

LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI CỦA DẦM TIẾT DIỆN CHỮ I CÓ MỘT TRỤC ĐỐI XỨNG CHỊU TẢI TRỌNG NGANG

Bùi Hùng Cường¹

Tóm tắt: Bài báo giới thiệu hai lý thuyết trong phân tích ổn định của dầm chịu tải trọng ngang bất kỳ, đó là: lý thuyết cổ điển và lý thuyết được xây dựng gần đây bởi Tong và Zhang. Bài báo phân tích những điểm giống và khác nhau giữa hai lý thuyết. Dựa trên phân tích đó, bài báo có kiến nghị bổ sung vào biểu thức thế năng toàn phần của lý thuyết cổ điển. Một số ví dụ phân tích ổn định đàn hồi của dầm được thực hiện nhằm chứng minh việc áp dụng biểu thức thế năng toàn phần nói trên vào phương pháp phần tử hữu hạn.

Từ khóa : ổn định dầm, lý thuyết ổn định, thế năng toàn phần, PTHH.

Summary: The paper introduces two theories in the lateral buckling analysis of beams subjected to an arbitrary transversal loading, namely: the classical theory and the new theory developed by Tong and Zhang. The paper analyzes similar and different points between these two theories. Based on this analysis, the paper has a proposition to complement the expression of the total potential energy of the classical theory. Some examples in the elastic lateral buckling analysis of beams are performed to prove the application of the above expression of the total potential energy to the finite element method.

Keywords: lateral buckling of beam, buckling theory, total potential energy, FEM

Nhận ngày 19/09/2012, chỉnh sửa ngày 30/11/2012, chấp nhận đăng ngày 15/12/2012

1. Đặt vấn đề

Lịch sử phát triển lý thuyết ổn định tổng thể của dầm đã được hơn 100 năm. Những tác giả đầu tiên có lẽ là Prandtl và Michell với các nghiên cứu được công bố vào năm 1899 về bài toán ổn định tổng thể của dầm đơn giản có tiết diện chữ nhật hẹp, chịu uốn thuần túy. Tiếp theo, Timoshenko đã thiết lập và giải bài toán ổn định của dầm đơn giản tiết diện chữ I chịu uốn thuần túy vào năm 1905. Timoshenko tiếp tục phát triển lý thuyết ổn định dầm, các kết quả được tập hợp trong sách chuyên khảo được bổ sung và tái bản nhiều lần [1]. Vào những năm 1930, Wagner xây dựng lý thuyết ổn định của dầm tiết diện chữ I có một trục đối xứng và đưa ra công thức tính toán thông số thể hiện mức độ không đối xứng của tiết diện. Năm 1940, Vlasov [2] xây dựng lý thuyết tổng quát tính toán thanh thành mỏng trong đó có lý thuyết ổn định tổng thể của dầm chịu uốn ngang phẳng. Vlasov là tác giả đầu tiên đưa ra khái niệm về xoắn kiểm chế, về tọa độ quạt và mô men quán tính quạt của tiết diện thành mỏng. Bleich [3] sử dụng phương pháp năng lượng trong đó thế năng toàn phần của dầm chịu tải trọng ngang bằng tổng của thế năng biến dạng đàn hồi tuyến tính và công ngoài sinh ra do tải trọng trên các chuyển vị khi dầm bị mất ổn định. Timoshenko và Gere [1] thiết lập các phương trình ổn định khi xem xét cân bằng của một phân tử vô cùng bé kết hợp cân bằng của một đoạn dầm.

Tiếp nối sau các nhà khoa học trên, nhiều tác giả khác đã nghiên cứu mất ổn định tổng thể của dầm trên cả phương diện lý thuyết và thực nghiệm. Anderson và Trahair [4], Attard và Bradford [5] làm các thí nghiệm trên dầm công xôn tiết diện chữ I có một trục đối xứng.

¹TS, Khoa Xây dựng DD&CN. Trường Đại học Xây dựng. E-mail: bhungcuong@gmail.com

Anderson và Trahair [4], Assadi và Roeder [6], Ings và Trahair [7] khảo sát ảnh hưởng của vị trí tải trọng trên tiết diện qua các thí nghiệm trên dầm tiết diện chữ I có hai trục đối xứng. Trahair [8] thiết lập công thức tính biến dạng dọc trục bao gồm thành phần biến dạng tuyến tính và thành phần biến dạng phi tuyến. Từ đó, lý thuyết mất ổn định tổng thể dầm được thiết lập dựa trên thế năng toàn phần bằng tổng của thế năng biến dạng tuyến tính, thế năng biến dạng phi tuyến sinh ra bởi ứng suất pháp dọc trục và công của tải trọng ngoài sinh ra trên chuyển vị bậc hai khi dầm bị mất ổn định. Kitipornchai [9] cũng thiết lập lý thuyết ổn định tổng thể của dầm dựa trên phương pháp năng lượng trong đó thế năng toàn phần bằng tổng của thế năng biến dạng đàn hồi, thế năng biến dạng phi tuyến của ứng suất pháp, thế năng biến dạng phi tuyến của ứng suất tiếp và công của tải trọng ngoài. Kitipornchai [9] chấp nhận gần đúng là ứng suất tiếp phân bố đều trên tiết diện bằng lực cắt chia cho diện tích tiết diện.

