



## PHÂN TÍCH KẾT CẤU KHUNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN KHOẢNG

Trần Văn Liên<sup>1</sup>, Nguyễn Tấn Thắng<sup>2</sup>, Nguyễn Thanh Bình<sup>3</sup>

**Tóm tắt:** Bài báo trình bày các nghiên cứu về phương pháp PTHH khoảng để mô tả các yếu tố không chắc chắn của kết cấu là những số khoảng bị chặn trên và chặn dưới nhưng không gắn với một cấu trúc xác suất nào. Từ đó, tác giả đã ứng dụng vào việc phân tích kết cấu thanh với các tham số vật liệu, hình học, liên kết và tải trọng là các tham số khoảng. Các kết quả nhận được xấp xỉ với nghiệm chính xác và có thể ứng dụng vào thực tế.

**Từ khóa:** Yếu tố không chắc chắn; Số khoảng; Phương pháp PTHH khoảng

**Summary:** The paper presents the application of Interval Finite Element Analysis (IFEA) for uncertainties in the material, geometry, and load parameters in linear static element analysis. Uncertainties are introduced as bounded possible values (intervals), and it has lower and upper bounds without assigning a probability structure. The obtained results should be accurate and efficiently computed.

**Keywords:** Uncertainties; Intervals; Interval Finite Element Analysis

Nhận ngày 18/2/2013, chỉnh sửa ngày 18/3/2013, chấp nhận đăng 30/3/2013



### 1. Mở đầu

Khi mô hình hóa và phân tích kết cấu, ta thường gặp trường hợp các số liệu về vật liệu, hình học, liên kết, tải trọng cũng như chính việc mô hình hóa và phân tích kết cấu có chứa nhiều yếu tố không chắc chắn, dẫn đến các phản ứng của hệ cũng là những yếu tố không chắc chắn. Mặc dù mô hình xác suất và thống kê đã được xây dựng khá đầy đủ và rõ ràng, nhưng trong các trường hợp số liệu không đủ, không rõ ràng, không được phân loại,... thì người ta phải chuyển sang sử dụng các mô hình phi xác suất như lý thuyết tập mờ [5-6, 18], phương pháp khoảng [8, 10-13, 15-17], mô hình lồi [9, 16-17], lý thuyết nhân chứng [6, 9],... là phù hợp hơn để mô hình hóa các yếu tố không chắc chắn.

Những năm gần đây đã có nhiều nghiên cứu quan tâm tới việc mô hình hóa và phân tích kết cấu có xét đến các yếu tố không chắc chắn trên cơ sở phát triển phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) khoảng và phương pháp PTHH mờ [11, 16-17]. Việc phân tích PTHH mờ có thể chia ra thành một loạt các phân tích PTHH khoảng với các mức mờ khác nhau, vì vậy, phương pháp PTHH mờ cũng là sự mở rộng của phương pháp PTHH khoảng. Những năm 1990 là thời kỳ bắt đầu nghiên cứu phương pháp PTHH khoảng trong cơ học và đã đạt một số kết quả nhất định trong lĩnh vực phân tích tĩnh và động kết cấu, lĩnh vực địa kỹ thuật và truyền nhiệt,...[11, 16-17]. Phương pháp PTHH khoảng có thể xem như là phần mở rộng của phương pháp PTHH thông thường. Sự khác nhau cơ bản là, trong phương pháp PTHH khoảng một số tham số như mô đun đàn hồi, diện tích tiết diện, tải trọng,... là các đại lượng khoảng, dẫn đến ma trận độ cứng  $K$  và véc tơ tải trọng  $p$  cũng là những đại lượng khoảng, do đó, phản ứng của hệ bao gồm ứng suất, biến dạng, chuyển vị,... cũng là hàm của các đại lượng khoảng. Bài toán đặt ra là cần phải đánh giá chính xác khoảng các phản ứng của hệ.

<sup>1</sup>PGS.TS, Khoa Xây dựng DD&CN, Trường Đại học Xây dựng. E-mail: LienTV@hotmail.com

<sup>2</sup>ThS, Khoa Xây dựng DD&CN, Trường Đại học Xây dựng.

<sup>3</sup>ThS, Tổng Công ty 319, Bộ Quốc phòng.

Nếu chỉ có tải trọng là tham số khoảng thì ma trận độ cứng  $K$  không bao gồm các số khoảng nên ta có thể tìm được chính xác vùng phản ứng của hệ. Mullen và Muhanna [16-17] đã phát triển một thuật toán dựa trên số học khoảng để tính phản ứng của kết cấu chịu những dạng tải trọng bất lợi nhất. Từ nghiên cứu của Mullen và Muhanna, Saxena [11, 16] đã nghiên cứu tất cả những dạng tải trọng cho những kết cấu lớn và phức tạp. Pantelides và Ganzerli [11, 16] đã sử dụng phương pháp chồng chất nghiệm để giải những bài toán đàn hồi tuyến tính với tải trọng khoảng và nghiệm thu được trùng với nghiệm của Mullen và Muhanna. Đối với các bài toán với nhiều tải trọng khoảng, phương pháp chồng chất nghiệm lại trở nên kém hiệu quả. Trong trường hợp tổng quát, khi cả ma trận độ cứng  $K$  và véc tơ tải trọng  $P$  là các đại lượng khoảng, thì độ chính xác khoảng phản ứng của hệ là khó đạt được hơn. Do đó, ta cần quan tâm đến việc là làm thế nào để đánh giá được khoảng chính xác cho phản ứng thực của hệ.

