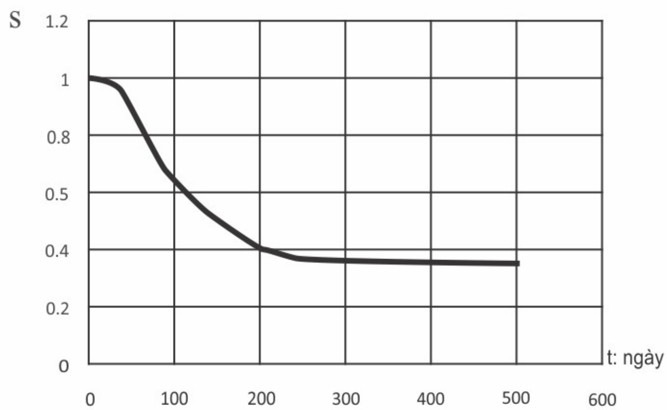
Bảng 1. *Quan hệ mô men tác dung - thời gian tới hạn*

t, ngày	M x10^{-3} (kN.m)	S
0	3.8	1
30	3.7	0.973
50	3.41	0.896
100	2.42	0.635
200	1.56	0.409
300	1.39	0.366
500	1.36	0.357

Dựa theo bảng tính 1 ta có liên hệ $S=\dfrac{M}{M_{th}}$ với t, cho phép vẽ các đồ thị M~t (có thứ nguyên)và S~t (s- không thứ nguyên).Khi t$\rightarrow\infty$ ta có giới hạn ổn định dài hạn $S_{dh}=\dfrac{1}{1+EC_0}=0.357$



Hình 3. *Quan hệ mô men (có thứ nguyên) và thời gian tới hạn*



Hình 4. *Quan hệ mô men (không thứ nguyên) và thời gian tới hạn*

4. Xét trường hợp 2

Vòm thành mỏng hai đầu liên kết khớp từ vật liệu đàn nhớt, chịu tải phân bố đều q hướng tâm (h.2). Ở trạng thái tới hạn của ổn định đàn hồi, tải trọng tới hạn được tính theo [1]:

$$q_{th}=\frac{(\pi^2-4\alpha^2)^2}{4\alpha^2\left(\pi^2+4\alpha^2\lambda\right)}\frac{EIy}{r_0^3} \tag{15}$$

trong đó $\lambda=\dfrac{EIy}{GIp}$. Tương tự trường hợp 1, với tải trọng xác định nào đó, ta có:

$$q_{th}=\frac{(\pi^2-4\alpha^2)^2}{4\alpha^2\left(\pi^2+4\alpha^2\lambda\right)}\frac{\tilde{E}_2Iy}{r_0^3}\quad \text{trong đó}\quad \lambda=\frac{\tilde{E}_2Iy}{\tilde{G}_2Ip}$$

Chọn nhân từ biến như (10), theo cách tương tự ta có:

$$S=\left\{1+EC_0\left[1-e^{-\gamma t}\left(1+\gamma t+\frac{\gamma^2t^2}{2}\right)\right]+\frac{EA_0\gamma^2}{(\gamma-\beta)^2}\left[e^{-\beta t}-e^{-\gamma t}\left(1+(\gamma-\beta)t+\frac{(\gamma-\beta)^2t^2}{2}\right)\right]\right\}^{-1}$$

trong đó $S=\dfrac{q}{q_{th}}$. Cho t$\rightarrow\infty$ ta tìm được giới hạn ổn định dài hạn:

$$S_{dh}=\frac{1}{1+EC_0} \tag{16}$$

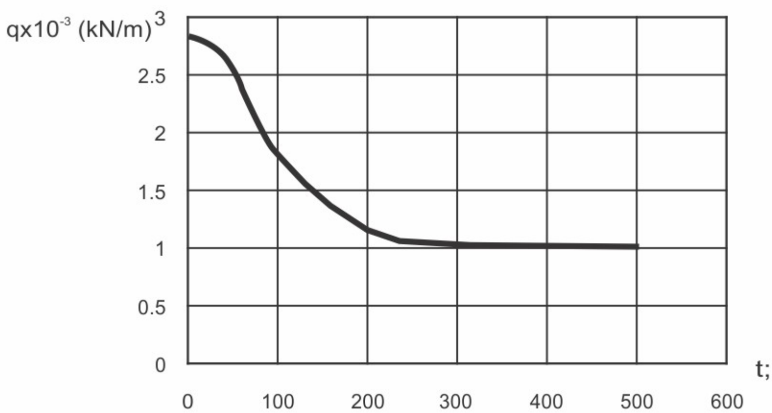
Hay $q_{dh} = \dfrac{q_{th}}{1+EC_0}$ (17)

Ví dụ áp dụng: Xác định thời gian tới hạn và giới hạn ổn định dài hạn của vòm tròn hai đầu khớp chịu q phân bố đều với vật liệu và tiết diện như trong trường hợp 1. Theo (15) và (17) ta tính được tải trọng tới hạn là q_{th}= 2,84 kN/m và giới hạn ổn định dài hạn là S_{dh}= 0,357 ; q_{dh}= 1,02 kN/m.