1.1 Thế năng toàn phần theo lý thuyết cổ điển

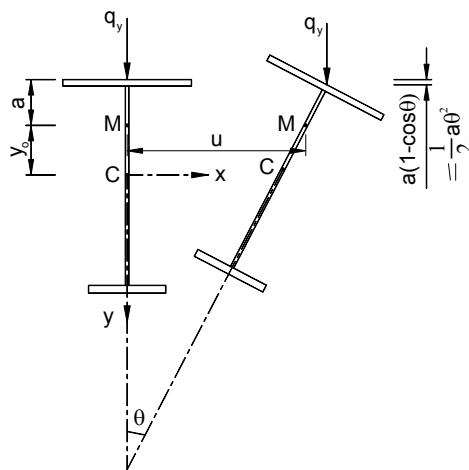
Tuy các tác giả trên thiết lập các công thức với mức độ phức tạp có khác nhau nhưng tựu trung có thể gọi là lý thuyết cổ điển về mất ổn định tổng thể của dầm. Một cách tổng quát, biểu thức thế năng toàn phần trong lý thuyết cổ điển được viết như sau [8]

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 + 2M_x \theta u' \\ - q_y a \theta^2] dz - \sum_i \frac{1}{2} P_{yi} a \theta_i^2 \end{aligned} \quad (1)$$

trong đó: u và θ là chuyển vị ngang và góc xoắn của tiết diện dầm; E và G là mô đun đàn hồi và mô đun đàn hồi trượt của vật liệu; I_y , I_t và I_ω lần lượt là mô men quán tính quanh trục y , mô men quán tính khi xoắn thuần túy và mô men quán tính quật (khi xoắn kiểm chế) của tiết diện dầm; q_y và P_{yi} lần lượt là tải trọng phân bố đều và tải trọng tập trung tại vị trí i trên chiều dài dầm; θ_i là góc xoắn tại tiết diện i có tải trọng tập trung; a là khoảng cách từ tâm cắt của tiết diện đến điểm đặt của tải trọng; M_x là mô men uốn trong dầm; β_x là thông số Wagner thể hiện mức độ không đối xứng của tiết diện dầm quanh trục x

$$\beta_x = \frac{1}{2I_{x_A}} \int (x^2 + y^2) y dA - y_o \quad (2)$$

với y_o là khoảng cách theo trục y từ trọng tâm tiết diện đến tâm cắt của tiết diện (khi tiết diện đối xứng theo cả hai trục $\beta_x=0$);



Hình 1. Chuyển vị của tiết diện dầm khi dầm bị mất ổn định tổng thể

Ba số hạng đầu trong biểu thức (1) lần lượt xét thể năng biến dạng tuyến tính khi uốn quanh trục y , khi xoắn kiềm chế và khi xoắn thuần túy; số hạng thứ tư xét đến hiệu ứng Wagner trong dầm thành mỏng có một trục đối xứng; số hạng thứ năm là công của mô men $M_x\theta$ trên độ cong u'' ($M_x\theta$ là thành phần mô men quanh trục y khi chiếu vectơ mô men M_x lên trục y ở trạng thái mất ổn định); và hai số hạng cuối cùng là công của của lực phân bố đều và các lực tập trung gây ra trên các hiệu ứng bậc hai của chuyển vị khi dầm bị mất ổn định (hình 1).

1.2. Thế năng toàn phần theo lý thuyết của Tong và Zhang

Gần đây, Tong và Zhang [10] xây dựng một lý thuyết mới về mất ổn định tổng thể của dầm dựa trên nguyên lý biến phân và lý thuyết vỏ mỏng. Thế năng toàn phần được thiết lập như sau:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 - 2M_x \theta' u'] \\ + 2Q_y \beta_x \theta \theta' - 2Q_y u' \theta - q_y (a + \beta_x) \theta^2] dz - \sum_i \frac{1}{2} P_{yi} (a + \beta_x) \theta_i^2 \end{aligned} \quad (3)$$

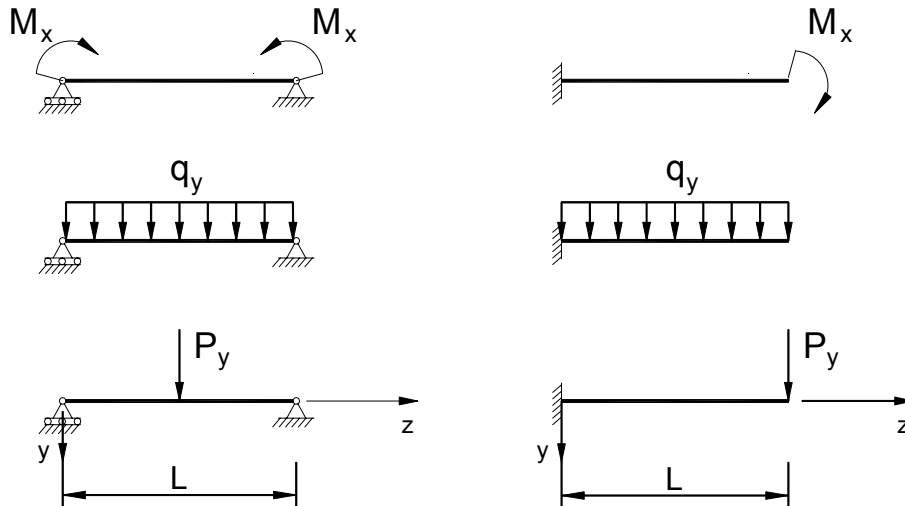
Như vậy, thoát nhìn về mặt hình thức lý thuyết do Tong và Zhang xây dựng khác với lý thuyết cổ điển ở chỗ lý thuyết của Tong và Zhang xét đến ảnh hưởng của lực cắt Q_y và xét đến ảnh hưởng của thông số thể hiện mức độ không đối xứng của tiết diện β_x khi tính công của tải trọng ngang sinh ra lúc dầm bị mất ổn định. Hai lý thuyết còn khác nhau ở số hạng thứ năm

