



TÍNH DẦM TRÊN NỀN WINKLER THEO PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

Phạm Hoàng Anh¹, Nguyễn Thành Luân²

Tóm tắt: Từ biểu thức giải tích của độ võng dầm, thiết lập các phần tử mẫu để tính dầm trên nền đàn hồi Winkler theo phương pháp chuyển vị. Xử dụng các phần tử mẫu này, việc tính toán có thể thực hiện thủ công hoặc lập trình tự động hóa và cho nghiệm số chính xác.

Từ khóa: Phương pháp chuyển vị; dầm; nền đàn hồi Winkler.

Summary: From the analytical formula of beam deflection, typical elements of beam on Winkler's foundation are established for solving the problem by deflection method. Using the proposed elements, the calculation can be done manually or automatically, which requires few nodes and gives exact numerical results.

Keywords: Displacement method; beam; Winkler's foundation.

Nhận ngày 15/5/2014, chỉnh sửa ngày 30/6/2014, chấp nhận đăng 31/10/2014



1. Giới thiệu

Dầm trên nền đàn hồi là bài toán khá phổ biến trong kỹ thuật. Để giải các bài toán đa dạng, phương pháp số thường được sử dụng. Thông dụng có thể kể đến như phương pháp sai phân hữu hạn (FDM) [1-3], phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) [4-8], phương pháp lưới tự do (MFM) [9, 10]. Thông thường, kết quả phân tích từ các phương pháp số là gần đúng. Để tăng độ chính xác của kết quả cần có lưới chia tương đối mịn, kèm theo là tăng đáng kể số lượng ẩn và khối lượng tính.

Khác với phương pháp số, phương pháp giải tích toán học cho phép tìm nghiệm chính xác của bài toán. Biểu thức nghiệm giải tích đã được thiết lập cho một số trường hợp tải trọng tác dụng trên dầm dài vô hạn [11]. Với dầm dài hữu hạn, các phương pháp truyền thống như phương pháp thông số ban đầu [12], phương pháp cộng tác dụng [13] cho phép tìm nghiệm giải tích của dầm có điều kiện phức tạp hơn. Nhìn chung, các phương pháp trên thường dẫn đến tính toán phức tạp, biểu thức nghiệm thu được khá “cồng kềnh”.

Gần đây, một số bài báo đã đề xuất những cách khác để giảm khối lượng tính toán [14-17]. Trong [14], tác giả đưa ra phương pháp tìm biểu thức nghiệm suy rộng (generalized solutions), có thể áp dụng cho trường hợp dầm có nhiều tải trọng, gián đoạn về độ cứng của dầm và nền. Các tác giả [15], [16] đã dùng các hàm kỳ dị (singularity functions) biểu diễn các tải trọng gián đoạn để giảm khối lượng tính toán, tuy nhiên chỉ dừng lại ở dầm có độ cứng và hệ số nền liên tục. Để xử lý các trường hợp gián đoạn về độ cứng dầm và hệ số nền, Phạm (2014) [17] chia dầm thành nhiều đoạn và sử dụng điều kiện liên tục về chuyển vị tại các điểm chia để tìm nghiệm giải tích kín cho từng đoạn dầm. Đặc điểm chung của các phương pháp trên là dùng hàm kỳ dị để biểu diễn tải trọng và yêu cầu thực hiện bằng các phần mềm tính toán số học hiện đại như Mathematica [15], [17], Maple [16]. Mặc dù đã đơn giản hóa quá trình tính toán, các phương pháp này vẫn còn phụ thuộc vào công cụ tính.

¹TS, Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp. Trường Đại học Xây dựng. E-mail: anhpham.nuce@gmail.com

²KS, Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp. Trường Đại học Xây dựng.

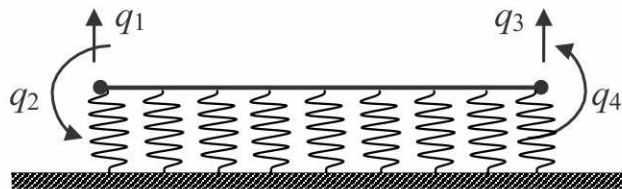
Trong bài báo này, phương pháp chuyển vị được đề xuất áp dụng cho bài toán phẳng dầm trên nền đàn hồi Winkler [18] với mục đích giảm số điểm chia, đồng thời có thể sử dụng các công cụ toán thông thường. Phần tử thanh mẫu được thiết lập dựa trên biểu thức nghiệm giải tích của dầm Euler–Bernoulli chịu chuyển vị tại đầu thanh hoặc chịu tải trọng phân bố đều. Một ví dụ số được sử dụng để minh họa cho cách tính đề xuất.