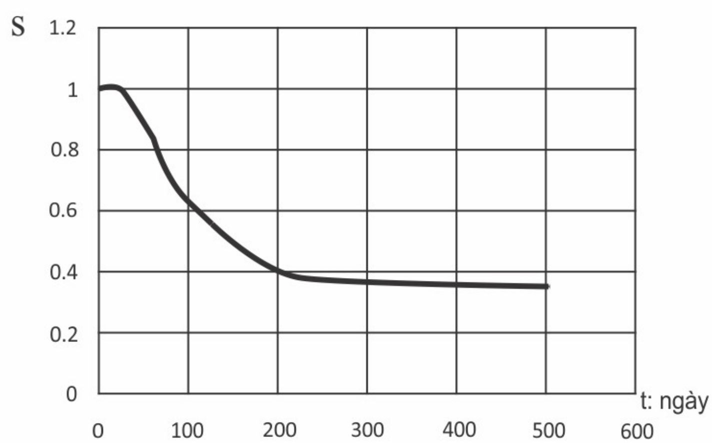
Bảng 2. *Quan hệ tải trọng phân bố - thời gian tới hạn*

t, ngày	$qx10^{-3}$ (kN.m)	S_2
0	2.84	1
30	2.74	0.973
50	2.55	0.896
100	1.81	0.635
200	1.16	0.409
300	1.04	0.366
500	1.02	0.357

Kết quả của các liên hệ q~t, S~t cho trên hình vẽ dưới đây:



Hình 5. *Quan hệ tải trọng phân bố (có thứ nguyên) - thời gian tới hạn*



Hình 6. *Quan hệ tải trọng phân bố (không thứ nguyên) - thời gian tới hạn*

5. Kết luận

- Sử dụng tiêu chuẩn ổn định từ biến PB2 và phương pháp *"tương tự đàn hồi"* đã giải bài toán ổn định từ biến dạng uốn phẳng của vòm. Tìm được thời gian tới hạn và giới hạn ổn định dài hạn. Với phương pháp này có thể giải được bài toán ổn định từ biến của vòm có liên kết tựa và chịu tải khác nhau.

- Với cùng một loại vật liệu, sử dụng cùng nhân từ biến thì dạng đồ thị *S~t* giống nhau, giới hạn ổn định dài hạn S_{dh} như nhau, nhưng đồ thị *M~t* hoặc *q~t* khác nhau (do M_{th}, q_{th} khác nhau với các vòm khác nhau, chịu tải khác nhau).

- Khi tải trọng nhỏ hơn S_{dh} thì vòm không mất ổn định theo thời gian (điều này sẽ không đúng với vật liệu kim loại, vì kim loại là vật liệu có tính từ biến không hạn chế). Khi tải trọng tăng lên thì thời gian tới hạn giảm. Khi tải trọng bằng lực tới hạn Ơle thì vòm mất ổn định tức thì (t=0).

- Với hai bài toán cụ thể nêu trên, ta có giới hạn ổn định dài hạn S_{dh}= 0.357 (tương ứng với M_{dh}= $1{,}36.10^3$ kNm ở trường hợp 1, q_{dh}= 1.02 kN/m ở trường hợp 2). Có nghĩa là với tải trọng nhỏ hơn giới hạn đó thì vòm đang xét ổn định lâu dài, còn với tải trọng lớn hơn giới hạn đó thì ta xác định được thời gian vòm sẽ mất ổn đinh.

Tài liệu tham khảo

1. A.F.Xmirnov (1984), *Dynamic and stability of structures*, Building publishers Moscow (in Russian)

2. Tô Văn Tấn (1987), "Ổn định của thanh từ vật liệu có tính già và di truyền", *Tạp chí cơ học Việt Nam*, T.IX, Tr.22-25

3. Tô Văn Tấn, Phạm Quốc Doanh (1999), "Sự ổn định của các thanh đàn nhớt già không đồng nhất", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ,* T.XXXVII, Tr.25-31.

4. Pham Quoc Doanh, To Van Tan (1998), "Stability of viscoelastic plate in shear", *Vietnam Journal of Mechanics,* T.XX,No 46-54

5. Đỗ Trí Công (2012), *Ổn định từ biến của vòm*, Luận văn thạc sĩ kỹ thuật, Đại học Xây Dựng.

6. To Van Tan (1985), *Plane form buckling of bending thinwalled bar in longtime load,* DEP in VINITI AN Soviet union, VII, No 47-85. (in Russian)

7. P.C.Sanzarovxki (1984), *Creep buckling of building structures*, Leningrad university (in Russian)

8. Cliusnhicov V.D, To Van Tan (1986), *Creep stability: variant of theory and experiment*, Transactions of AN, MTT (in Russian)

9. Wang.T, Bradford.M, Ian Gilbert.R (2006), *Creep buckling of shallow parabolic concrete arches.* J.struct.Eng (in Russian)

10. A.Wroblewski, M.Zyczkowski (1989), *On multimodal optimization of circular arches against plan and spatial creep buckling*, Structural optimization, I, No 227-234, Springer.

11. V.M.Kobrinhex (1973), *Investigate creep influence on the plane form bending stability of thinwalled bars of open section*, PhD thesis, Odexa, Soviet union (in Russian).