trong biểu thức thế năng toàn phần đó là $\frac{1}{2} \int_0^L -2M_x \theta' u' dz$ và $\frac{1}{2} \int_0^L 2M_x \theta u'' dz$. Khi thiết lập

các công thức (1) và (3), cả hai lý thuyết đều bỏ qua chuyển vị của dầm trong mặt phẳng uốn.

Bài báo đặt ra vấn đề so sánh hai lý thuyết trong một số trường hợp cụ thể hay gặp, từ đó bổ sung thích hợp vào lý thuyết cổ điển để có sự thống nhất với lý thuyết của Tong và Zhang.

2. Dầm đơn giản



Hình 2. Một số trường hợp chịu lực của dầm đơn giản và dầm công xôn

2.1 Dầm đơn giản chịu uốn thuần túy

- Theo lý thuyết cổ điển, từ biểu thức (1) nhận được

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 + 2M_x \theta u''] dz \quad (4)$$

- Theo lý thuyết của Tong and Zhang, từ biểu thức (3) nhận được

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 - 2M_x \theta' u'] dz \quad (5)$$

Lấy tích phân từng phần số hạng thứ năm trong biểu thức (5)

$$-\frac{1}{2} \int_0^L 2M_x \theta' u' dz = -M_x \theta u' \Big|_0^L + \frac{1}{2} \int_0^L 2M_x \theta u'' dz = \frac{1}{2} \int_0^L 2M_x \theta u'' dz \quad (6)$$

công thức (6) được chứng minh do ở hai đầu dầm góc xoắn bằng 0, $\theta_0 = \theta_L = 0$.

Như vậy, lý thuyết của Tong and Zhang hoàn toàn giống lý thuyết cổ điển trong trường hợp này.

2.2 Dầm đơn giản chịu tải trọng phân bố đều

- Theo lý thuyết cổ điển

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 + 2M_x \theta u'' - q_y a \theta^2] dz \quad (7)$$

- Theo lý thuyết của Tong and Zhang

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 - 2M_x \theta' u' + 2Q_y \beta_x \theta \theta' - 2Q_y u' \theta - q_y (a + \beta_x) \theta^2] dz \quad (8)$$

Xét số hạng thứ năm và thứ bảy trong biểu thức (8)

$$\frac{1}{2} \int_0^L (-2M_x \theta' u' - 2Q_y u' \theta) dz = \frac{1}{2} \int_0^L (-2M_x \theta' u' - 2M_x' u' \theta) dz = \frac{1}{2} \int_0^L -2(M_x \theta)' u' dz \quad (9)$$

Biểu thức (8) được viết lại

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 - 2(M_x \theta)' u' + 2Q_y \beta_x \theta \theta' - q_y (a + \beta_x) \theta^2] dz \quad (10)$$

Lấy tích phân từng phần số hạng thứ năm và thứ sáu trong biểu thức (10)

$$-\frac{1}{2} \int_0^L 2(M_x \theta)' u' dz = -(M_x \theta) u' \Big|_0^L + \frac{1}{2} \int_0^L 2(M_x \theta) u'' dz = \frac{1}{2} \int_0^L 2M_x \theta u'' dz \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^L 2Q_y \beta_x \theta \theta' dz = \frac{1}{2} Q_y \beta_x \theta^2 \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_0^L (Q_y \beta_x)' \theta^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^L q_y \beta_x \theta^2 dz \quad (12)$$

Công thức (11) và (12) được chứng minh do ở hai đầu dầm mô men và góc xoắn bằng 0, đồng thời $\beta_x = \text{const}$, $Q'_y = -q_y$.

Vậy biểu thức (10) trở thành

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 - 2M_x \theta u'' - q_y a \theta^2] dz \quad (13)$$

Như vậy, lý thuyết của Tong and Zhang hoàn toàn giống lý thuyết cổ điển trong trường hợp dầm đơn giản chịu tải trọng phân bố đều.

2.3 Dầm đơn giản chịu tải trọng tập trung ở giữa nhịp

- Theo lý thuyết cổ điển:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 + 2M_x \theta u''] dz - \frac{1}{2} P_y a \theta_{\frac{L}{2}}^2 \quad (14)$$

- Theo lý thuyết của Tong và Zhang, và từ (9):

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 - 2(M_x \theta)' u' + 2Q_y \beta_x \theta \theta'] dz - \frac{1}{2} P_y (a + \beta_x) \theta_{\frac{L}{2}}^2 \quad (15)$$

Xem như lực tập trung P_y phân bố đều trên một đoạn dầm 2η rất nhỏ ở giữa nhịp

$$q_\eta = \frac{P_y}{2\eta}. \text{ Xét}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L 2Q_y \beta_x \theta \theta' dz &= \frac{1}{2} Q_y \beta_x \theta^2 \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_0^L (Q_y \beta_x)' \theta^2 dz = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{L}{2}-\eta} (Q_y \beta_x)' \theta^2 dz \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\frac{L}{2}+\eta}^L (Q_y \beta_x)' \theta^2 dz - \frac{1}{2} \int_{\frac{L}{2}-\eta}^{\frac{L}{2}+\eta} (Q_y \beta_x)' \theta^2 dz = \frac{1}{2} \int_{\frac{L}{2}-\eta}^{\frac{L}{2}+\eta} q_\eta \beta_x \theta_{\frac{L}{2}}^2 dz = \frac{1}{2} P_y \beta_x \theta_{\frac{L}{2}}^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Công thức (16) được chứng minh do trên đoạn dầm có lực cắt phân bố đều thì $Q'_y = 0$.

