



ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG NHỎ NHẤT ĐỂ XÁC ĐỊNH TỶ LỆ PHỐI HỢP CÁC NHÓM CỐT LIỆU TRONG BÊ TÔNG NHỰA

Vũ Ngọc Trụ¹

Tóm tắt: Khi thiết kế cấp phối bê tông nhựa, cần phối trộn các nhóm cốt liệu có thành phần hạt khác nhau như đá dăm, cát, bột đá theo tỷ lệ nhất định để đảm bảo thành phần hạt nằm trong giới hạn quy định của tiêu chuẩn và đường cong cấp phối đều đặn. Nội dung bài báo đề cập đến ứng dụng phương pháp bình phương bé nhất trong toán học để xác định tỷ lệ tham gia của từng nhóm vật liệu nhằm đưa ra cấp phối hạt cho bê tông nhựa thiết kế tiệm cận tốt nhất với đường cong cấp phối mong muốn.

Từ khóa: phương pháp bình phương bé nhất; bê tông nhựa; thiết kế cấp phối

Summary: In designing asphalt concrete mix, it is necessary to mix different aggregates, namely: coarse aggregate, sand, mineral aggregate in a designated proportion so that material quantities are in within allowable limit as specified in technical specification. The article mentions the application of least square method to determine the unit weight of each ingredient to recommend the design asphalt concrete composition so that the gradation curve can be most fit to the desired curve.

Keyword: Least square method, asphalt concrete, aggregate mix proportion

Nhận ngày 10/1/2013, chỉnh sửa ngày 20/1/2013, chấp nhận đăng 30/6/2013



1. Đặt vấn đề

Các loại cốt liệu: đá dăm, cát, bột khoáng được sản xuất và lưu trữ theo những cách khác nhau để tiện cho các mục đích sử dụng. Trong công tác thiết kế hỗn hợp bê tông nhựa, công việc đầu tiên là phải xác định tỷ lệ phối trộn tương ứng cho từng loại cốt liệu này để chọn ra một hỗn hợp cốt liệu có thành phần hạt nằm trong giới hạn đường bao cấp phối cốt liệu theo quy định [2].

Đối với bất kỳ một hỗn hợp cốt liệu nào thì lượng lọt sàng $P_i(\%)$ sau khi phối trộn tại cỡ sàng i bất kỳ luôn tuân theo quan hệ sau:

$$P_i = A_i a_1 + B_i a_2 + C_i a_3 + D_i a_4 + \dots \quad (1)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots = 1 \quad (2)$$

trong đó:

- $A_i, B_i, C_i, D_i, \dots$ là lượng lọt qua sàng (%) tại cỡ sàng i bất kỳ của từng loại cốt liệu sử dụng để phối trộn;
- $a_1, a_2, a_3, \dots$ là tỷ lệ phối trộn của từng loại cốt liệu.

Dựa vào công thức (1) và (2) và trên cơ sở đã biết cấp phối của từng loại cốt liệu (lượng lọt sàng qua các cỡ sàng i bất kỳ $A_i, B_i, C_i, D_i, \dots$), tiến hành tính toán tỷ lệ phối trộn hợp lý của từng loại cốt liệu ($a_1, a_2, a_3, \dots$) để hỗn hợp đạt được có các thành phần hạt bám sát đường cong cấp phối mong muốn (cấp phối có độ rỗng tối thiểu sau khi đầm nén).

Việc xác định tỷ lệ phối trộn $a_1, a_2, a_3, \dots$ cho từng loại cốt liệu được thực hiện theo nhiều cách khác nhau như phương pháp đồ giải, hoặc xác định bằng tính năng "Solver" trong Microsoft Excel như giới thiệu trong tiêu chuẩn thiết kế cấp phối bê tông nhựa TCVN 8820:2011 [3].