Ở Việt Nam, phương pháp PTHH khoảng đã được tác giả Trần Văn Liên bước đầu nghiên cứu và ứng dụng vào trong tính toán công trình [2-4]. Trên cơ sở tìm hiểu và ứng dụng phép giải lặp Krawczyk để giải hệ phương trình tuyến tính khoảng, tác giả đã tính toán một số hệ thanh chịu kéo nén với các tham số vật liệu, hình học và tải trọng là các đại lượng khoảng. Các kết quả nhận được là khá gần với nghiệm giải tích. Tuy vậy, việc nghiên cứu ứng dụng lý thuyết khoảng cho các kết cấu phức tạp hơn như khung, tấm còn chưa được nghiên cứu. Đối với bài toán động lực học công trình, tác giả Phùng Quyết Thắng [7] đã có một số kết quả nghiên cứu bước đầu về việc xác định phản ứng động của hệ kết cấu có một bậc tự do với 5 tham số là các số khoảng dựa trên mô hình Taylor với thuật toán VSPODE của Stadther.

Bài báo này trình bày các nghiên cứu về phương pháp PTHH khoảng để mô tả các yếu tố không chắc chắn là những số khoảng bị chặn trên và chặn dưới nhưng không gắn với một cấu trúc xác suất nào. Từ đó, tác giả đã ứng dụng vào việc phân tích kết cấu thanh chịu uốn với các tham số vật liệu, hình học, liên kết và tải trọng là các tham số khoảng. Các kết quả nhận được xấp xỉ với nghiệm chính xác và có thể ứng dụng vào thực tế.

## 2. Đặc điểm của đại số khoảng và của phương pháp PTHH khoảng

a. Đối với các hàm số mà tham số khoảng xuất hiện nhiều hơn một lần thì sẽ xảy ra *bài toán phụ thuộc* gây ra sự mở rộng khoảng quá mức. Nếu bằng cách nào đó ta giảm được số lần xuất hiện của tham số khoảng, thì ta có thể tránh được bài toán phụ thuộc và thành công của phép phân tích khoảng phụ thuộc vào việc sự giảm bớt sự phụ thuộc. Chẳng hạn, hàm số  $f(x) = x^2 - x$  với  $x \in [-1, 1]$ , bằng cách đánh giá thông thường, ta nhận được vùng giá trị trên khoảng  $[-1, 1]$  là:

$$f(x) = x^2 - x = [-1, 1]^2 - [-1, 1] = [0, 1] - [-1, 1] = [-1, 2]$$

$$\text{Mặt khác, ta có thể viết: } \{f(x) = x^2 - x = (x - 0.5)^2 - 0.25 | x \in [-1, 1]\} = [-0.25, 2]$$

Như vậy, vùng giá trị hàm số khoảng  $f$  có bao hàm vùng giá trị chính xác, nhưng nó đưa ra giá trị cận dưới là quá rộng từ -0.25 tới -1.

b. Khi thay thế các tham số và phép toán trong phương pháp PTHH thông thường bằng các tham số khoảng và phép toán khoảng tương ứng sẽ *mang lại kết quả là khoảng nghiệm quá rộng, không còn ý nghĩa thực tế*. Đó là do *số học khoảng* xem rằng, tất cả các hệ số khoảng trong ma trận độ cứng thay đổi độc lập trong khoảng giá trị của chúng. Đặc điểm này có ảnh hưởng lớn đến việc xây dựng phương pháp PTHH khoảng. Để phương pháp này cho nghiệm gần đúng tốt nhất thì ta cần *giảm số lần xuất hiện của cùng một biến khoảng trong tính toán và chỉ sử dụng số học khoảng khi cần thiết, càng muộn càng tốt* [11, 16].

## 3. Phương pháp PTHH khoảng

### 3.1. Mô hình PTHH của thanh có liên kết đàn hồi tại hai đầu nút

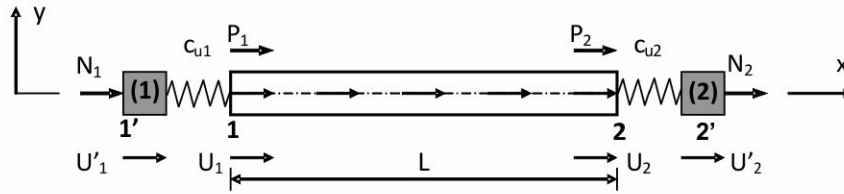
Xét phần tử thanh thẳng chịu kéo nén có tiết diện không đổi  $A$ , chiều dài  $L$ , mô đun đàn hồi  $E$  và các liên kết đàn hồi ở hai đầu thanh như hình 1. Ký hiệu  $c_{u1}$ ,  $c_{u2}$  là độ cứng của liên kết đàn hồi qui ước, khi đó ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng quy đổi của phần tử thanh này có dạng [1]:

$$K = \tilde{K}^{-1} K_0 = \frac{EA/L}{1 + \frac{EA/L}{c_{u1}} + \frac{EA/L}{c_{u2}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; P^{td} = \tilde{K}^{-1} \cdot P \quad (1)$$



trong đó  $K_0$  và  $P$  là ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng quy về nút của thanh thẳng chịu kéo nén thông thường, và ma trận

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1/c_{u1} & -1/c_{u2} \\ -1/c_{u1} & 1/c_{u2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