Theo (11) và (16), biểu thức (15) biến đổi thành:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 - 2M_x \theta u''] dz - \frac{1}{2} P_y a \theta_{\frac{L}{2}}^2 \quad (17)$$

Như vậy, lý thuyết của Tong and Zhang hoàn toàn giống lý thuyết cổ điển khi dầm chịu tải trọng tập trung. Chứng minh tương tự khi trên dầm xuất hiện nhiều lực tập trung tại các vị trí khác nhau, ta nhận được biểu thức thế năng toàn phần cho hai lý thuyết như sau:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 + 2M_x \theta u''] dz - \frac{1}{2} \sum_i P_{yi} a \theta_i^2 \quad (18)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 - 2(M_x \theta)' u'] dz - \frac{1}{2} \sum_i P_{yi} a \theta_i^2 \quad (19)$$

3. Dầm công xôn

3.1 Dầm công xôn chịu mô men uốn ở đầu tự do

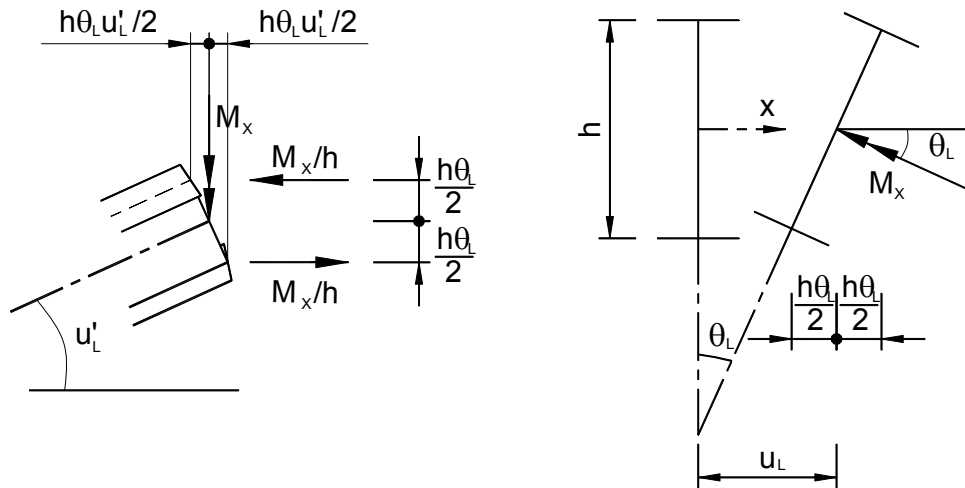
- Theo lý thuyết cổ điển, trong trường hợp này thế năng toàn phần được viết

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 + 2M_x \theta u''] dz \quad (20)$$

- Theo lý thuyết của Tong và Zhang

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 - 2M_x \theta' u'] dz \quad (21)$$

Như vậy, lý thuyết cổ điển và lý thuyết của Tong và Zhang khác nhau ở số hạng thứ năm. Trước Tong và Zhang, Trahair [8] đã đề nghị bổ sung vào thế năng toàn phần của lý thuyết cổ điển phần công do mô men uốn ở đầu tự do sinh ra trên chuyển vị bậc hai khi dầm công xôn bị mất ổn định. Để thuận lợi cho trình bày, xét trường hợp dầm công xôn tiết diện chữ I có hai trục đối xứng. Phân tích mô men ở đầu tự do của công xôn thành ngẫu lực như hình 3.



Hình 3. Chuyển vị bậc hai ở đầu tự do khi dầm công xôn bị mất ổn định

Phần công do ngẫu lực sinh ra trên chuyển vị bậc hai khi dầm công xôn bị mất ổn định là:

$$2 \frac{M_x}{h} \frac{h \theta_L u_L'}{2} = M_x \theta_L u_L'$$

Thế năng toàn phần theo lý thuyết cổ điển đã được bổ sung phần công ngoài do mô men ở đầu tự do được tính theo biểu thức:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 + 2M_x \theta u''] dz - M_x \theta_L u_L' \quad (22)$$

Lấy tích phân từng phần như đã thực hiện trong công thức (6)

$$-\frac{1}{2} \int_0^L 2M_x \theta' u' dz = -M_x \theta u' \Big|_0^L + \frac{1}{2} \int_0^L 2M_x \theta u'' dz = -M_x \theta_L u_L' + \frac{1}{2} \int_0^L 2M_x \theta u'' dz \quad (23)$$

Công thức (23) được chứng minh do tại ngàm ($z=0$) thì $\theta_0=u'_0=0$.