¹ TS, Khoa Xây dựng Cầu đường. Trường Đại học Xây dựng. E-mail: vutru1975@gmail.com

Nhằm làm phong phú thêm các phương pháp thiết kế cấp phối, trong bài báo này sẽ giới thiệu phương pháp xác định tỷ lệ phối trộn các nhóm cốt liệu trong bê tông nhựa sử dụng một công cụ quen thuộc của toán học, đó là phương pháp bình phương nhỏ nhất: Khi biết thành phần cấp phối của từng loại cốt liệu định sử dụng trong bê tông nhựa, và biết đường cong cấp phối mong muốn, phương pháp này sẽ đưa ra tỷ lệ phối trộn của từng hỗn hợp để sai lệch giữa đường cong cấp phối mong muốn và thực nghiệm là nhỏ nhất.

2. Nội dung phương pháp thiết kế cấp phối

Giả thiết chúng ta có m loại cốt liệu cần phối hợp với nhau để tạo ra cấp phối thiết kế có thành phần hạt nằm trong giới hạn quy định và gần nhất với cấp phối mong muốn. Như vậy, đường cong cấp phối mong muốn phải được ấn định trước.

Các nhóm cốt liệu và cấp phối được phân loại theo các cỡ sàng phù hợp với tiêu chuẩn thiết kế bê tông nhựa. Tại cỡ sàng D_j , lượng lọt sàng của cốt liệu thứ i là P_{ij} , của cấp phối mong muốn là P_j , còn của cấp phối đạt được sau phối trộn là P_{kj} như mô tả trong bảng 1 và trên hình 2. Chúng ta cần xác định các tỉ lệ tham gia a_i của mỗi loại cốt liệu để tạo ra cấp phối có thành phần hạt gần nhất với cấp phối mong muốn.

Bảng 1. Thành phần cấp phối hạt của các nhóm cốt liệu

Tên nhóm cốt liệu	Tỷ lệ phối trộn	Lượng lọt sàng $P(\%)$ tương ứng với các cỡ sàng D_j					
		D_1	D_2	...	D_j	...	D_n
Nhóm 1	a_1	P_{11}	P_{12}	...	P_{1j}	...	P_{1n}
Nhóm 2	a_2	P_{21}	P_{22}	...	P_{2j}	...	P_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
Nhóm i	a_i	P_{i1}	P_{i2}	...	P_{ij}	...	P_{in}
....	...	...	...	...	...	...	...
Nhóm m	a_m	P_{m1}	P_{m2}	...	P_{mj}	...	P_{mn}
Cấp phối đạt được sau phối trộn		P_{k1}	P_{k2}	...	P_{kj}	...	P_{kmn}
Cấp phối mong muốn		P_1	P_2	...	P_j	...	P_n

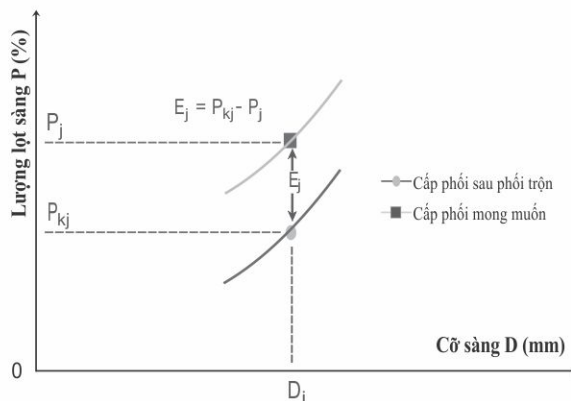
Viết lại phương trình (1) cho trường hợp này :

$$P_{kj} = a_1.P_{1j} + a_2.P_{2j} + \dots + a_i.P_{ij} + \dots + a_m.P_{mj} = \sum_{i=1}^m a_i.P_{ij} \quad (3)$$

Các tỷ lệ phối trộn a_i của từng nhóm hạt thành phần là chấp nhận được khi cấp phối đạt được sau phối trộn có lượng lọt sàng ở mỗi cỡ sàng nằm trong giới hạn quy định và sai lệch nhỏ nhất với cấp phối mong muốn, tức là:

$$\sum_{j=1}^n (P_{kj} - P_j)^2 = \sum_{j=1}^n (E_j)^2 = \min \quad (4)$$

Với E_j là sai lệch giữa đường cong cấp phối mong muốn và đường cong cấp phối sau phối trộn tại cỡ sàng D_j (hình 2): $E_j = P_{kj} - P_j$.