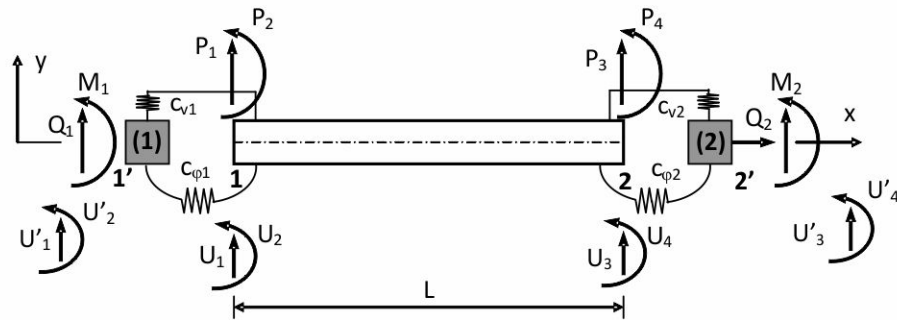


**Hình 1.** Mô hình PTHH thanh chịu kéo nén có liên kết đàn hồi tại 2 nút

Xét thanh thẳng có tiết diện không đổi chịu uốn với các liên kết đàn hồi như hình 2. Ký hiệu  $c_{v1}$ ,  $c_{v2}$ ,  $c_{\phi1}$ ,  $c_{\phi2}$  là độ cứng của liên kết đàn hồi qui ước, khi đó ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng quy đổi của phần tử thanh này có dạng [1]

$$K = \tilde{K}^{-1} K_0 ; P^{td} = \tilde{K}^{-1} . P \quad (3)$$

trong đó  $K_0$  và  $P$  là ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng quy về nút của thanh thẳng chịu uốn thông thường, và ma trận



**Hình 2.** Mô hình PTHH thanh chịu uốn có liên kết đàn hồi tại 2 nút

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{EI_z}{L^3} \begin{pmatrix} 12/c_{v1} & 6L/c_{\phi1} & -12/c_{v1} & 6L/c_{\phi2} \\ 6L/c_{v1} & 4L^2/c_{\phi1} & -6L/c_{v1} & 2L^2/c_{\phi2} \\ -12/c_{v1} & -6L/c_{\phi1} & 12/c_{v1} & -6L/c_{\phi2} \\ 6L/c_{v1} & 2L^2/c_{\phi1} & -6L/c_{v1} & 4L^2/c_{\phi2} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Khi giả thiết các biến dạng kéo nén và uốn là độc lập nhau, ta nhận được ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng quy về nút của phần tử thanh thẳng có liên kết đàn hồi tại nút là tổ hợp của phần tử thanh chịu kéo nén và phần tử dầm chịu uốn trong hệ tọa độ địa phương.

### 3.2. Tách các tham số khoảng trong ma trận độ cứng

Giả thiết môđun đàn hồi  $E$  là không chắc chắn, thể hiện bằng tham số khoảng  $E = [\underline{E}, \bar{E}]$  hay là

$$E = \tilde{E}(1 + \delta) \quad (5)$$

Với  $\tilde{E}$  là điểm giữa của  $E$ ;  $\delta$  là nhân tử khoảng của  $E$

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}(\underline{E} + \bar{E}); \delta = (E/\tilde{E}) - 1 = [-rad(E)/\tilde{E}, rad(E)/\tilde{E}]; rad(E) = \frac{1}{2}(\bar{E} - \underline{E})$$

Ta nhận được ma trận độ cứng khoảng  $k$  của PTHH gồm phần xác định  $\bar{k}$  là ma trận độ cứng xác định theo giá trị điểm giữa  $E$  bằng phương pháp PTHH thông thường và phần khoảng  $\bar{k}d$

$$k = \bar{k}(I + d) \quad (6)$$

Với  $I$  là ma trận đơn vị;  $d$  là ma trận đường chéo khoảng, gọi là ma trận nhân tử khoảng

$$d = \text{diag}(\delta \quad \dots \quad \delta) \quad (7)$$

Khi các tham số khác như chiều dài thanh, bề dày tấm, diện tích tiết diện, độ cứng chống uốn,... là tham số khoảng, ta cũng có thể biểu diễn ma trận độ cứng của PTHH dưới dạng (6).

### 3.3. Ghép các PTHH theo phương pháp EBE. Xử lý các điều kiện biên và ràng buộc theo phương pháp hàm phạt

Trong phương pháp PTHH khoảng, việc ghép các ma trận độ cứng của từng PTHH vào ma trận độ cứng của kết cấu như phương pháp PTHH thông thường sẽ dẫn đến bài toán phụ thuộc vì rằng hai hệ số  $K_{ij}$  và  $K_{mn}$  nào đó có thể xuất phát từ cùng một phần tử, do vậy, chúng phụ thuộc lẫn nhau nhưng số học khoảng không thể tự động nhận biết được sự phụ thuộc này.

Để khắc phục khó khăn này, Muhanna và Mullen đã đề xuất phương pháp *tách từng phần tử* (element by element - EBE) trong quá trình tập hợp các phần tử theo phương pháp PTHH khoảng. Tư tưởng cơ bản của phương pháp này là tách rời các PTHH, xem như không có bất kỳ một liên kết nào giữa các phần tử để tránh được sự phụ thuộc trong quá trình tập hợp phần tử. Để kết nối các phần tử và khử tính suy biến của ma trận  $K$ , ta cần đưa thêm vào các điều kiện ràng buộc và điều kiện biên theo *phương pháp hàm phạt*. Số phạt phải đủ lớn để thỏa mãn các điều kiện này nhưng không được quá lớn làm cho phương trình cân bằng trở nên không ổn định.