Thế năng toàn phần theo lý thuyết cổ điển được bổ sung bởi phần công ngoài sinh ra do mô men tập trung ở đầu tự do khi dầm công xôn bị mất ổn định hoàn toàn trùng với thế năng toàn phần theo lý thuyết của Tong và Zhang.

Vấn đề đặt ra là cần có biểu thức tổng quát cho trường hợp khi có mô men phân bố đều hay nhiều mô men tập trung tại các vị trí khác nhau trên dầm. Tương tự như cách bổ sung công sinh ra do mô men ngoài mà Trahair [8] đã thực hiện, ta viết được biểu thức thế năng toàn phần một cách tổng quát hơn cho lý thuyết cổ điển như sau

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 + 2M_x \theta u''] \\ - q_y a \theta^2 - 2m_x \theta u' dz - \sum_i \frac{1}{2} P_{yi} a \theta_i^2 - \sum_i M_{xi} \theta_i u_i' \end{aligned} \quad (24)$$

Trong đó: m_x là mô men phân bố đều trên dầm; M_{xi} là mô men tập trung tại vị trí i trên dầm; θ_i và u_i' lần lượt là góc xoắn và góc xoay quanh trục y tại tiết diện i .

3.2 Dầm công xôn chịu tải trọng phân bố đều

Trong trường hợp này, các công thức (11) và (12) vẫn được chứng minh do ở đầu ngàm $\theta_0=u'_0=0$, còn ở đầu tự do $Q_y=0$. Do vậy, biểu thức (13) vẫn có giá trị và lý thuyết Tong và Zhang hoàn toàn giống lý thuyết cổ điển.

3.3 Dầm công xôn chịu lực tập trung ở đầu tự do

- Theo lý thuyết cổ điển

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 + 2M_x \theta u''] dz \\ - \frac{1}{2} P_y a \theta_L^2 \end{aligned} \quad (25)$$

- Theo lý thuyết của Tong và Zhang

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 - 2(M_x \theta)' u' \\ + 2Q_y \beta_x \theta \theta'] dz - \frac{1}{2} P_y (a + \beta_x) \theta_L^2 \end{aligned} \quad (26)$$

Bởi vì

$$\frac{1}{2} \int_0^L 2Q_y \beta_x \theta \theta' dz = \frac{1}{2} Q_y \beta_x \theta^2 \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_0^L (Q_y \beta_x)' \theta^2 dz = \frac{1}{2} P_y \beta_x \theta_L^2 \quad (27)$$

Công thức (27) được chứng minh do trên dầm công xôn chịu lực tập trung ở đầu tự do, lực cắt không đổi nên $Q_y' = 0$ và tại ngàm góc xoắn bằng không, $\theta_0 = 0$.

Tại ngàm góc xoắn và góc xoay quanh trục y bằng không, $\theta_0 = u'_0 = 0$ và tại đầu tự do có mô men uốn bằng không nên công thức (11) được chứng minh trong trường hợp này.

Như vậy, biểu thức (26) trở thành:

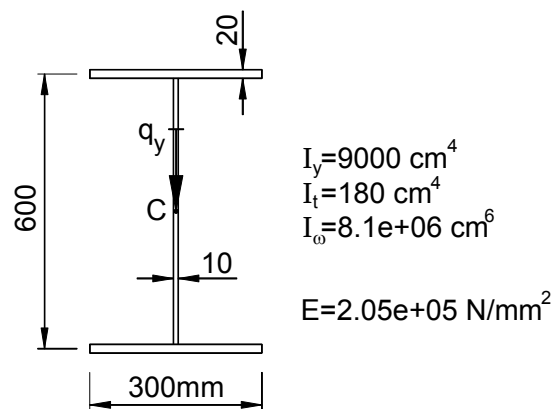
$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\theta'')^2 + GI_t (\theta')^2 + 2M_x \beta_x (\theta')^2 + 2M_x \theta u''] dz \\ - \frac{1}{2} P_y a \theta_L^2 \end{aligned} \quad (28)$$

Lý thuyết Tong và Zhang hoàn toàn giống lý thuyết cổ điển trong trường hợp dầm công xôn chịu tải tập trung tại đầu tự do.

4. Ví dụ tính toán

Tác giả đã viết một chương trình sử dụng phần tử hữu hạn (PTHH) mô hình chuyển vị được viết bằng ngôn ngữ Matlab. Đầu tiên, PTHH được xây dựng dựa trên biểu thức thế năng toàn phần của dầm chịu uốn ngang phẳng nhằm xác định mômen uốn trong dầm. Sau đó, biểu thức thế năng toàn phần (24) trong phân tích ổn định đàn hồi tuyến tính được áp dụng vào PTHH đó để xác định trị riêng và vectơ riêng. Có trị riêng và vectơ riêng, chương trình sẽ xác định lực tới hạn và cho hình ảnh mất ổn định tổng thể của dầm. Dựa trên bài báo trước đây của tác giả [11], các đặc trưng hình học của tiết diện chữ I có một trục đối xứng xuất hiện trong biểu thức (24) cũng được lập trình tính toán ở trong chương trình.

4.1 Ổn định tổng thể của dầm tiết diện chữ I có hai trục đối xứng



Hình 4. Tiết diện chữ I có hai trục đối xứng

Xét dầm đơn giản và dầm công xôn có cùng tiết diện chữ I với hai trục đối xứng như hình 4. Dầm đơn giản có nhịp là 10m, dầm công xôn có nhịp là 5m. Tải trọng tác dụng đặt tại trọng tâm tiết diện.