Hình 1. Quan hệ giữa các tham số trong phương pháp thiết kế

Quan hệ (4) cho phép rút ra được hệ n phương trình đạo hàm riêng như sau :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sum_{j=1}^n (E_j)^2}{\partial a_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \sum_{j=1}^n (E_j)^2}{\partial a_i} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \sum_{j=1}^n (E_j)^2}{\partial a_n} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Nghiem duy nhất của hệ phương trình (5) chính là tỷ lệ tham gia a_i của mỗi nhóm hạt vật liệu, đáp ứng được yêu cầu là tổng bình phương sai lệch giữa cấp phối thiết kế và cấp phối mong muốn nhỏ nhất. Tuy nhiên, để cấp phối thiết kế này được chấp thuận, cần phải so sánh với quy định trong tiêu chuẩn thiết kế. Nếu như kết quả sau phối trộn nằm ngoài giới hạn quy định trong tiêu chuẩn kỹ thuật thì cần phải thay đổi hoặc bổ sung thêm nhóm vật liệu tham gia phối trộn và tính lại các tỷ lệ tham gia.



3. Ứng dụng phương pháp bình phương bé nhất để thiết kế bê tông nhựa chặt $D_{\max}$ 19mm (BTNC 19)

Chúng ta sẽ ứng dụng lý thuyết ở trên để tạo ra cấp phối bê tông nhựa chặt có $D_{\max}$ danh định 19mm được phối trộn từ 5 nhóm hạt: Đá dăm $D_{\max}=25\text{mm}$, đá dăm $D_{\max}=10\text{mm}$, cát xay $D_{\max}=5\text{mm}$, cát thiên nhiên $D_{\max}=5\text{mm}$ và bột khoáng có thành phần hạt như trong bảng 2 dưới đây (sử dụng các cốt liệu ở trong ví dụ thiết kế cấp phối bê tông nhựa, được giới thiệu trong tiêu chuẩn TCVN 8820:2011 [3]).

Cỡ sàng (mm)	Tỷ lệ lọt sàng (%)							
	Giới hạn trên	Giới hạn dưới	Giá trị trung bình	Đá dăm $D_{\max}$ 25 mm	Đá dăm $D_{\max}$ 10 mm	Cát xay $D_{\max}$ 5 mm	Cát tự nhiên $D_{\max}$ 5 mm	Bột khoáng
25	100	100	100	100	100	100	100	100
19	100	90	95	86.3	100	100	100	100
12.5	86	71	78.5	30.6	100	100	100	100
9.5	78	58	68	7.4	90.9	100	98.8	100
4.75	61	36	48.5	2.1	46.2	90.5	95	100
2.36	45	25	35	0.3	15.2	70.1	89.3	100
1.18	33	17	25	0.3	0.9	45.5	78.1	100
0.6	25	12	18.5	0.2	0.7	18.9	45.6	100
0.3	17	8	12.5	0	0.2	12.5	8.7	96.4
0.075	8	5	6.5	0	0	7.4	0.9	76.1
Tỷ lệ tham gia phối trộn				a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

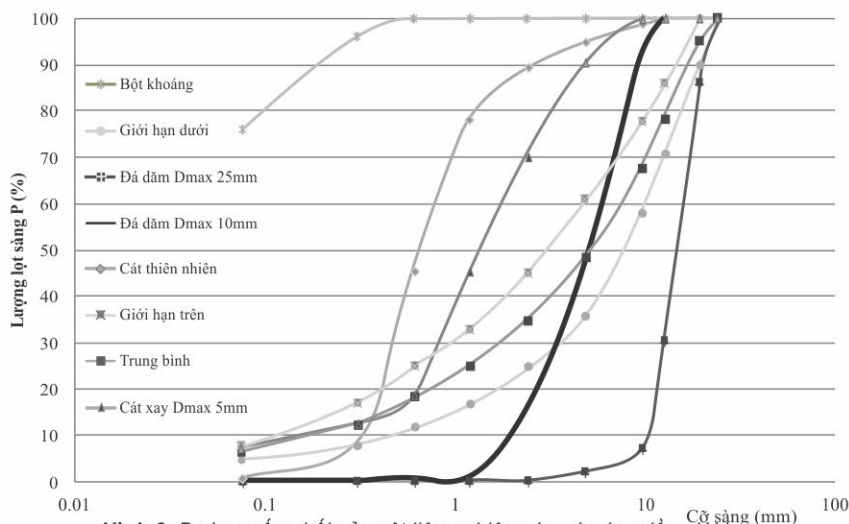
Đường cong cấp phối hạt của 5 nhóm cốt liệu ban đầu và các đường cong giới hạn trên, giới hạn dưới được biểu thị thông qua tỷ lệ lọt sàng ở 10 cỡ sàng từ 0,074-25mm như trên hình 2. Đường cong cấp phối mong muốn được lựa chọn trước, giả thiết là đường trung bình của hai giới hạn trên và dưới.