2. Xây dựng phần tử mẫu

Xét dầm có độ cứng chống uốn thay đổi bậc, đặt trên nền đàn hồi Winkler có thể có hệ số nền hằng số hoặc thay đổi bậc. Để tính toán dầm theo phương pháp chuyển vị, bài báo sẽ nghiên cứu thiết lập hai loại phần tử mẫu bao gồm: *dầm hai đầu ngàm và dầm đầu ngàm - đầu tự do* có độ cứng chống uốn và hệ số nền là hằng số. Thực tế, có thể chỉ cần dùng phần tử mẫu *dầm hai đầu ngàm* trong tính toán. Tuy nhiên, sử dụng phần tử *dầm đầu ngàm - đầu tự do* giúp giảm ẩn số chuyển vị tại đầu tự do của dầm.

2.1 Dầm hai đầu ngàm chịu chuyển vị

Xét một phần tử dầm có chiều dài L và độ cứng EI nằm trên nền đàn hồi Winkler với hệ số nền k . Mỗi đầu thanh có hai thành phần chuyển vị: 1 chuyển vị thẳng tịnh tiến theo phương vuông góc với trục thanh và 1 chuyển vị xoay (Hình 1). Chiều dương của các chuyển vị được quy ước như trên hình vẽ.



Hình 1. Phần tử mẫu: dầm chịu chuyển vị

Khi có các chuyển vị này, trong dầm sẽ phát sinh nội lực mômen uốn và lực cắt. Ta sẽ thực hiện tính toán các giá trị nội lực tại đầu thanh tương ứng với từng trường hợp chuyển vị $q_i, i=1..4$, bằng đơn vị. Ký hiệu các thành phần nội lực này là $r_{ij}, i=1..4, j=1..4$ như hình vẽ trong Bảng 1.

Để xác định nội lực, trước tiên cần xác định chuyển vị trong thanh. Sử dụng biểu thức giải tích độ võng của thanh khi không có tải trọng tác dụng [19]:

$$u(x) = e^{\alpha x} (C_1 \sin[\alpha x] + C_2 \cos[\alpha x]) + e^{-\alpha x} (C_3 \sin[\alpha x] + C_4 \cos[\alpha x])$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad (1)$$

trong đó, các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 được xác định theo điều kiện biên:

$$u(0) = q_1; \quad u'(0) = q_2; \quad u(L) = q_3; \quad u'(L) = q_4; \quad (2)$$

Mômen uốn và lực cắt trong dầm được xác định theo:

$$M(x) = EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2}; \quad Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (3)$$

Lần lượt cho từng chuyển vị q_i bằng đơn vị để xác định các giá trị r_{ij} . Các phép tính được thực hiện bằng chương trình Mathematica, với các dòng lệnh như trên Hình 2. Kết quả thu được trong Bảng 1. Có thể thấy, ma trận $[r]_{4 \times 4}$ với các thành phần $r_{ij}, i=1..4, j=1..4$ lấy theo Bảng 1 chính là ma trận độ cứng của phần tử dầm trên nền đàn hồi Winkler.

```
r=Table[Table[0,{4}],{4}];
u=Exp[α*x]*(Sin[α*x]*C1+Cos[α*x]*C2)+Exp[-α*x]*(Sin[α*x]*C3+Cos[α*x]*C4);
du=D[u,x];
For[i=1,i≤4,
  q=Table[0,{4}]; q[[i]]=1;
  Ci=Solve[{(u/.{x→0})==q[[1]],(du/.{x→0})==q[[2]],
    (u/.{x→L})==q[[3]],(du/.{x→L})==q[[4]]},{C1,C2,C3,C4}][[1]];
  U=u/.Ci;
  M=EI*D[D[U,x],x]; Q=D[M,x];
  r[[1,i]]=Q/.{x→0}; r[[2,i]]=-M/.{x→0};
  r[[3,i]]=-Q/.{x→L}; r[[4,i]]=M/.{x→L};
  Print["q=",q]; Print[Simplify[Ci]];
  i++;
Print[Simplify[r]/MatrixForm];
```