Đối với các điều kiện ràng buộc và điều kiện biên có dạng  $cu - q = 0$  trong đó  $c$  và  $q$  là hằng số, ta đưa vào hàm số  $t = cu - q$ , khi đó các điều kiện ràng buộc và điều kiện biên được thỏa mãn nếu  $t = 0$ . Đối với bài toán đàn hồi tuyến tính tĩnh, khi bổ sung thêm lượng phạt  $\frac{1}{2} t^T \eta t$  với  $\eta$  là ma trận đường chéo của những số phạt  $\eta_i$  vào phiếm hàm thế năng toàn phần  $\Pi = \frac{1}{2} u^T K u - u^T p$ , ta có  $\Pi^* = \frac{1}{2} u^T K u - u^T p + \frac{1}{2} t^T \eta t$

Từ điều kiện dừng của phiếm hàm  $\Pi$  là  $\delta \Pi = 0$ , ta nhận được  $(K + Q)u = p + c^T \eta q$  (8)

Trong đó  $Q = c^T \eta c$  gọi là ma trận phạt. Đối với các điều kiện ràng buộc và điều kiện biên trong mô hình EBE có dạng  $cu = 0$  và  $q = 0$ , phương trình (8) đưa về dạng đơn giản hơn

$$(K + Q)u = p \quad (9)$$

Phương pháp hàm phạt có ưu điểm là dễ sử dụng, việc bổ sung số phạt vào ma trận độ cứng của kết cấu là đơn giản và không đòi hỏi phương trình bổ sung.

### 3.4. Tải trọng nút khoảng

Giả thiết tại nút chung  $i$  của  $t$  phần tử khác nhau trong kết cấu có đặt tải trọng ngoài  $p_i$ . Nút chung  $i$  này sẽ xuất hiện ở  $t$  phần tử khác nhau trong mô hình EBE với các nút tương ứng là  $i_1, \dots, i_t$  và tải trọng đặt tại các nút này là  $p_{i_1}, \dots, p_{i_t}$ . Khi  $p_i$  là xác định,  $p_{i_1}, \dots, p_{i_t}$  có thể được lựa chọn một cách tùy ý miễn là thỏa mãn điều kiện  $p_i = \sum_{j=1}^t p_{i_j}$ . Khi  $p_i$  là đại lượng không chắc chắn và biến thiên trong khoảng  $p_i$ , ta có  $p_i = \sum_{j=1}^t p_{i_j}$ . Để giảm số lượng biến khoảng trong tính toán, ta có thể chọn tải trọng khoảng hoàn toàn đặt tại một nút, những nút còn lại tải trọng đặt bằng 0

$$\begin{aligned} p_{i_1} &= p_i \\ p_{i_j} &= 0 \text{ với } j = 2, \dots, t \end{aligned} \quad (10)$$



## 4. Phân tích khung siêu tĩnh

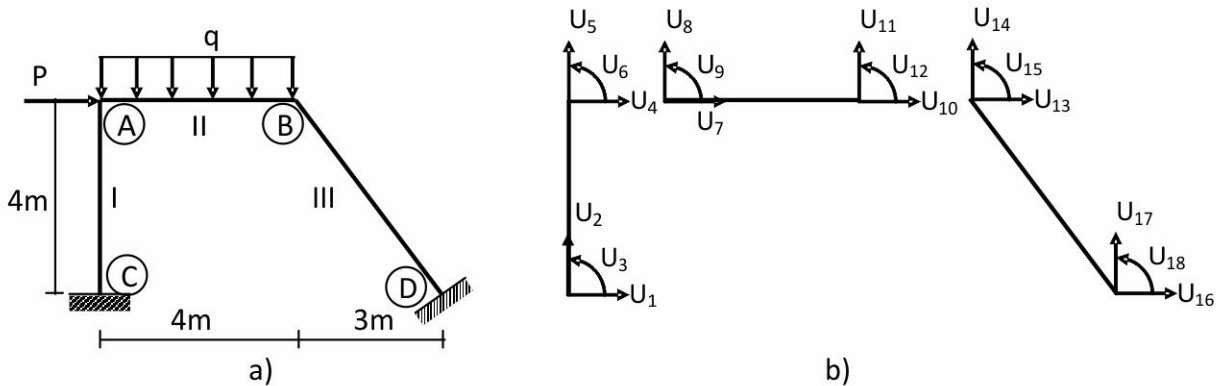
Khung phẳng gồm 3 thanh có diện tích  $A_1, A_2, A_3$ ; mô đun đàn hồi  $E$ , mômen quán tính  $I_1, I_2, I_3$ ; chịu tải trọng tập trung  $P$ , tải trọng phân bố  $q$  như trên hình 3a. Bài toán đặt ra là xác định chuyển vị nút và lực dọc trong các thanh theo phương pháp PTHH khoảng với mô hình EBE (hình 3b) và so sánh với nghiệm

giải tích tương ứng với các trường hợp:

1. Khi  $E, A, I, P, q$  là giá trị điểm:  $E=2 \cdot 10^7 (kN/m^2)$ ;  $I_1=I_2=12 \cdot 10^5 (m^4)$ ;  $A_1=A_2=0,03 (m^2)$ ;  $I_3=15 \cdot 10^5 (m^4)$ ;  $A_3=0,035 (m^2)$ ;  $P=400kN$ ,  $q=50kN/m$

2. Khi  $E, A, I$  là giá trị điểm;  $P, q$  là các giá trị khoảng:  $E=2 \cdot 10^7 (kN/m^2)$ ;  $I_1=I_2=12 \cdot 10^5 (m^4)$ ;  $A_1=A_2=0,03 (m^2)$ ;  $I_3=15 \cdot 10^5 (m^4)$ ;  $A_3=0,035 (m^2)$ ;  $P=[395, 405] kN$ ,  $q=[45, 55] kN/m$

3. Khi  $E, A, I, P, q$  là giá trị khoảng:  $E=[1,9, 2,1] \cdot 10^7 (kN/m^2)$ ;  $I_1=I_2=[11, 13] \cdot 10^5 (m^4)$ ;  $A_1=A_2=[0,029, 0,031] (m^2)$ ;  $I_3=[14, 16] \cdot 10^5 (m^4)$ ;  $A_3=[0,034, 0,036] (m^2)$ ;  $P=[395, 405] kN$ ,  $q=[45, 55] kN/m$



**Hình 3.** Khung siêu tĩnh có liên kết tuyệt đối cứng

Việc xác định số phạt dựa trên yêu cầu kết quả tính chuyển vị theo PTHH khoảng phải trùng với kết quả giải tích khi các tham số đầu vào là điểm. Trong bài toán này bằng việc thử nhiều lần, ta chọn được số phạt nằm trong khoảng  $10^7$  đến  $10^{15}$  là phù hợp. Nếu chọn số phạt quá lớn ( $\eta \geq 10^{20}$ ), phương trình cân bằng trở nên không ổn định và gây ra sai sót lớn.