- Trường hợp dầm đơn giản: theo Trahair [8] và Eurocode 3 [12], công thức tính mômen tới hạn của dầm đơn giản nhịp L, chịu uốn ngang phẳng được viết như sau:

$$M_{cr} = \alpha_m M_{ocr} \quad (29)$$

trong đó, M_{ocr} là mômen tới hạn trong trường hợp dầm chịu mômen uốn thuần túy [1].

$$M_{ocr} = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \left(GI_t + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} \right)} \quad (30)$$

α_m là hệ số phụ thuộc dạng tải trọng tác dụng lên dầm.

- Trường hợp dầm công xôn: các công thức tính mômen tới hạn được thiết lập riêng cho từng trường hợp tải trọng.

+ Khi dầm công xôn chịu mômen uốn tập trung ở đầu tự do:

$$M_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_y}{(2L)^2} \left(GI_t + \frac{\pi^2 EI_\omega}{(2L)^2} \right)} \quad (31)$$

+ Khi dầm công xôn chịu tải trọng phân bố đều:

$$M_{cr} = \frac{\sqrt{EI_y GI_t}}{L} \left[23.2565 + 8.7108 \left(\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI_\omega}{GI_t}} - 2 \right) \right] \quad (32)$$

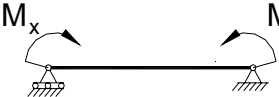
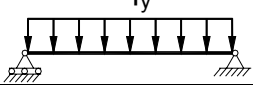
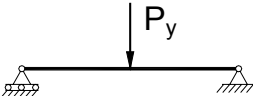
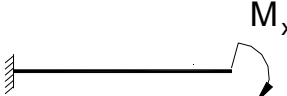
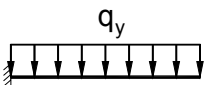
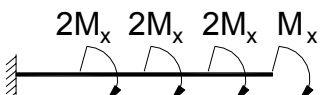
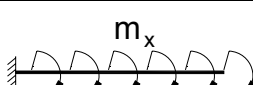
+ Khi dầm công xôn chịu tải trọng tập trung ở đầu tự do:

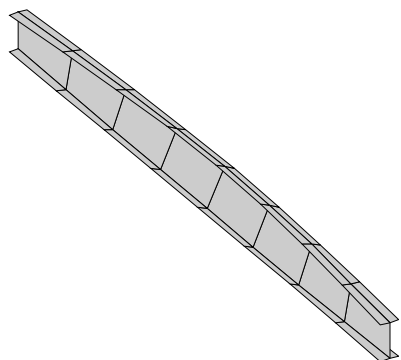
$$M_{cr} = \frac{\sqrt{EI_y GI_t}}{L} \left[11 + 3.5234 \left(\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI_\omega}{GI_t}} - 2 \right) \right] \quad (33)$$

Các kết quả tính toán theo phương pháp PTHH và theo các công thức (29)-(33) được thể hiện trong Bảng 1. Ta nhận thấy rằng sai số hầu hết là rất nhỏ ($\leq 1.3\%$), trừ trường hợp dầm công xôn chịu tải trọng tập trung ở đầu tự do có sai số là 3.2%, điều đó có thể giải thích do công thức (33) cũng là công thức gần đúng. Từ Bảng 1, ta nhận thấy dầm đơn giản nhịp L và dầm công xôn nhịp $\frac{L}{2}$ cùng chịu mômen uốn thuần túy có mômen tới hạn gần bằng nhau.

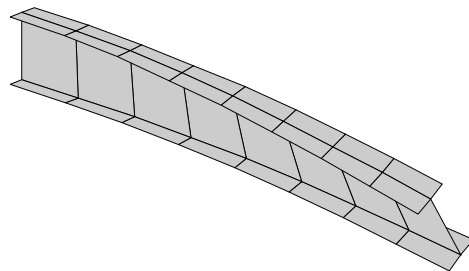
Trong Bảng 1 còn có kết quả mômen tới hạn của trường hợp dầm công xôn chịu các mômen tập trung và chịu mômen phân bố đều, do không có kết quả được công bố của các tác giả khác nên không có sai số so sánh. Tuy nhiên, ta thấy khi tăng số lượng mômen tập trung trên dầm thì kết quả mômen tới hạn sẽ tiệm cận đến trường hợp dầm công xôn chịu mômen phân bố đều. Mômen tới hạn trong trường hợp mômen phân bố đều có kết quả nhỏ hơn trường hợp dầm công xôn chịu tải trọng tập trung ở đầu tự do mặc dù biểu đồ mômen nội lực của hai trường hợp này có dạng phân bố tuyến tính giống nhau. Điều này có thể giải thích là do ảnh hưởng của phản công ngoại lực do mômen phân bố đều sinh ra trên các chuyển vị bậc 2 khi dầm công xôn bị mất ổn định như đã thể hiện ở số hạng thứ 7 trong biểu thức thế năng toàn phần (24). Hình 5 và hình 6 minh họa cho hình ảnh mất ổn định của dầm đơn giản chịu tải trọng phân bố đều và dầm công xôn chịu lực tập trung ở đầu tự do.