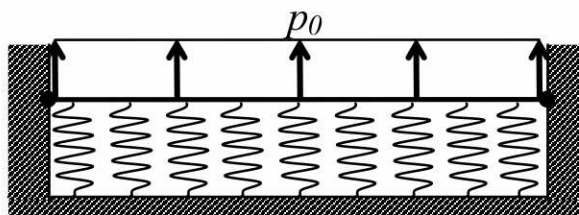
Hình 2. Các dòng lệnh Mathematica để xác định các nội lực đầu dầm do chuyển vị đơn vị tại đầu thanh gây ra

Bảng 1. Nội lực tại đầu dầm do chuyển vị bằng đơn vị gây ra

	$\begin{aligned} r_{11} &= 4\alpha^3 (-1 + e^{4L\alpha} + 2e^{2L\alpha} \sin[2L\alpha])EI\beta \\ r_{21} &= 2\alpha^2 (1 + e^{4L\alpha} - 2e^{2L\alpha} \cos[2L\alpha])EI\beta \\ r_{31} &= -8e^{L\alpha} \alpha^3 ((-1 + e^{2L\alpha}) \cos[L\alpha] + (1 + e^{2L\alpha}) \sin[L\alpha])EI\beta \\ r_{41} &= 8e^{L\alpha} (-1 + e^{2L\alpha}) \alpha^2 \sin[L\alpha]EI\beta \end{aligned}$
	$\begin{aligned} r_{12} &= 2\alpha^2 (1 + e^{4L\alpha} - 2e^{2L\alpha} \cos[2L\alpha])EI\beta \\ r_{22} &= 2\alpha (-1 + e^{4L\alpha} - 2e^{2L\alpha} \sin[2L\alpha])EI\beta \\ r_{32} &= -8e^{L\alpha} (-1 + e^{2L\alpha}) \alpha^2 \sin[L\alpha]EI\beta \\ r_{42} &= -4e^{L\alpha} \alpha ((-1 + e^{2L\alpha}) \cos[L\alpha] - (1 + e^{2L\alpha}) \sin[L\alpha])EI\beta \end{aligned}$
	$\begin{aligned} r_{13} &= -8e^{L\alpha} \alpha^3 ((-1 + e^{2L\alpha}) \cos[L\alpha] - (1 + e^{2L\alpha}) \sin[L\alpha])EI\beta \\ r_{23} &= -8e^{L\alpha} (-1 + e^{2L\alpha}) \alpha^2 \sin[L\alpha]EI\beta \\ r_{33} &= 4\alpha^3 (-1 + e^{4L\alpha} + 2e^{2L\alpha} \sin[2L\alpha])EI\beta \\ r_{43} &= -2\alpha^2 (1 + e^{4L\alpha} - 2e^{2L\alpha} \cos[2L\alpha])EI\beta \end{aligned}$
	$\begin{aligned} r_{14} &= 8e^{L\alpha} (-1 + e^{2L\alpha}) \alpha^2 \sin[L\alpha]EI\beta \\ r_{24} &= -4e^{L\alpha} \alpha ((-1 + e^{2L\alpha}) \cos[L\alpha] - (1 + e^{2L\alpha}) \sin[L\alpha])EI\beta \\ r_{34} &= -2\alpha^2 (1 + e^{4L\alpha} - 2e^{2L\alpha} \cos[2L\alpha])EI\beta \\ r_{44} &= -2\alpha (1 - e^{4L\alpha} + 2e^{2L\alpha} \sin[2L\alpha])EI\beta \end{aligned}$
$\beta = \frac{1}{1 - 4e^{2L\alpha} + e^{4L\alpha} + 2e^{2L\alpha} \cos[2L\alpha]}$	

2.2 Dầm hai đầu ngàm chịu lực phân bố đều

Trường hợp thanh chịu tải trọng phân bố đều p_0 (Hình 3). Biểu thức độ võng của thanh được cho như sau [19]:


Hình 3. Dầm chịu lực phân bố đều

$$u(x) = \frac{p_0}{k} + e^{\alpha x} (C_1 \sin[\alpha x] + C_2 \cos[\alpha x]) + e^{-\alpha x} (C_3 \sin[\alpha x] + C_4 \cos[\alpha x]) \quad (4)$$

Các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 được xác định theo điều kiện biên:

$$u(0) = 0; \quad u'(0) = 0; \quad u(L) = 0; \quad u'(L) = 0; \quad (5)$$

Kết quả tính bằng Mathematica với các lệnh như trên Hình 4, được cho trong Bảng 2.

```

R=Table[0,{4}];
u=p/k+Exp[α*x]*(Sin[α*x]*C1+Cos[α*x]*C2)+
Exp[-α*x]*(Sin[α*x]*C3+Cos[α*x]*C4);
du=D[u,x];
Ci=Solve[{(u/.{x→0})==0,(du/.{x→0})==0,(u/.{x→L})==0,(du/.{x→L})==0},
{C1,C2,C3,C4}][[1]];
U=u/.Ci;
M=EI*D[D[U,x],x];Q=D[M,x];
R[[1]]=Q/.{x→0};R[[2]]=-M/.{x→0};
R[[3]]=-Q/.{x→L};R[[4]]=M/.{x→L};
Print[Simplify[Ci]];
Print[Simplify[R]//MatrixForm];

```

Hình 4. Các dòng lệnh Mathematica để xác định các nội lực đầu dầm do lực phân bố đều gây ra

Bảng 2. Nội lực tại đầu dầm do lực phân bố đều gây ra

	$R_{1p} = -4\alpha^3 (1 + e^{2L\alpha} - 2e^{L\alpha} \cos[L\alpha]) EI \gamma$ $R_{2p} = -2\alpha^2 (-1 + e^{2L\alpha} - 2e^{L\alpha} \sin[L\alpha]) EI \gamma$ $R_{3p} = -4\alpha^3 (1 + e^{2L\alpha} - 2e^{L\alpha} \cos[L\alpha]) EI \gamma$ $R_{4p} = 2\alpha^2 (-1 + e^{2L\alpha} - 2e^{L\alpha} \sin[L\alpha]) EI \gamma$
$\gamma = \frac{P_0}{k(-1 + e^{2L\alpha} + 2e^{L\alpha} \sin[L\alpha])}$	

Với cách làm tương tự, ta cũng xây dựng được các phần tử mẫ *dầm đầu ngàm-đầu tự do* và *dầm đầu tự do-đầu ngàm*. Các biểu thức nội lực đầu dầm tương ứng với trường hợp chịu chuyển vị bằng đơn vị và chịu lực phân bố đều được cho trong Bảng 3 và Bảng 4.

Bảng 3. Nội lực tại đầu dầm conson do chuyển vị bằng đơn vị gây ra

1. Dầm Đầu ngàm-đầu tự do	
	$r_{11} = 4\alpha^3 (-1 + e^{4L\alpha} + 2e^{2L\alpha} \sin[2L\alpha]) EI \eta$ $r_{21} = 2\alpha^2 (1 + e^{4L\alpha} - 2e^{2L\alpha} \cos[2L\alpha]) EI \eta$
	$r_{12} = 2\alpha^2 (1 + e^{4L\alpha} - 2e^{2L\alpha} \cos[2L\alpha]) EI \eta$ $r_{22} = -2\alpha (1 - e^{4L\alpha} + 2e^{2L\alpha} \sin[2L\alpha]) EI \eta$
2. Dầm Đầu tự do-đầu ngàm	
	$r_{11} = 4\alpha^3 (-1 + e^{4L\alpha} + 2e^{2L\alpha} \sin[2L\alpha]) EI \eta$ $r_{21} = -2\alpha^2 (1 + e^{4L\alpha} - 2e^{2L\alpha} \cos[2L\alpha]) EI \eta$
	$r_{12} = -2\alpha^2 (1 + e^{4L\alpha} - 2e^{2L\alpha} \cos[2L\alpha]) EI \eta$ $r_{22} = -2\alpha (1 - e^{4L\alpha} + 2e^{2L\alpha} \sin[2L\alpha]) EI \eta$
$\eta = \frac{1}{1 + 4e^{2L\alpha} + e^{4L\alpha} + 2e^{2L\alpha} \cos[2L\alpha]}$	