Bảng 1 và 2 thể hiện so sánh kết quả tính chuyển vị và ứng lực nút theo phương pháp PTHH khoảng và theo nghiệm giải tích ứng khi  $E, A, I$  là giá trị điểm;  $P, q$  là các giá trị khoảng

**Bảng 1.** Kết quả tính các chuyển vị nút

| Nút   | Nghiem giải tích (m) | Nghiem chương trình (m) | Nút      | Nghiem giải tích (m) | Nghiem chương trình (m) |
|-------|----------------------|-------------------------|----------|----------------------|-------------------------|
| $u_1$ | [ 0.0000, 0.0000]    | [ 0.0000, 0.0001]       | $u_{10}$ | [ 0.2826, 0.2914]    | [ 0.2824, 0.2992]       |
| $u_2$ | [ 0.0000, 0.0000]    | [ 0.0000, 0.0001]       | $u_{11}$ | [ 0.2088, 0.2154]    | [ 0.2086, 0.2156]       |
| $u_3$ | [-0.0000, -0.0000]   | [-0.0001, -0.0000]      | $u_{12}$ | [ 0.0068, 0.0086]    | [ 0.0067, 0.0086]       |
| $u_4$ | [ 0.2846, 0.2934]    | [ 0.2844, 0.2990]       | $u_{13}$ | [ 0.2826, 0.2914]    | [ 0.2824, 0.2992]       |
| $u_5$ | [ 0.0001, 0.0001]    | [ 0.0000, 0.0002]       | $u_{14}$ | [ 0.2088, 0.2155]    | [ 0.2086, 0.2156]       |
| $u_6$ | [-0.0308, -0.0297]   | [-0.0312, -0.0293]      | $u_{15}$ | [ 0.0068, 0.0086]    | [ 0.0067, 0.0086]       |
| $u_7$ | [ 0.2846, 0.2934]    | [ 0.2844, 0.2990]       | $u_{16}$ | [ 0.0000, 0.0000]    | [ 0.0000, 0.0001]       |
| $u_8$ | [ 0.0001, 0.0001]    | [ 0.0000, 0.0002]       | $u_{17}$ | [-0.0000, -0.0000]   | [-0.0001, -0.0000]      |
| $u_9$ | [-0.0308, -0.0297]   | [-0.0312, -0.0293]      | $u_{18}$ | [-0.0000, -0.0000]   | [-0.0001, -0.0000]      |



**Bảng 2.** Kết quả tính các ứng lực nút

| Phần tử | Ứng lực     | Nghiệm giải tích       | Nghiệm chương trình     |
|---------|-------------|------------------------|-------------------------|
| 1       | $N_C$ (kN)  | [ 9.9385, 21.5013]     | [ 9.0677, 22.3722]      |
|         | $Q_C$ (kN)  | [-103.3299, -100.3354] | [ -105.6515, -99.9457]  |
|         | $M_C$ (kNm) | [-223.4596, -219.1589] | [ -224.8998, -218.5814] |
|         | $N_A$ (kN)  | [ 9.9385, 21.5013]     | [ 9.0677, 22.3722]      |
|         | $Q_A$ (kN)  | [-103.3299, -100.3354] | [ -105.6515, -99.9457]  |
|         | $M_A$ (kNm) | [ 182.1825, 192.8599]  | [ 174.8832, 196.0244]   |
| 2       | $N_A$ (kN)  | [-297.6646, -296.6701] | [ -306.8174, -291.0244] |
|         | $Q_A$ (kN)  | [ 9.9385, 21.5013]     | [ 0.5088, 30.9310]      |
|         | $M_A$ (kNm) | [ 182.1825, 192.8599]  | [ 162.4307, 212.6085]   |
|         | $N_B$ (kN)  | [-297.6646, -296.6701] | [ -306.8174, -291.0244] |
|         | $Q_B$ (kN)  | [ 213.5013, 217.9385]  | [ 192.5088, 238.9310]   |
|         | $M_B$ (kNm) | [-277.1453, -273.5716] | [ -297.2933, -213.4269] |
| 3       | $N_B$ (kN)  | [-352.9496, -348.8031] | [ -370.5088, -340.9310] |
|         | $Q_B$ (kN)  | [-109.2353, -107.3686] | [ -110.0110, -105.9943] |
|         | $M_B$ (kNm) | [-277.1453, -273.5716] | [ -297.2933, -213.4269] |
|         | $N_D$ (kN)  | [-352.9496, -348.8031] | [ -370.5088, -340.9310] |
|         | $Q_D$ (kN)  | [-109.2353, -107.3686] | [ -110.0110, -105.9943] |
|         | $M_D$ (kNm) | [ 263.2714, 269.0312]  | [ 249.7949, 281.0126]   |

Bảng 3 và 4 thể hiện so sánh kết quả tính chuyển vị và ứng lực nút (bảng 6) theo phương pháp PTHH khoảng và theo nghiệm giải tích khi  $E$ ,  $A$ ,  $I$ ,  $P$ ,  $q$  là giá trị khoảng.

