



## SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA ỐNG COMPOSITE

Nguyễn Việt Hà<sup>1\*</sup>, Phạm Tiến Đạt<sup>2</sup>, Nguyễn Trường Thanh<sup>3</sup>

**Tóm tắt:** Bài báo sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích dao động riêng của ống composite lớp, dựa trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Phần tử vỏ suy biến (degenerated shell element) 8 nút, mỗi nút 5 bậc tự do được sử dụng để mô hình hoá ống trụ. Độ tin cậy của chương trình được kiểm chứng với phần mềm Ansys. Ảnh hưởng của các tham số hình học được khảo sát.

**Từ khóa:** Ống Composite; phần tử vỏ suy biến; phần tử hữu hạn; tần số dao động riêng.

**Specific vibration analysis of a composite tube by finite element method**

**Abstract:** This paper presents an analysis of specific vibration of a composite tube using FEM based on first order shear deformation theory. A 8-node degenerated shell element with 5 degrees of freedom is used for the modeling. Reliability of the written program is verified with the ANSYS software. The influence of geometric parameters is investigated.

**Keywords:** Composite tube; degenerated shell element; finite element; free vibration frequency.

Nhận ngày 10/5/2017; sửa xong 7/6/2017; chấp nhận đăng 23/6/2017  
Received: May 10, 2017; revised: June 7, 2017; accepted: June 23, 2017

### 1. Mở đầu

Kết cấu vỏ composite lớp nói chung và ống composite nói riêng được sử dụng ngày càng nhiều trong các lĩnh vực như công nghiệp hàng không, công nghiệp tàu thủy, cơ khí, xây dựng, ... Việc nghiên cứu tính toán kết cấu ống composite lớp chịu tác dụng của các dạng tải trọng khác nhau như: tải trọng sóng xung kích, tải trọng bên trong, tải trọng di động... đang được nhiều nhà khoa học trong nước cũng như thế giới quan tâm nghiên cứu. Việc xác định trường chuyển vị, ứng suất, biến dạng cũng như các đặc trưng dao động của ống composite lớp là bài toán quan trọng để từ đó đánh giá được độ bền, độ ổn định của kết cấu.

Trong bài báo tác giả sử dụng phần tử vỏ đẳng tham số ba chiều suy biến (3D degenerated shell element) để mô hình hoá kết cấu ống composite lớp. Phần tử vỏ suy biến lần đầu tiên được đề xuất bởi Ahmad [1], loại phần tử này được tạo ra bằng cách đưa phần tử khối 3D về phần tử vỏ 2D bằng cách loại bỏ các nút trung gian theo phương chiều dày. Tiếp cận này là không phụ thuộc vào các lý thuyết vỏ cụ thể, sử dụng để mô hình phần tử vỏ tổng quát trong phân tích phi tuyến hình học và vật liệu. Phần tử vỏ suy biến 3D đã được Chung L.L. và Chu R.C. [2] sử dụng để khảo sát bài toán ổn định động của vỏ composite lớp. Patel, Datta và Sheikh [3] đã sử dụng phần tử vỏ suy biến đẳng tham số 8 nút để mô hình mảnh vỏ trong phân tích ổn định và mất ổn định của mảnh vỏ. Tác giả Eugerino O. [4] sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn với phần tử vỏ suy biến 8 nút để phân tích các cấu trúc vỏ mỏng và vỏ composite lớp. Các tác giả Trịnh Anh Tuấn, Trần Hữu Quốc và Trần Minh Tú [5] sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn với phần tử vỏ suy biến 8 nút để phân tích tĩnh và dao động riêng của panel trụ composite lớp có gân gia cường.

### 2. Mô hình phần tử hữu hạn

#### 2.1 Phần tử vỏ

Xét phần tử vỏ suy biến 8 nút từ phần tử vỏ 3D như Hình 1. Hệ trục tọa độ tổng thể là  $x, y, z$ , hệ trục tọa độ phần tử là  $x, y, z$ . Hệ trục tọa độ tự nhiên phần tử  $\zeta, \eta$ , trong mặt trung bình và  $\zeta$  là trục hướng dọc theo phương chiều dày và vuông góc với mặt trung bình. Các hàm dạng của phần tử đẳng tham số 8 nút trong hệ trục  $(\zeta, \eta)$  có dạng sau:

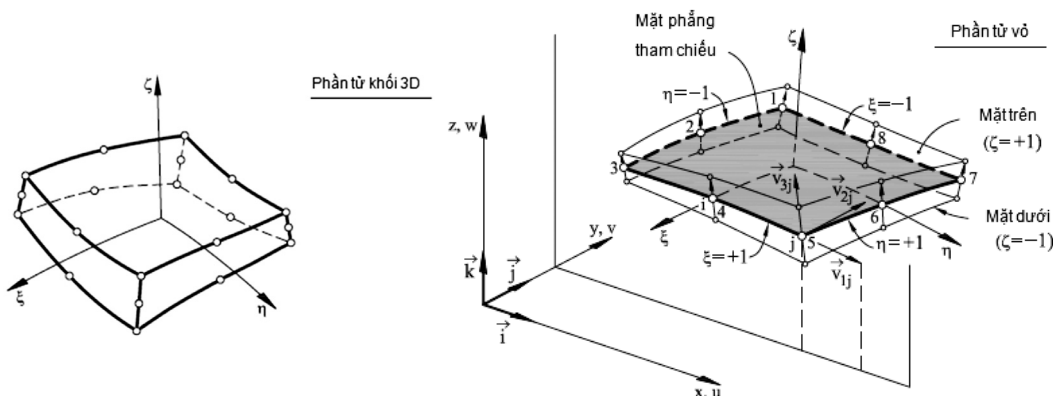
<sup>1</sup>ThS, Học viện Kỹ thuật quân sự.

<sup>2</sup>PGS.TS, Học viện Kỹ thuật quân sự

<sup>3</sup>ThS, Viện Tên lửa - Viện Khoa học và Công nghệ quân sự

\*Tác giả chính. E-mail: nguyenvietha12121980@gmail.com.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) & N_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\
 N_2 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta) & N_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\
 N_3 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) & N_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\
 N_4 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)
 \end{aligned} \tag{1}$$



**Hình 1.** Chuyển đổi phần tử khối 20 nút thành phần tử vỏ suy biến 8 nút.  
Hệ tọa độ cong, hệ tọa độ nút và hệ tọa độ tổng thể

### 2.2 Trường chuyển vị

Véc tơ chuyển vị tại điểm bất kỳ thuộc phần tử vỏ có thể được biểu diễn qua ba thành phần chuyển vị  $(u_i, v_i, w_i)$  và hai thành phần góc xoay  $(\theta_{1i}, \theta_{2i})$  tại các nút ở mặt trung bình như sau [4]:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^8 N_i \left[ u_{0i} - \bar{z}_i [v_{1i}, v_{2i}] \begin{Bmatrix} \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \end{Bmatrix} \right] = \sum_{i=1}^8 N_i \mathbf{a}_i^{(e)} \tag{2}$$

trong đó:  $\mathbf{a}_i^{(e)} = [u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \theta_{1i}, \theta_{2i}]^T$ ;  $N_i = [I_3, -\bar{z}_i C_i]$ ;  $I_3$  là ma trận đơn vị;  $C_i = [v_{1i}, v_{2i}]$  là véc tơ đơn vị.

### 2.3 Trường biến dạng

Các thành phần biến dạng đối với hệ trục tọa độ tổng thể được biểu diễn qua chuyển vị như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^8 B_i \mathbf{a}_i^{(e)} = \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} \tag{3}$$

trong đó:  $\mathbf{a}^{(e)}$  là véc tơ chuyển vị nút của phần tử;  $\mathbf{B}$  là ma trận biến dạng tổng thể,  $\mathbf{B} = [B_1, B_2, \dots, B_8]$ ;  $B_i$  là ma trận biến dạng, được biểu diễn như sau:

$$B_i = \begin{bmatrix} N_i^1 & 0 & 0 & (G_i^1)_{11} & (G_i^1)_{12} \\ 0 & N_i^2 & 0 & (G_i^2)_{21} & (G_i^2)_{22} \\ 0 & 0 & N_i^3 & (G_i^3)_{31} & (G_i^3)_{32} \\ N_i^2 & N_i^1 & 0 & [(G_i^2)_{11} + (G_i^1)_{21}] & (G_i^2)_{12} + (G_i^1)_{22} \\ N_i^3 & 0 & N_i^1 & (G_i^3)_{11} + (G_i^1)_{31} & (G_i^3)_{12} + (G_i^1)_{32} \\ 0 & N_i^3 & N_i^2 & (G_i^3)_{21} + (G_i^2)_{31} & (G_i^3)_{22} + (G_i^2)_{32} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Với  $i = 1 \div 8$  (Từ nút 1 đến nút 8 của phần tử) và  $j = 1 \div 3$  (tương ứng theo các trục  $x, y, z$ ). Ma trận các hệ số được cho như sau:

$$N_i^j = N_{i1}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + N_{i2}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}; \quad G_i^j = -\frac{t_i}{2} J_{j3}^{-1} N_i + \bar{z}_i N_i^j C_i \tag{5}$$

trong đó:  $J_{ij}^{-1}$  là ma trận nghịch đảo phần tử  $ij$  của  $\mathbf{J}^{(e)}$ .



$$J^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Véc tơ biến dạng phần tử  $\varepsilon'$  quan hệ với véc tơ biến dạng tổng thể  $\varepsilon$  như sau:

$$\varepsilon' = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = Q \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = Q\varepsilon \quad (7)$$

trong đó: Q là ma trận biến đổi biến dạng:

$$Q = \begin{bmatrix} (l^x)^2 & (l^y)^2 & (l^z)^2 & l^x l^y & l^x l^z & l^y l^z \\ (m^x)^2 & (m^y)^2 & (m^z)^2 & m^x m^y & m^x m^z & m^y m^z \\ 2l^x m^x & 2l^y m^y & 2l^z m^z & l^x m^y + l^y m^x & l^x m^z + l^z m^x & l^y m^z + l^z m^y \\ 2l^x n^x & 2l^y n^y & 2l^z n^z & l^x n^y + l^y n^x & l^x n^z + l^z n^x & l^y n^z + l^z n^y \\ 2m^x n^x & 2m^y n^y & 2m^z n^z & m^x n^y + m^y n^x & m^x n^z + m^z n^x & m^y n^z + m^z n^y \end{bmatrix} \quad (8)$$

trong đó:  $l^x, l^y, l^z, m^x, m^y, m^z, n^x, n^y, n^z$  là các cosin chỉ phương tương ứng với từng trục giữa hệ trục tọa độ tổng thể và hệ trục tọa độ địa phương.

#### 2.4 Trường ứng suất và phương trình quan hệ

Biểu thức quan hệ ứng suất và biến dạng tại mỗi điểm của mỗi lớp vật liệu được viết trong hệ trục thẳng 1,2,3 của hệ trục tọa độ địa phương [4]:

$$\sigma_I = D_I \varepsilon_I \quad (9)$$

trong đó:

$$\sigma_I = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}; \quad \varepsilon_I = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \quad \text{và} \quad D_I = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ma trận  $D_I$  được xác định rõ trong [4]. Chuyển đổi ma trận  $D_I$  sang hệ trục tọa độ địa phương  $x', y', z'$  ta được:

$$D' = \begin{bmatrix} D'_p & 0 \\ 0 & D'_s \end{bmatrix} \quad (11)$$

trong đó,  $D'_p = T_1^T D_I T_1$  và  $D'_s = T_2^T D_I T_2$  với  $T_1, T_2$  được xác định theo [4]. (12)

#### 2.5 Các phương trình phần tử hữu hạn của bài toán dao động riêng

Phần tử vỏ của ống được mô hình bằng phần tử vỏ suy biến tứ giác 8 nút, mỗi nút 5 bậc tự do.

Ma trận độ cứng phần tử được biểu diễn như sau:

$$[K_e] = \int_{V_e} [B]^T [Q]^T [D'] [B] dx dy dz = \int_{V_e} [B]^T [Q]^T [D'] [B] [J] d\xi d\eta d\zeta \quad (13)$$

Tích phân phương trình (13) được chia nhỏ ra tính qua mỗi lớp bằng cách thay biến  $\zeta$  bằng  $\zeta_l$ , trong mỗi lớp thứ  $l$ ,  $\zeta_l$  chạy từ  $-1 \div +1$  (Hình 2). Việc đổi biến  $\zeta$  thành  $\zeta_l$  theo phương trình quan hệ sau:

$$\zeta = -1 + \frac{1}{t} \left[ -t_l(1 - \zeta_l) + 2 \sum_{j=1}^l t_j \right] \quad \text{và} \quad d\zeta = \left( \frac{t_l}{t} \right) d\zeta_l \quad (14)$$