Bảng 1. Mômen tới hạn của dầm đơn giản và dầm công xôn chịu uốn ngang phẳng

Sơ đồ dầm	Sơ đồ tải trọng	α_m	$M_{cr} -$ CT (29)÷(33) (Tm)	$M_{cr} -$ PTHH (Tm)	Sai số
Dầm đơn giản		1.0	74.623	74.634	0.015%
		1.13	84.324	85.427	1.3%
		1.36	101.49	101.69	0.2%
Dầm công xôn			74.623	74.825	0.27%
			794.72	795.34	0.08%
			373.01	384.96	3.2%
			-	157.37	-
			-	198.28	-
	Có 8 mô men tập trung		-	216.39	-
			-	231.20	-

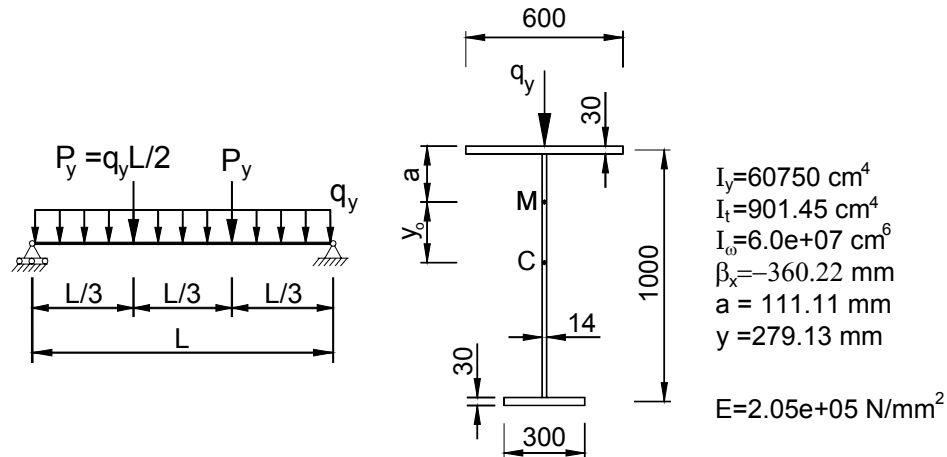


Hình 5. Dầm đơn giản chịu tải trọng phân bố đều



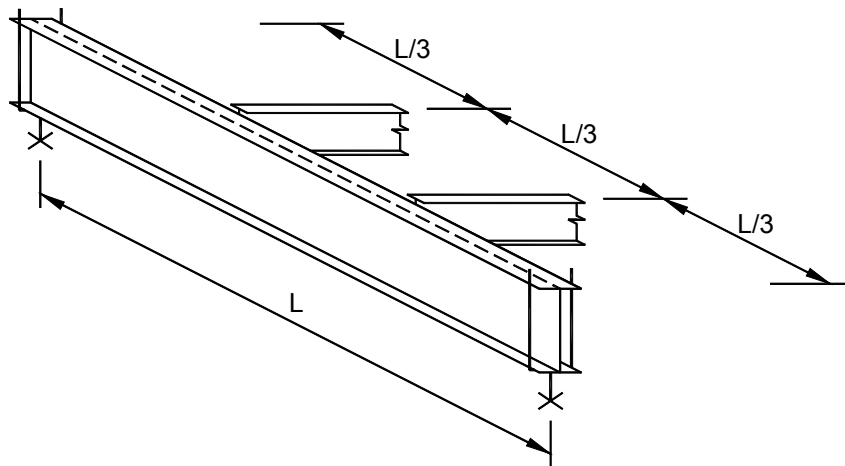
Hình 6. Dầm công xôn chịu lực tập trung ở đầu tự do

4.2 Ổn định tổng thể của dầm tiết diện chữ I có một trục đối xứng



Hình 7. Tiết diện chữ I có một trục đối xứng.

Xét dầm chữ I có một trục đối xứng và chịu tải trọng như hình 7. Dầm có nhịp $L = 24\text{m}$. Ta xét hai sơ đồ kết cấu của dầm: sơ đồ thứ nhất, dầm liên kết khớp ở hai đầu (liên kết khớp đối với cả chuyển vị uốn và chuyển vị xoắn) và sơ đồ thứ hai, dầm liên kết khớp ở hai đầu và có hai dầm phụ liên kết với dầm chính ở các vị trí $1/3$ chiều dài dầm như thể hiện trên hình 8.



Hình 8. Sơ đồ 2 - Dầm phụ liên kết bằng mặt vào dầm chính

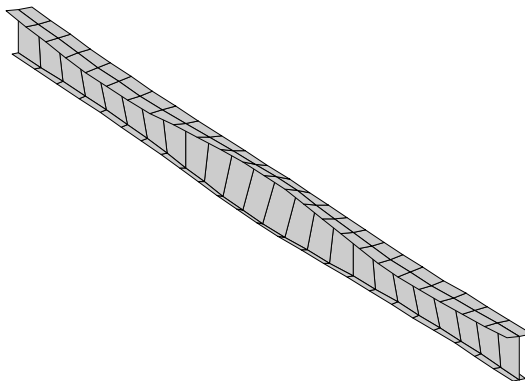
- Theo sơ đồ 1: phân tích ổn định dầm bằng chương trình PTHH đã thiết lập với ba trường hợp đặt vị trí của tải trọng trên tiết diện dầm.