Mục tiêu của bài toán là cần xác định tỷ lệ tham gia a_i (%) của mỗi loại trong 5 loại cốt liệu ban đầu để cấp phối tạo ra có thành phần cấp phối trong giới hạn quy định và có đường cong cấp phối gần với đường trung bình nhất thông qua phương pháp bình phương nhỏ nhất.

$$\text{Chúng ta có: } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 \quad (6)$$

$$P_{kj} = a_1 \cdot P_{1j} + a_2 \cdot P_{2j} + a_3 \cdot P_{3j} + a_4 \cdot P_{4j} + a_5 \cdot P_{5j} \quad (7)$$

$$\text{Như vậy: } a_5 = 1 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \quad (8)$$



Hình 2. Đường cấp phối của vật liệu nghiên cứu và các miền giới hạn

Độ lệch tại mỗi cỡ sàng: $E_j = P_{kj} - P_j$

$$\begin{aligned} E_j &= a_1 \cdot P_{1j} + a_2 \cdot P_{2j} + a_3 \cdot P_{3j} + a_4 \cdot P_{4j} + a_5 \cdot P_{5j} - P_{kj} \\ &= a_1 \cdot P_{1j} + a_2 \cdot P_{2j} + a_3 \cdot P_{3j} + a_4 \cdot P_{4j} + (1 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4) \cdot P_{5j} - P_{kj} \\ &= (P_{1j} - P_{5j}) \cdot a_1 + (P_{2j} - P_{5j}) \cdot a_2 + (P_{3j} - P_{5j}) \cdot a_3 + (P_{4j} - P_{5j}) \cdot a_4 + (P_{5j} - P_{kj}) \end{aligned} \quad (9)$$

Gọi $X_{1j} = P_{1j} - P_{5j}$; $X_{2j} = P_{2j} - P_{5j}$; $X_{3j} = P_{3j} - P_{5j}$; $X_{4j} = P_{4j} - P_{5j}$; $X_{5j} = P_{5j} - P_{kj}$;

Phương trình (8) có dạng:

$$E_j = X_{1j} \cdot a_1 + X_{2j} \cdot a_2 + X_{3j} \cdot a_3 + X_{4j} \cdot a_4 - X_{5j} \quad (10)$$

Bình phương sai lệch giữa cấp phối mong muốn và cấp phối thiết kế tại cỡ sàng D_j :