Bảng 4. Nội lực tại đầu dầm conson do lực phân bố đều gây ra

1. Dầm Đầu ngàm-đầu tự do	
	$R_{1p} = -4\alpha^3 (-1 + e^{4L\alpha} + 2e^{2L\alpha} \sin[2L\alpha]) EI \varphi$ $R_{2p} = -2\alpha^2 (1 + e^{4L\alpha} - 2e^{2L\alpha} \cos[2L\alpha]) EI \varphi$
2. Dầm Đầu tự do-đầu ngàm	
	$R_{1p} = -4\alpha^3 (-1 + e^{4L\alpha} + 2e^{2L\alpha} \sin[2L\alpha]) EI \varphi$ $R_{2p} = 2\alpha^2 (1 + e^{4L\alpha} - 2e^{2L\alpha} \cos[2L\alpha]) EI \varphi$
$\varphi = \frac{P_0}{k} \eta$	



3. Tính dầm theo phương pháp chuyển vị

Trình tự tính toán kết cấu thanh theo phương pháp chuyển vị được trình bày chi tiết trong [20]. Tóm tắt các bước thực hiện như sau:

+ Phân chia dầm thành các phần tử mẫu, các phần tử này nối với nhau bởi các nút; xác định các ẩn số (là các chuyển vị độc lập của đầu phần tử - thông thường chính là các chuyển vị nút);

+ Xác định nội lực tại các đầu thanh do từng chuyển vị nút có giá trị bằng đơn vị và do tải trọng phân bố trên phần tử gây ra (theo các bảng phần tử mẫu đã lập);

+ Viết phương trình cân bằng lực tại các nút. Với n chuyển vị nút cần tìm, ta sẽ thiết lập hệ n phương trình cân bằng, tuyến tính, có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$[R]\{q\} + \{F_p\} = \{F\} \quad (6)$$

trong đó: $\{q\}$ là véc tơ có thành phần là n chuyển vị nút cần tìm, $q_k, k = 1..n$; $[R]$ là ma trận các hệ số, với R_{km} tính bằng tổng nội lực tại các đầu thanh tương ứng với chuyển vị thứ k , do chuyển vị m bằng đơn vị gây ra; $\{F_p\}$ là véc tơ có thành phần F_{kp} tính bằng tổng nội lực tại các đầu thanh tương ứng với chuyển vị thứ k do tải trọng phân bố đều trên các thanh gây ra và $\{F\}$ là véc tơ ngoại lực tác dụng tại các nút (lực tập trung theo phương thẳng đứng và mô men tập trung).

Sau khi lập được hệ phương trình (6), ta sẽ xác định được các chuyển vị nút, từ đó xác định được nội lực và chuyển vị trong dầm. Cụ thể, các chuyển vị nút được định bởi:

$$\{q\} = [R]^{-1} (\{F\} - \{F_p\}) \quad (7)$$

Biểu thức độ võng của thanh thứ k -th được xác định theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$u^{(k)}(x) = q_1^{(k)}U_1 + q_2^{(k)}U_2 + q_3^{(k)}U_3 + q_4^{(k)}U_4 + U_p = \{U\}^T \{q\}^{(k)} + U_p \quad (8)$$