**Bảng 3.** Kết quả tính chuyển vị nút

| Nút   | Nghiệm giải tích (m) | Nghiệm chương trình (m) | Nút      | Nghiệm giải tích (m) | Nghiệm chương trình (m) |
|-------|----------------------|-------------------------|----------|----------------------|-------------------------|
| $u_1$ | [0.0000, 0.0000]     | [ 0.0000, 0.0001]       | $u_{10}$ | [ 0.2846, 0.2883]    | [0.2824, 0.2890]        |
| $u_2$ | [0.0000, 0.0000]     | [ 0.0000, 0.0001]       | $u_{11}$ | [ 0.2091, 0.2128]    | [0.2086, 0.2156]        |
| $u_3$ | [-0.0000, -0.0000]   | [-0.0001, -0.0000]      | $u_{12}$ | [ 0.0068, 0.0078]    | [0.0067, 0.0086]        |
| $u_4$ | [0.2855, 0.2880]     | [0.2844, 0.2890]        | $u_{13}$ | [ 0.2846, 0.2883]    | [0.2824, 0.2890]        |
| $u_5$ | [0.0001, 0.0001]     | [0.0000, 0.0002]        | $u_{14}$ | [ 0.2091, 0.2128]    | [0.2086, 0.2156]        |
| $u_6$ | [-0.0304, -0.0263]   | [-0.0312, -0.0293]      | $u_{15}$ | [ 0.0068, 0.0078]    | [0.0067, 0.0086]        |
| $u_7$ | [0.2855, 0.2880]     | [0.2844, 0.2890]        | $u_{16}$ | [ 0.0000, 0.0000]    | [0.0000, 0.0001]        |
| $u_8$ | [ 0.0001, 0.0001]    | [0.0000, 0.0002]        | $u_{17}$ | [-0.0000, -0.0000]   | [-0.0001, -0.0000]      |
| $u_9$ | [-0.0304, -0.0263]   | [-0.0312, -0.0293]      | $u_{18}$ | [-0.0000, -0.0000]   | [-0.0001, -0.0000]      |

**Bảng 4.** Kết quả tính các ứng lực nút

| Phần tử | Ứng lực     | Nghiệm giải tích       | Nghiệm chương trình     |
|---------|-------------|------------------------|-------------------------|
| 1       | $N_C$ (kN)  | [ 10.0218, 20.1212]    | [ 0.2823, 31.1576]      |
|         | $Q_C$ (kN)  | [-104.3788, -93.2622]  | [ -111.3727, -89.4151]  |
|         | $M_C$ (kNm) | [-226.6831, -203.9993] | [ -239.8279, -198.0345] |
|         | $N_A$ (kN)  | [ 10.0218, 20.1212]    | [ 0.2823, 31.1576]      |
|         | $Q_A$ (kN)  | [-104.3788, -93.2622]  | [ -111.3727, -89.4151]  |
|         | $M_A$ (kNm) | [ 179.0494, 190.8323]  | [ 117.8327, 247.4560]   |
| 2       | $N_A$ (kN)  | [-284.7378, -263.6212] | [-294.3388, -254.2621]  |
|         | $Q_A$ (kN)  | [ 10.0218, 20.1212]    | [ 8.4, 39.8341]         |
|         | $M_A$ (kNm) | [ 179.0494, 190.8323]  | [ 144.7, 230.3]         |
|         | $N_B$ (kN)  | [-284.7378, -263.6212] | [-294.3388, -254.2621]  |
|         | $Q_B$ (kN)  | [ 202.0218, 212.1212]  | [ 183.6, 247.8]         |
|         | $M_B$ (kNm) | [-275.0378, -263.6527] | [ -330.3, -120.4]       |
| 3       | $N_B$ (kN)  | [-346.4601, -335.8697] | [-326.6401, -305.6879]  |
|         | $Q_B$ (kN)  | [-108.5772, -103.6242] | [ -117.0, -97.5]        |
|         | $M_B$ (kNm) | [-275.0378, -263.6527] | [ -298.1, -247.5]       |
|         | $N_D$ (kN)  | [-346.4601, -345.8697] | [-326.6401, -305.6879]  |
|         | $Q_D$ (kN)  | [-108.5772, -103.6242] | [ -117.0, -97.5]        |
|         | $M_D$ (kNm) | [ 254.4682, 267.8481]  | [ 189.9, 337.4]         |

Từ các kết quả trên, ta rút ra các nhận xét:

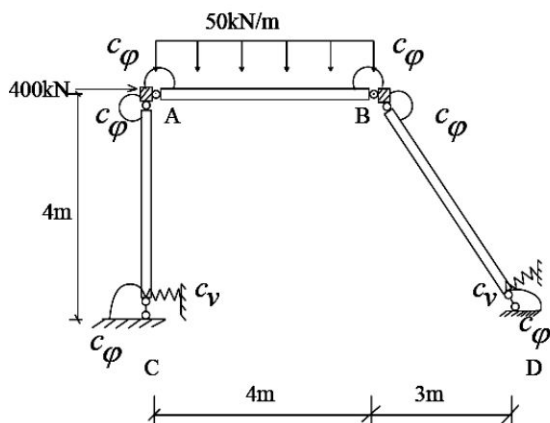
- Trong các trường hợp tính toán, nghiệm giải tích luôn đưa ra kết quả là một khoảng hẹp nhất so với các kết quả tính theo chương trình. Khi chỉ có tải trọng  $P$ ,  $q$  là đại lượng khoảng thì kết quả tính chuyển vị nút theo chương trình tại một số nút là trùng với nghiệm giải tích. Trong cả hai trường hợp thì kết quả tính chuyển vị là xấp xỉ với nghiệm giải tích, nhưng kết quả tính lực cắt, mômen mới dừng lại ở mức gần đúng.