Từ (13) ta có được ma trận độ cứng phần tử như sau:

$$[K_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{l=1}^m \int_{-1}^1 [B]^T [Q]^T [D']_l [B] |J| \frac{t_l}{t} d\zeta_l d\xi d\eta \quad (15)$$

Ma trận khối lượng phần tử có dạng:

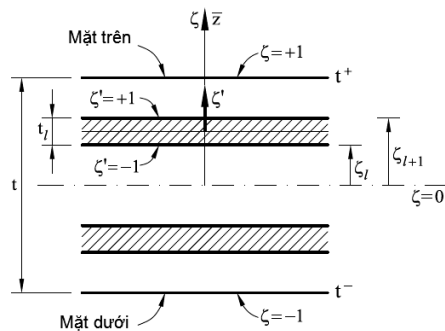
$$[M_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{l=1}^m \int_{-1}^1 \rho^l [\bar{N}]^T [\bar{N}] |J| \frac{t_l}{t} d\zeta_l d\xi d\eta \quad (16)$$

trong đó:  $m$  là số lớp,  $\rho^l$  là khối lượng riêng và:

$$[\bar{N}] = \begin{bmatrix} \bar{N}_1^* & \bar{N}_2^* & \dots & \bar{N}_i^* & \dots & \bar{N}_8^* \end{bmatrix} \quad (17)$$

Tiến hành ghép nối tổng thể ta nhận được ma trận độ cứng tổng thể  $[K]$  và ma trận khối lượng  $[M]$  của ống composite lớp, từ đó ta có phương trình tổng quát để giải bài toán dao động riêng như sau:

$$[M]\{\ddot{a}\} + [K]\{a\} = 0 \quad (18)$$



**Hình 2.** Trục tọa độ cho tích phân lớp

### 3. Kết quả số

Ống trụ composite lớp, dài  $L = 2$  m, bán kính ngoài  $r = 0.15$  m, chiều dày ống  $t = 0.008$  m, mỗi lớp là vật liệu composite đồng phương. Ống được ngàm một đầu, một đầu tự do. Thông số cơ tính mỗi lớp vật liệu: Mô đun đàn hồi  $E_1 = 14,5 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$ ,  $E_2 = 97,7 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$ ,  $E_3 = 97,7 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$ , mô đun đàn hồi trượt  $G_{12} = 4 \cdot 10^9 \text{N/m}^2$ ,  $G_{23} = 3,5 \cdot 10^9 \text{N/m}^2$ ,  $G_{31} = 4 \cdot 10^9 \text{N/m}^2$ , hệ số poisson  $\nu_{12} = 0.25$ ,  $\nu_{23} = 0.02$ ,  $\nu_{31} = 0.25$ .

Sử dụng lập trình Matlab khảo sát tần số dao động riêng của ống trụ composite lớp. Sau đó kiểm chứng kết quả khảo sát được với phần mềm Ansys.

Khảo sát trường hợp chiều dày ống composite thay đổi, số lớp ống là 4 lớp (0/90/0/90). Kết quả cho trên Hình 3a và Bảng 1. Ta thấy rằng khi chiều dày ống composite tăng thì tần số dao động riêng của ống tăng lên.

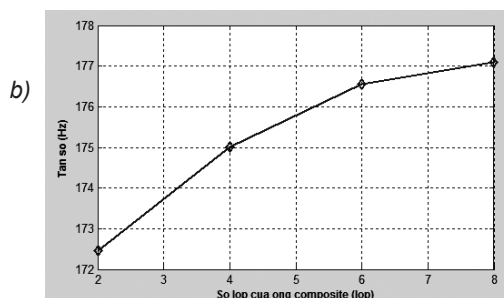
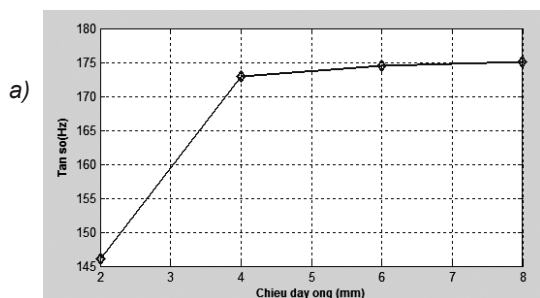
Khảo sát trường hợp khi số lớp thay đổi [0/90]<sub>n</sub>, chiều dày ống composite không đổi  $t = 8$  mm. Ta có kết quả thể hiện trên Hình 3b và Bảng 2. Ta cũng nhận thấy rằng, khi số lớp ống composite tăng lên thì tần số dao động riêng của ống cũng tăng lên. Hình 4a, 4b, 4c thể hiện dạng dao động ở 3 dạng dao động đầu tiên của ống trụ composite.