Bảng 5. Các hằng số trong biểu thức chuyển vị thanh hai đầu ngàm

$q_1^{(k)} = 1$	$C1 = (-1 + e^{2L\alpha} \cos[2L\alpha] + e^{2L\alpha} \sin[2L\alpha])\beta$; $C2 = (1 - 2e^{2L\alpha} + e^{2L\alpha} \cos[2L\alpha] - e^{2L\alpha} \sin[2L\alpha])\beta$ $C3 = e^{2L\alpha} (e^{2L\alpha} - \cos[2L\alpha] + \sin[2L\alpha])\beta$; $C4 = e^{2L\alpha} (-2 + e^{2L\alpha} + \cos[2L\alpha] + \sin[2L\alpha])\beta$
$q_2^{(k)} = 1$	$C1 = (1 - e^{2L\alpha} + e^{2L\alpha} \sin[2L\alpha])\beta / \alpha$; $C2 = -2e^{2L\alpha} \sin[L\alpha]^2 \beta / \alpha$ $C3 = e^{2L\alpha} (-1 + e^{2L\alpha} - \sin[2L\alpha])\beta / \alpha$; $C4 = 2e^{2L\alpha} \sin[L\alpha]^2 \beta / \alpha$
$q_3^{(k)} = 1$	$C1 = e^{L\alpha} (-(-1 + e^{2L\alpha})\cos[L\alpha] + (-3 + e^{2L\alpha})\sin[L\alpha])\beta$ $C2 = e^{L\alpha} ((-1 + e^{2L\alpha})\cos[L\alpha] + (1 + e^{2L\alpha})\sin[L\alpha])\beta$ $C3 = -e^{L\alpha} ((-1 + e^{2L\alpha})\cos[L\alpha] + (-1 + 3e^{2L\alpha})\sin[L\alpha])\beta$ $C4 = -e^{L\alpha} ((-1 + e^{2L\alpha})\cos[L\alpha] + (1 + e^{2L\alpha})\sin[L\alpha])\beta$
$q_4^{(k)} = 1$	$C1 = e^{L\alpha} ((-1 + e^{2L\alpha})\cos[L\alpha] - 2\sin[L\alpha])\beta / \alpha$; $C2 = -e^{L\alpha} (-1 + e^{2L\alpha})\sin[L\alpha]\beta / \alpha$ $C3 = (e^{L\alpha} - e^{3L\alpha})\cos[L\alpha] + 2e^{3L\alpha} \sin[L\alpha]\beta / \alpha$; $C4 = e^{L\alpha} (-1 + e^{2L\alpha})\sin[L\alpha]\beta / \alpha$
$P = P_0$	$C1 = (-1 + e^{L\alpha} \cos[L\alpha] - e^{L\alpha} \sin[L\alpha])\gamma$; $C2 = -(-1 + e^{L\alpha} \cos[L\alpha] + e^{L\alpha} \sin[L\alpha])\gamma$ $C3 = -e^{L\alpha} (e^{L\alpha} - \cos[L\alpha] - \sin[L\alpha])\gamma$; $C4 = -e^{L\alpha} (e^{L\alpha} - \cos[L\alpha] + \sin[L\alpha])\gamma$

Với $q_i^{(k)}, i=1..4$ là các chuyển vị tại đầu thanh k , lấy tương ứng theo các thành phần chuyển vị trong $\{q\}$; $U_i, i=1..4$ là biểu thức độ võng của thanh do $q_i^{(k)} = 1$ gây ra; U_p là biểu thức độ võng do lực phân bố đều trên thanh gây ra. Các biểu thức này được xác định theo (1) và (4), với các hằng số $C1, C2, C3, C4$ cho trong Bảng 5.

Nội lực dầm có thể xác định thông qua độ võng $u^{(k)}(x)$ theo (3). Mặt khác, cũng có thể xác định trực tiếp nội lực tại đầu thanh theo quan hệ:

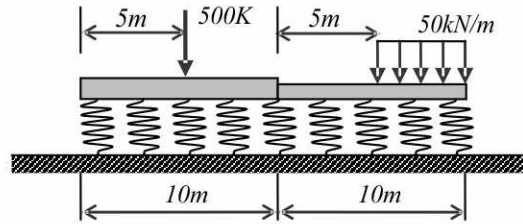
$$\{R\}^{(k)} = [r]^{(k)} \{q\}^{(k)} + \{R_p\}^{(k)} \quad (9)$$

trong đó $\{R\}^{(k)} = \{R_1^{(k)}, R_2^{(k)}, R_3^{(k)}, R_4^{(k)}\}^T$ là véc tơ các thành phần nội lực đầu thanh k ; $[r]^{(k)}, [R_p]^{(k)}$ xác định theo Bảng 1 và 2 (hoặc Bảng 3 và 4) tương ứng cho thanh k .