$$\begin{aligned} (E_j)^2 &= (X_{1j} \cdot a_1 + X_{2j} \cdot a_2 + X_{3j} \cdot a_3 + X_{4j} \cdot a_4 - X_{5j})^2 \\ &= X_{1j}^2 \cdot a_1^2 + X_{2j}^2 \cdot a_2^2 + X_{3j}^2 \cdot a_3^2 + X_{4j}^2 \cdot a_4^2 + X_{5j}^2 \\ &\quad + 2 \cdot X_{1j} \cdot X_{2j} \cdot a_1 \cdot a_2 + 2 \cdot X_{1j} \cdot X_{3j} \cdot a_1 \cdot a_3 + 2 \cdot X_{1j} \cdot X_{4j} \cdot a_1 \cdot a_4 \\ &\quad + 2 \cdot X_{2j} \cdot X_{3j} \cdot a_2 \cdot a_3 + 2 \cdot X_{2j} \cdot X_{4j} \cdot a_2 \cdot a_4 + 2 \cdot X_{3j} \cdot X_{4j} \cdot a_3 \cdot a_4 \\ &\quad - 2 \cdot X_{1j} \cdot X_{5j} \cdot a_1 - 2 \cdot X_{2j} \cdot X_{5j} \cdot a_2 - 2 \cdot X_{3j} \cdot X_{5j} \cdot a_3 \\ &\quad - 2 \cdot X_{4j} \cdot X_{5j} \cdot a_4 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n (E_j)^2 = \min \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sum_{j=1}^n (E_j)^2}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial \sum_{j=1}^n (E_j)^2}{\partial a_2} = 0 \\ \frac{\partial \sum_{j=1}^n (E_j)^2}{\partial a_3} = 0 \\ \frac{\partial \sum_{j=1}^n (E_j)^2}{\partial a_4} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \cdot \sum_{j=1}^n (X_{1j})^2 + a_2 \cdot \sum_{j=1}^n X_{1j} \cdot X_{2j} + a_3 \cdot \sum_{j=1}^n X_{1j} \cdot X_{3j} + a_4 \cdot \sum_{j=1}^n X_{1j} \cdot X_{4j} = \sum_{j=1}^n X_{1j} \cdot X_{5j} \\ a_1 \cdot \sum_{j=1}^n X_{1j} \cdot X_{2j} + a_2 \cdot \sum_{j=1}^n (X_{2j})^2 + a_3 \cdot \sum_{j=1}^n X_{2j} \cdot X_{3j} + a_4 \cdot \sum_{j=1}^n X_{2j} \cdot X_{4j} = \sum_{j=1}^n X_{2j} \cdot X_{5j} \\ a_1 \cdot \sum_{j=1}^n X_{1j} \cdot X_{3j} + a_2 \cdot \sum_{j=1}^n X_{2j} \cdot X_{3j} + a_3 \cdot \sum_{j=1}^n (X_{3j})^2 + a_4 \cdot \sum_{j=1}^n X_{3j} \cdot X_{4j} = \sum_{j=1}^n X_{3j} \cdot X_{5j} \\ a_1 \cdot \sum_{j=1}^n X_{1j} \cdot X_{4j} + a_2 \cdot \sum_{j=1}^n X_{2j} \cdot X_{4j} + a_3 \cdot \sum_{j=1}^n X_{3j} \cdot X_{4j} + a_4 \cdot \sum_{j=1}^n (X_{4j})^2 = \sum_{j=1}^n X_{4j} \cdot X_{5j} \end{cases} \quad (13)$$

Thay vào ta có:

$$\begin{bmatrix} 68087.61 & 49419.54 & 30754.54 & 23456.96 \\ 49419.54 & 44895.24 & 29800.05 & 22918.95 \\ 30754.54 & 29800.05 & 22290.62 & 18497.09 \\ 23456.96 & 22918.95 & 18497.09 & 16926.23 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45041.87 \\ 37467.09 \\ 24950.63 \\ 19659.45 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Giải hệ phương trình trên, ta xác định được các hệ số a_i như trong bảng sau:

Bảng 3. Kết quả tính toán tỷ lệ phối trộn

Tên nhóm cốt liệu	Đá dăm $D_{\max}$ 25 mm	Đá dăm $D_{\max}$ 10 mm	Cát xay $D_{\max}$ 5 mm	Cát tự nhiên $D_{\max}$ 5 mm	Bột khoáng
Tỷ lệ phối trộn a_i	0.31	0.36	0.08	0.16	0.09