- Khi mô đun đàn hồi, diện tích tiết diện, mômen quán tính, tải trọng đều là các giá trị khoảng thì kết quả tính toán các giá trị chuyển vị nút và ứng lực là khoảng rộng hơn so với trường hợp chỉ có tải trọng là đại lượng khoảng.

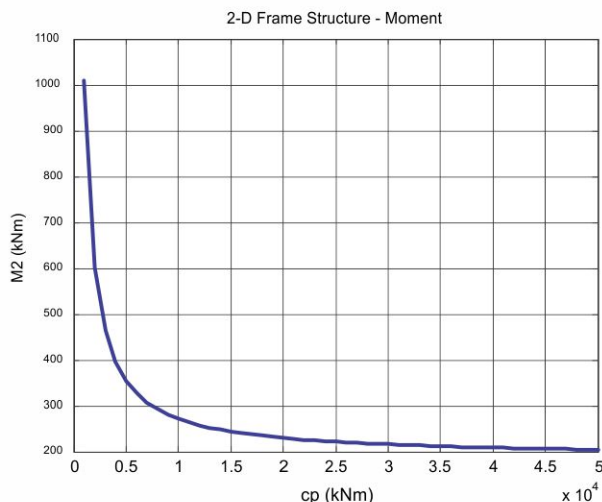
Để xét ảnh hưởng của các liên kết đàn hồi đến sự phân bố nội lực, ta xét khung phẳng trên hình 4 với các tham số  $E$ ,  $A$ ,  $I$ ,  $P$ ,  $q$  là các giá trị điểm trong hai trường hợp khảo sát:

1. Liên kết nút đàn hồi với các giá trị điểm:  $E=2.10^7(kN/m^2)$ ;  $I_1=I_2=12.10^{-5}(m^4)$ ;  $A_1=A_2=0,03(m^2)$ ;  $I_3=15.10^{-5}(m^4)$ ;  $A_3=0,035m^2$ ;  $P=400kN$ ;  $q=50kN/m$ ;  $c_v=40000kN$ ;  $c_\varphi=1000kNm \dots 50000kNm$

2. Liên kết nút đàn hồi với các giá trị điểm như trên nhưng  $c_\varphi$  là giá trị khoảng để lựa chọn khoảng phân tích phù hợp.



Hình 4. Khung siêu tĩnh có liên kết đàn hồi



Hình 5. Sự thay đổi mômen uốn tại nút A

Hình 5 thể hiện sự thay đổi mômen uốn tại nút A của thanh AB khi độ cứng  $c_\phi$  là các giá trị điểm thay đổi từ  $1000 \text{ kNm}$  đến  $50000 \text{ kNm}$ . Bảng 5 thể hiện kết quả tính toán mômen uốn cũng tại nút A của thanh AB với độ cứng  $c_\phi$  là các giá trị khoảng khác nhau. Ta nhận thấy, khi độ cứng liên kết đàn hồi tăng lên thì mômen uốn  $M_A$  tiến dần về kết quả trường hợp nút cứng tuyệt đối. Về cơ bản, khi độ cứng liên kết đàn hồi  $c_\phi \leq 20 EI/L = 12000 \text{ kNm}$ , nội lực trong kết cấu thay đổi rất nhanh, khoảng giá trị độ cứng  $c_\phi$  thay đổi rất nhỏ cũng dẫn đến khoảng kết quả mômen uốn  $M_A$  thay đổi rất rộng. Khi liên kết đàn hồi với độ cứng  $c_\phi \geq 40 EI/L = 24000 \text{ kNm}$ , nội lực trong kết cấu khá gần với trường hợp nút cứng tuyệt đối, khoảng giá trị độ cứng  $c$  thay đổi rất rộng nhưng kết quả khoảng mômen uốn  $M_A$  lại thay đổi khá hẹp. Do vậy, trong tính toán kết cấu cần cân nhắc kể đến ảnh hưởng của liên kết nút đàn hồi có độ cứng nằm trong khoảng  $c_\phi \leq 20 EI/L$ , đặc biệt cần lưu ý đến khoảng xác định của độ cứng liên kết đàn hồi  $c_\phi$  để có khoảng giá trị kết quả phù hợp. Nghĩa là, trong tính toán kết cấu theo phương pháp PTHH khoảng, ta cần lưu ý đến độ nhạy cảm của từng tham số kết cấu để có khoảng kết quả phù hợp.

Bảng 5. Giá trị mômen uốn  $M_A$  với độ cứng  $c_\phi$  là các khoảng giá trị

| Số liệu khoảng $c_\phi$<br>(kNm) | Mômen uốn tại A<br>(kNm) | Số liệu khoảng $c_\phi$<br>(kNm) | Mômen uốn tại A<br>(kNm) |
|----------------------------------|--------------------------|----------------------------------|--------------------------|
| [100, 110]                       | [ 285.3606, 504.2717]    | [200, 210]                       | [ 334.9132, 422.5363]    |
| [300, 310]                       | [ 339.2555, 390.6674]    | [400, 410]                       | [ 335.6810, 370.4162]    |
| [1000, 1010]                     | [ 301.6903, 309.9740]    | [5000, 5100]                     | [ 225.0868, 230.3515]    |
| [10000, 11000]                   | [ 202.1494, 215.5484]    | [12000, 13000]                   | [ 200.9499, 210.4459]    |
| [15000, 16000]                   | [ 199.2950, 205.5088]    | [20000, 21000]                   | [ 197.1589, 200.7400]    |
| [24000, 25000]                   | [ 195.9009, 198.4204]    | [30000, 35000]                   | [ 191.2301, 198.5761]    |
| [50000, 60000]                   | [ 189.3611, 194.5407]    | [100000, 150000]                 | [ 186.9388, 192.1703]    |