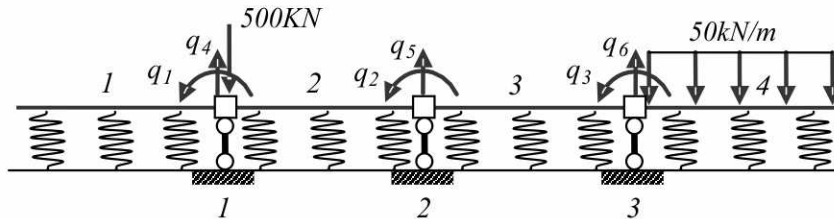
4. Ví dụ minh họa

Kết cấu dầm trên nền đàn hồi trong tài liệu [17] được tính theo phương pháp chuyển vị. Ví dụ này dùng để kiểm tra các phần tử mẫu đã thiết lập. Dầm gồm 2 đoạn, đoạn thứ nhất dài $L_1=10\text{m}$, có độ cứng $EI_1=1687500\text{kNm}^2$, chịu lực tập trung 500kN tại giữa đoạn; đoạn thứ 2 dài $L_2=10\text{m}$ với độ cứng là $EI_2=1125000\text{kNm}^2$, chịu lực phân bố đều 50kN/m trên nửa cuối của đoạn (Hình 5). Hệ số nền $k=2401.57\text{kN/m}^2$.



Hình 5. Dầm có độ cứng thay đổi trên nền đàn hồi

Hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị được lập như trên Hình 6, bao gồm 4 phần tử thanh, đánh số $k=1..4$ phía trên mỗi phần tử. Trong đó phần tử 1 tương ứng với dầm *đầu tự do-đầu ngàm*, phần tử 2 và 3 tương ứng với dầm *hai đầu ngàm* và phần tử 4 tương ứng với dầm *đầu ngàm-đầu tự do*. Với mô hình phần tử như vậy, hệ có 3 nút (được đánh số phía dưới mỗi nút), 6 bậc siêu động bao gồm 3 chuyển vị xoay q_1, q_2, q_3 và 3 chuyển vị thẳng q_4, q_5, q_6 được quy ước chiều dương như trên Hình 6.



Hình 6. Hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị

Hệ phương trình cân bằng viết cho hệ theo (6) sẽ như sau:

$$[\mathbf{R}]_{6 \times 6} \{\mathbf{q}\}_{1 \times 6} + \{\mathbf{F}_p\}_{1 \times 6} = \{\mathbf{F}\}_{1 \times 6} \quad (10)$$

trong đó:

$$\{\mathbf{F}\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad -500 \quad 0 \quad 0\}^T \quad (11)$$

$[\mathbf{R}]_{6 \times 6}, \{\mathbf{F}_p\}_{1 \times 6}$ được xác định theo như mục 3, sử dụng các bảng phần tử mẫu đã thiết lập. Ta thu được:

$$\{\mathbf{F}_p\} = \{0 \quad 0 \quad 570.629 \quad 0 \quad 0 \quad 234.934\}^T \quad (12)$$

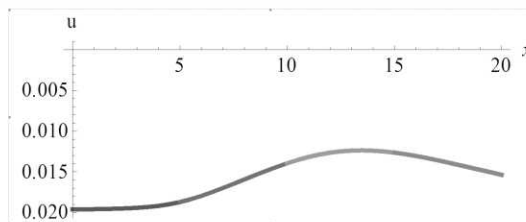
$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 1446395.92 & 672859.927 & 0 & 379920.503 & -403145.49 & 0 \\ & 2255707.19 & 447862.014 & 403145.491 & -135002.04 & -268147.41 \\ & & 993449.215 & 0 & 268147.41 & -245730.69 \\ & & & 177965.546 & -160459.65 & 0 \\ & & & & 278910.396 & -106461.4 \\ & & & & & 123738.443 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Kết quả tính chuyển vị, mômen uốn và lực cắt trong dầm được cho trong Bảng 6, với nội lực đầu thanh được xác định theo (9). Các kết quả này trùng với kết quả tính theo phương pháp giải tích được trình bày trong [17] (Các giá trị tính theo [17] được thể hiện trong dấu “()” ở Bảng 6).