- + Trường hợp tải trọng đặt tại cánh trên của tiết diện: $M_{cr} = 107.52\text{Tm}$
- + Trường hợp tải trọng đặt tại tâm cắt của tiết diện: $M_{cr} = 115.83\text{Tm}$
- + Trường hợp tải trọng đặt tại cánh dưới của tiết diện: $M_{cr} = 207.62\text{Tm}$

Ta nhận thấy ảnh hưởng của vị trí đặt tải trên tiết diện dầm đến mô men tới hạn của dầm là rất rõ ràng. Khi tải trọng đặt tại cánh trên của dầm sẽ có xu hướng làm tăng nguy cơ mất ổn định do có mô men xoắn phụ thêm do tải trọng gây ra khi dầm bị mất ổn định. Còn khi tải trọng đặt ở cánh dưới, mô men xoắn phụ sẽ có chiều ngược lại với chiều xoắn mất ổn định nên làm giảm nguy cơ mất ổn định. Ảnh hưởng của vị trí đặt tải trọng trên tiết diện dầm thể hiện qua các số hạng 6 và 8 trong biểu thức (24).

- Theo sơ đồ 2: khi hai dầm phụ liên kết bằng mặt vào dầm chính như hình 8. Ta xem rằng dầm phụ ngăn cản chuyển vị thẳng theo phương dọc trục dầm phụ và chuyển vị xoắn của tiết diện dầm chính tại vị trí liên kết. Tải trọng được đặt tại cánh trên của dầm chính. Mô men tới hạn trong trường hợp này được là: $M_{cr} = 402.02 \text{ Tm}$. So với sơ đồ 1, mô men tới hạn tăng lên $\frac{402.02}{107.52} = 3.74$ lần. Hình ảnh mất ổn định được thể hiện ở Hình 9, ta nhận thấy dầm bị mất ổn

định ở đoạn 1/3 dầm giữa nhịp nơi có mômen nội lực lớn còn các đoạn 1/3 dầm ở hai đầu dầm nơi có mômen bé không bị mất ổn định có tác dụng làm tăng khả năng ổn định của dầm.



Hình 9. Mất ổn định tổng thể dầm - Sơ đồ 2

5. Kết luận

Lý thuyết ổn định tổng thể của dầm được đề nghị bởi Tong và Zhang trùng với lý thuyết cổ điển trong đa số các trường hợp. Hai lý thuyết khác nhau khi xét trường hợp dầm công xôn chịu mô men tập trung ở đầu tự do. Tuy nhiên, khi bổ sung phần công sinh ra do mô men tập trung trên chuyển vị bậc hai khi dầm bị mất ổn định vào biểu thức thế năng toàn phần của lý thuyết cổ điển như Trahair [8] đề nghị thì lý thuyết cổ điển sẽ giống lý thuyết của Tong và Zhang. Dựa trên đề nghị của Trahair, chúng tôi kiến nghị biểu thức (24) tổng quát hơn của thế năng toàn phần theo lý thuyết cổ điển, xét đến trường hợp trên dầm có mô men uốn phân bố đều và nhiều mô men tập trung. Tác giả đã áp dụng biểu thức thế năng toàn phần đã trình bày vào phương pháp phần tử hữu hạn để giải bài toán ổn định tổng thể của dầm. Các ví dụ cụ thể được thực hiện đã chứng minh độ tin cậy của biểu thức (24). Dựa trên biểu thức thế năng toàn phần có thể thiết lập được PTHH giải bài toán ổn định tổng thể của dầm với nhiều dạng tải trọng khác nhau có xét đến ảnh hưởng của vị trí đặt tải trọng trên tiết diện dầm.

Tài liệu tham khảo

1. Timoshenko S.P. and Gere J.G (1961), *Theory of elastic stability*, 2nd ed. McGraw-Hill.
3. Vlasov V.Z (1961) *Thin-walled elastic beams*. Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem,
3. Bleich F. (1952), *Buckling strength of metal structures*. McGraw-Hill Book Company, .
4. Anderson J.M. and Trahair N.S. "Stability of mono-symmetric beams and cantilever", *Journal of Structural Division*, ASCE 1972; 98 (ST1): 269-286.
5. Attard M.M. and Bradford M.A, (1990), "Bifurcation experiments on mono-symmetric cantilevers", 12th *Australian Conference On Mechanics of Structures and Material*, p. 207-213.

6. Assadi M. and Roeder C.W, (1985), "Instability of monosymmetric I-beams and cantilevers", *J. Struct. Mech ASCE* ; 111: 1440-1455.
7. Ings N.L. and Trahair N.S. (1987), "Beam and column buckling under directed loading", *Journal of Structural Engineering ASCE* ; 113(6): 1251-1263.
8. Trahair N.S. (1993), *Flexural-torsional buckling of structures*. London: E&FN SPON.
9. Kitipornchai S. and Chan S.L (1988), *Stability and nonlinear finite element analysis of thin-walled structures*. In: *Finite element applications to thin-walled structures*, edited by John W. Bull. Elsevier applied science.
10. Zhang L. and Tong G.S (2004), "Flexural-torsional buckling of thin-walled beam members based on shell buckling theory", *Thin-walled Structures*; 42(12): 1665-1687.
11. Bùi Hùng Cường (2010), "Tính toán các đặc trưng hình học của tiết diện thanh thành mỏng hở", *Tạp chí Khoa học công nghệ Xây dựng*, trường Đại học Xây dựng, số 8: 16-28.
12. Bourrier, P. et Brozzetti (1996), *J. Construction métallique et mixte acier-béton*. Partie 1: Calcul et dimensionnement selon les Eurocodes 3 et 4, Eyrolles.