## 5. Kết luận

a. Phương pháp khoảng mang lại một cách biểu diễn đơn giản, gọn nhẹ và có hiệu quả tính toán cao đối với các yếu tố không chắc chắn khi chỉ có thông tin về vùng giá trị của đại lượng này mà không gán một cấu trúc xác suất nào cả. Khi tính toán khoảng, cần phải chú ý đến đặc điểm bài toán phụ thuộc là



nguyên nhân cơ bản để dẫn tới kết quả không chính xác, từ đó, phải có cách xử lý thích hợp như tách tham số khoảng, dùng mô hình EBE,... Đồng thời chỉ thực hiện phép tính số học khoảng khi thật cần thiết, càng muộn càng tốt.

b. Đã xây dựng chương trình tính toán kết cấu hệ thanh theo phương pháp PTHH khoảng trong MatLab với các tham số vật liệu, hình học, tải trọng là tham số khoảng. Chương trình sử dụng phép giải lặp Krawczyk để giải hệ phương trình tuyến tính khoảng. Các kết quả nhận được xấp xỉ với nghiệm chính xác và có thể ứng dụng vào thực tế. Kết quả tính cho thấy:

- Khoảng nghiệm tìm được theo phương pháp PTHH khoảng khá gần với nghiệm giải tích, đã cải thiện đáng kể so với khoảng nghiệm tìm được theo sự mở rộng "tự nhiên" của phương pháp PTHH thông thường.

- Mặc dầu kết quả tính chuyển vị nút theo chương trình có sai số so với kết quả giải tích nhưng kết quả tính ứng lực hay ứng suất trong các phần tử theo chương trình là xấp xỉ với nghiệm giải tích. Đó là do trong các bài toán này thì ứng lực không phụ thuộc vào mô đun đàn hồi  $E$  và diện tích tiết diện  $A$ , mômen quán tính  $I$ . Vì vậy, đối với các bài toán này, khi chỉ cần xác định ứng lực mà không cần xác định chuyển vị, ta có thể chọn các tham số  $E$ ,  $A$ ,  $I$  là các giá trị điểm giữa khoảng để việc tính toán đơn giản và nhanh hơn.

- Khi các tham số liên kết, mô đun đàn hồi, diện tích tiết diện, tải trọng đều là các giá trị khoảng thì kết quả tính toán là khoảng rộng hơn so với trường hợp chỉ có tải trọng là đại lượng khoảng.

- Khi tính toán kết cấu theo phương pháp PTHH khoảng, ta cần lưu ý đến độ nhạy cảm của từng tham số kết cấu để có khoảng kết quả phù hợp.

#### **Tài liệu tham khảo**

1. Nguyễn Xuân Hùng (2002), *Tính toán chính xác kết cấu trên máy vi tính. Chương trình ADS 2001*, Nxb KHKT.
2. Trần Văn Liên (2008), "Phân tích kết cấu thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn khoảng", *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, Trường Đại học Xây dựng, số 4/2008, trang 54-62.
3. Trần Văn Liên (2009), "Đại số khoảng và ứng dụng vào phân tích kết cấu thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn khoảng", *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, Trường Đại học Xây dựng, số 5/2009, trang 28-37.
4. Trần Văn Liên (2009), "Một số kết quả phân tích kết cấu hệ thanh có các yếu tố không chắc chắn", *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc Kỷ niệm 30 năm Viện Cơ học và 30 năm Tạp chí Cơ học - Tập 1. Cơ học vật rắn biến dạng*, Hà Nội, ngày 8-9/4/2009, trang 85-95.
5. Phan Xuân Minh, Nguyễn Doãn Phước (2002), *Lý thuyết điều khiển mờ và ứng dụng*, NXB KHKT.
6. Nguyễn Như Phong (2005), *Lý thuyết mờ và ứng dụng*, NXB Khoa học và Kỹ thuật.
7. Phùng Quyết Thắng (2011), *Áp dụng lý thuyết khoảng để xác định phản ứng động của hệ kết cấu có một bậc tự do*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Xây dựng, 11/2011.
8. Andrew Bernat, Vladik Kreinovich, Thomas J McLean and Gennady N Solopchenko (1995), *What are interval computations and how are they related to quality in manufacturing*.
9. Scott Ferson, Roger B. Nelsen, Janos Hajagos,... (2004), *Dependence in probabilistic modeling, Dempster-Shafer theory, and probability bounds analysis*.
10. Gareth I Hargreaves (2002), *"Interval analysis in Matlab"*, A dissertation submitted to the University of Manchester for the degree of Master of science, Dec.
11. Hao Zhang (2005), *Nondeterministic linear static finite element analysis: An Interval Approach*, School of Civil and Env. Engineering Georgia Institute of Technology, Dec.
12. Jens Zemke, *b4m: A free interval arithmetic toolbox for Matlab based on BIAS version 1.02.004 & documentation version 1.00*.
13. R B Kearfott, *Interval computations introduction uses and resources*, University of SouthWestern Louisiana.

14. Vladik Kreinovich & Jan Beck, Hung T. Nguyen, (2005), *Ellipsoids and ellipsoid-shaped fuzzy sets as natural multi-variate generalization of intervals and fuzzy numbers: How to elicit them from users, and how to use them in data processing ?*.
15. Olaf Knöppel, (1999), *PROFIL/BIAS V 2.0*.
16. Rafi L. Muhanna, Robert L. Mullen (2004), *Proceedings of the NSF workshop on reliable engineering computing*, September 15-17.
17. Rafi L. Muhanna & Robert L. Mullen, (2006), *Proceedings of the NSF workshop on reliable engineering computing – Modeling errors and uncertainty in engineering computation*. 20-24/2.
18. Zimmerman, H. J. (1991), *Fuzzy sets theory and its applications*, Kluwer academic.