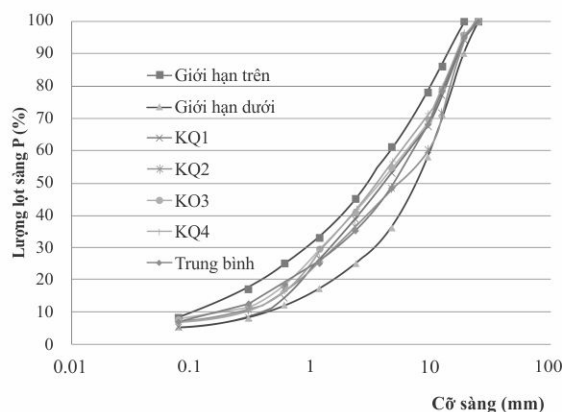
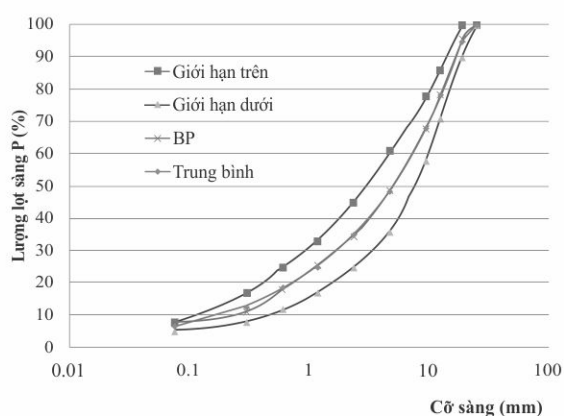
Bảng 4. Thành phần cấp phối đạt được sau phối trộn

Cỡ sàng (mm)	25	19	12.5	9.5	4.75	2.36	1.18	0.6	0.3	0.075
% lọt sàng	100	95.8	78.5	67.8	48.7	34.5	25.6	18.1	11.1	7.6

Các tỷ lệ phối trộn này sẽ tạo ra cấp phối tính toán như trong bảng 4, theo mục tiêu bám sát đường cong cấp phối mong muốn.

So sánh về định tính, đường cong cấp phối bình phương tính toán phương pháp bình phương bé nhất gần như trùng với đường trung bình và nằm trong miền giới hạn quy định tiêu chuẩn thiết kế bê tông nhựa TCVN 8819 : 2011 (hình 3a). Trong khi đó, các đường cong cấp phối tính toán KQ1, KQ2, KQ3 và KQ4 (sử dụng các kết quả nhận được khi dùng hàm Solver, được giới thiệu trong tiêu chuẩn TCVN 8820 : 2011) cũng nằm trong giới hạn quy định, nhưng mức độ mềm mại là rất khác nhau và chưa bám sát đường trung bình, mặc dù cũng thiết kế theo mục tiêu bám sát đường trung bình (hình 3b).

So sánh theo định lượng, sự khác biệt giữa các phương án phối trộn thể hiện ở giá trị tổng bình phương sai lệch giữa đường cong cấp phối trung bình với các đường cong cấp phối tính toán. Kết quả tính toán trong bảng 5 cho thấy giữa các cấp phối tính toán, cấp phối tính theo phương pháp bình phương bé nhất có sai lệch nhỏ nhất so với kết quả dùng hàm Solver.



a) Kết quả tính theo phương pháp bình phương nhỏ nhất

b) Các kết quả dùng hàm Solver [3]

Hình 3. So sánh các đường cong cấp phối tính toán

Bảng 5. Phương sai của các cấp phối thiết kế

Tên cấp phối thiết kế	Tổng bình phương sai lệch $\sum_{j=1}^n (E_j)^2$
KQ 1	78.3
KQ 2	140.1
KQ3	97.9
KQ 4	147.6
BP	4.4



4. Kết luận

Qua các phân tích lý thuyết và ví dụ tính toán đã cho thấy tính hiệu quả của phương pháp bình phương bé nhất trong thiết kế thành phần hạt cho bê tông Asphalt. Với nguyên lý tương tự, chúng ta có thể ứng dụng rộng rãi phương pháp này trong thiết kế cấp phối các loại vật liệu như cấp phối đá dăm, cấp phối bê tông xi măng... nhằm đưa ra được hỗn hợp có sự đồng đều cao và phù hợp với đường cong cấp phối mong muốn. Với sự hỗ trợ của máy tính, khả năng sử dụng phương pháp này trở nên đơn giản và linh hoạt.

Tài liệu tham khảo

1. Trần Quốc Bình, (2005). *Lý thuyết sai số và phương pháp số bình phương nhỏ nhất*. Nhà xuất bản Nông nghiệp, Hà Nội.
2. TCVN 8819:2011, (2011). *Mặt đường bê tông nhựa nóng - Yêu cầu thi công và nghiệm thu*.
3. TCVN 8820:2011, (2011). *Hỗn hợp bê tông nhựa nóng - Thiết kế theo phương pháp Marshall*.