**Bảng 1.** Tần số dao động riêng của ống composite với chiều dày khác nhau

Chiều dày (mm)	Tác giả	Ansys	Sai số (%)
2	146.01	156.16	6.5
4	172.86	181.38	4.7
6	174.48	186.6	6.6
8	175.01	186.77	6.3

**Bảng 2.** Tần số dao động riêng của ống composite với số lớp khác nhau

Số lớp của ống	Tác giả	Ansys	Sai số (%)
[0/90]	172.47	185.65	7.1
[0/90] <sub>2</sub>	175.01	187.77	6.8
[0/90] <sub>3</sub>	176.56	188.43	6.3
[0/90] <sub>4</sub>	177.09	188.9	6.3



**Hình 3.** Tần số dao động riêng của ống với chiều dày ống thay đổi (Hình a) và số lớp ống composite thay đổi (Hình b)

**Bảng 3.** Tần số dao động riêng của ống composite với cấu hình ống thay đổi

Cấu hình của ống	Tác giả	Ansys	Sai số (%)
[0/90]	172.47	185.65	7.1
[15/-15]	173.62	185.53	5.4
[30/-30]	126.39	134.74	6.2
[45/-45]	180.74	193.51	6.6
[60/-60]	208.22	220.57	5.6
[75/-75]	313.47	334.19	6.2



Hình 4. a) Dạng dao động 1



b) Dạng dao động 2



c) Dạng dao động 3

Khảo sát trường hợp khi cấu hình của ống composite lớp thay đổi, số lớp khảo sát là 2, chiều dày mỗi lớp là 4 mm. Kết quả chương trình tính toán cho ở Bảng 3. Qua đó ta thấy với cấu hình ống [75/-75] thì tần số dao động riêng là lớn nhất (313.47 Hz), còn với cấu hình ống [30/-30] thì tần số dao động riêng là nhỏ nhất (126.39 Hz). Tác giả so sánh với phần mềm Ansys thì sai số nằm trong giới hạn cho phép.



#### 4. Kết luận

Bài báo đã thực hiện được các nội dung sau:

Đã xây dựng được mô hình của ống composite lớp bằng phần tử hữu hạn, sử dụng phần tử vỏ suy biến đẳng tham số 8 nút, mỗi nút 5 bậc tự do. Xây dựng các ma trận phần tử và tập hợp thành các ma trận tổng thể, thành lập được phương trình tổng quát của ống composite lớp để xác định tần số dao động riêng của ống.

Xây dựng chương trình tính toán với phần mềm Matlab để xác định bài toán dao động riêng của ống composite với các trường hợp khảo sát khác nhau. Độ tin cậy của chương trình được kiểm tra bởi phần mềm Ansys, qua khảo sát và kiểm chứng cho thấy chương trình tính toán là ổn định và tin cậy.

Việc xây dựng mô hình và chương trình tính toán để xác định tần số dao động riêng của ống composite là bước cơ sở ban đầu để tác giả tiếp tục nghiên cứu, phân tích tính toán các bài toán về ống composite lớp trong trường hợp có các dạng tải trọng phức tạp bên ngoài tác dụng, từ đó có những khuyến cáo cho các nhà thiết kế và người sử dụng ống composite đạt hiệu quả cao nhất.

#### Tài liệu tham khảo

- Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O. (1970), "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2:419-459.
- Liao C.L., Cheng C.R. (1994), "Dynamic stability of Stiffened Laminated Composite Plates and Shells subjected to In-Plane Pulsating Forces", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(24):4167-4183.
- Patel S.N., Datta P.K., Shekh A.H. (2006), "Buckling and dynamic instability analysis of stiffened Composite Panels", *Thin-Walled Structure*, 44:321-333.
- Eugerino O. (2012), *Structural Analysis with the Finite Element Method Linear Statics*, 2, Beams, Plates and Shells-Springer.
- Trịnh Anh Tuấn, Trần Hữu Quốc và Trần Minh Tú (2016), "Phân tích tĩnh và dao động riêng của panel trụ composite lớp có gân gia cường", *Hội nghị khoa học toàn quốc Vật liệu và kết cấu Composite - Cơ học, Công nghệ và ứng dụng*, 759-766.