Bảng 6. Chuyển vị và nội lực tại các nút dầm

Nút	Độ võng (m)	Góc xoay (rad)	Mômen uốn (kNm)	Lực cắt (kN)
1	-0.0187148 (-0.0187148)	0.000613529 (0.000613529)	585.529 (585.529)	Trái: 232.710 (232.710) Phải: -267.290 (-267.290)
2	-0.0139465 (-0.0139465)	0.000892106 (0.000892106)	-232.944 (-232.944)	-70.043 (-70.043)
3	-0.0126346 (-0.0126346)	-0.00033736 (-0.00033736)	-193.775 (-193.775)	83.116 (83.116)

Chuyển vị của dầm xác định theo phương trình (8) được biểu diễn trên Hình 7 cũng hoàn toàn trùng với kết quả giải tích.



Hình 7. Chuyển vị của dầm, m



5. Kết luận

Bài báo lập ra một số phần tử mẫu để phân tích kết cấu dầm trên nền đàn hồi Winkler theo phương pháp chuyển vị. Số lượng phần tử cho mô hình tính chỉ cần đủ để biểu diễn tải trọng (tải trọng tập trung hoặc lực phân bố đều) và các gián đoạn về độ cứng.

Với các phần tử mẫu này, người tính có thể dùng các công cụ tính toán thông thường để tính thủ công hoặc lập trình tính toán tự động và thu được kết quả số chính xác của độ võng, góc xoay, mômen uốn cũng như lực cắt trong dầm.

Tài liệu tham khảo

1. Jones, G. (1997), *Analysis of Beams on Elastic Foundations Using Finite Difference Theory*, Thomas Telford Publishing, London, UK.
2. N.M. Yên (2000), *Phương pháp số trong cơ học kết cấu*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
3. Teodoru I.B. (2007), "Analysis of beams on elastic foundation: the finite differences approach", *Proceedings of 'Juniorstav 2007', 9-th Technical Conference for Doctoral Study*, Brno University of Technology, Czech Republic.
4. Cheung, Y.K., Nag, D.K. (1968), "Plates and Beams on Elastic Foundations-Linear and Nonlinear Behavior", *Geotechnique*, Vol. 18(2), 250-260.
5. Miyahara, F., and Ergatoudis, J.G. (1976), "Matrix Analysis of Structure-Foundation Interaction", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 102(ST1), 251-265.
6. Zhaohua, F. and Cook, R. (1983), "Beam Elements on Two-Parameter Elastic Foundations", *Journal of Eng. Mech. (ASCE)*, 109(6), 1390-1402.
7. Eisenberger, M., D.Z. Yankelovsky (1985), "Exact stiffness matrix for beams on elastic foundation", *Computers & Structures*, Vol. 21(6), 1355-1359.
8. Gulkan P., Alemdar B.N. (1999), "An exact finite element for a beam on a two parameter elastic foundation: a revisit", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 7(3) 259-276.
9. Binesh, S.M. (2012), "Analysis of beam on elastic foundation using the radial point interpolation method", *Scientia Iranica A*, Vol. 19 (3), 403-409.
10. Ladhane K. B., Hajare S. P., Sawant V. A. (2013), "Analysis of Infinite Beams on Elastic Foundation Using Meshfree Method", *Journal of Civil Engineering and Science*, Vol. 2(1), 22-29.
11. Pasternak P.L. (1954), "On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants", *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu Arkhitekture*, Moscow (in Russian).
12. Krilov, A. N. (1931), *On analysis of beams resting on elastic foundation*, Science Academy of USSR, Leningrad.
13. Hetenyi, M. (1946), *Beams on elastic foundation*, University of Michigan Press.
14. Yavari A., Sarkani S. and Reddy J.N. (2001), "Generalized solution of beams with jump discontinuities on elastic foundations", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 71, 625-639.
15. Betten, J. (2008), "Beam on elastic foundation", *Mathematical Models in Materials Science and Continuum Mechanics*.
16. Dinev, D. (2012), "Analytical solution of beam on elastic foundation by singular functions", *Engineering MECHANICS*, Vol. 19 (6), 381-392.
17. P. H. Anh (2014), "Một cách tìm nghiệm giải tích bài toán dầm trên nền đàn hồi có điều kiện phức tạp", *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, Số 18, 59-65.
18. Winkler, E. (1867), *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, Dominicus, Prague.
19. L. N. Hồng, L. N. Thạch (2011), *Sức bền vật liệu*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
20. L. T. Trình (2006), *Cơ học kết cấu – Tập 2: Hệ siêu tĩnh*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.