



XÁC ĐỊNH VẾT NÚT TRONG KẾT CẤU HỆ THANH BẰNG PHÂN TÍCH WAVELET DỪNG ĐỐI VỚI CHUYỂN VỊ ĐỘNG

Trần Văn Liên¹, Trịnh Anh Hào²

Tóm tắt: Bài báo trình bày các kết quả nghiên cứu mới về việc xác định vết nứt trong các kết cấu hệ thanh như dầm liên tục, khung,... dựa trên phân tích wavelet dừng đối với các chuyển vị động. Các chuyển vị này được xác định từ mô hình phần tử thanh đàn hồi có nhiều vết nứt chịu kéo, nén, xoắn và uốn theo phương pháp độ cứng động lực kết hợp với phương pháp ma trận chuyển sử dụng mô hình lò xo của vết nứt. Kết quả tính toán cho thấy phương pháp đề xuất là một phương pháp chẩn đoán cho kết quả tốt và có thể ứng dụng hiệu quả trong thực tế.

Từ khóa: Vết nứt; chuyển vị động; wavelet; độ cứng động lực.

Summary: The present article deals with new results of the crack detection of the multiple cracked plane structures such as continuous beams, plane frames based on the stationary wavelet transforms of dynamic responses. The dynamic responses are obtained from the dynamic stiffness method for modeling framed structure damaged to multiple cracks represented by equivalent springs. The theoretical development was illustrated and validated by numerical examples.

Keywords: Cracks; dynamic responses; wavelet; dynamic stiffness.

Nhận ngày 2/8/2014, chỉnh sửa ngày 15/8/2014, chấp nhận đăng 31/10/2014



1. Mở đầu

Trong thời gian gần đây, bài toán chẩn đoán kỹ thuật công trình nói chung hay bài toán xác định vết nứt trong kết cấu nói riêng đã và đang thu hút sự quan tâm của các nhà nghiên cứu, các nhà kỹ thuật xây dựng trên thế giới và trong nước. Trong đó, các nghiên cứu ứng dụng phân tích wavelet để xác định vết nứt trong kết cấu được phát triển rất mạnh mẽ và đa dạng với các loại wavelet khác nhau như wavelet liên tục (CWT), wavelet rời rạc (DWT), wavelet gói (WPT) hoặc wavelet dừng (SWT).

Surace C., Ruotolo R. [1], Liew K.M., Wang Q. [2], Hou Z. et al. [3], Wang Q., Deng X. [4], Douka E. et al. [5], Chang C.C., Chen L.W. [6] đã sử dụng phân tích wavelet đối với kết quả đo đặc chuyển vị hay dao động tự do để xác định vị trí vết nứt của dầm công son và dầm đơn giản có một hay nhiều vết nứt. Zhu X.Q., Law S.S. [7] đã sử dụng kết quả đo đặc trong miền thời gian tại một điểm trên dầm chịu tải trọng di chuyển làm đầu vào cho phân tích wavelet. Kết quả là vị trí vết nứt được nhận dạng một cách dễ dàng bằng hệ số CWT tương ứng với vị trí của tải trọng di chuyển. Zhong S., Oyadiji O. [8] đã sử dụng SWT phân tích dạng dao động của dầm có vết nứt để chẩn đoán vị trí vết nứt.

Ở Việt Nam, hầu hết các tác giả đều ứng dụng DWT để xác định vết nứt trong dầm. Khoa N.V., Olatunbosun, Khiem N.T. [9] đã chẩn đoán vị trí vết nứt của dầm công son có vết nứt hở dựa vào phân tích DWT dạng dao động. Lương N.T.H., Phan L.V. [10] đã phân tích chuyển vị tĩnh của dầm có vết nứt bằng DWT. Hải T.T. [11] đã ứng dụng DWT để xác định vết nứt trên dầm dựa vào chuyển vị của xe di chuyển trên dầm. Khoa N.V. et al. [12] đã sử dụng DWT đối với gia tốc chuyển động để giám sát vết nứt hở của dầm.

¹PGS.TS, Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp. Trường Đại học Xây dựng. Email: LienTV@hotmail.com

²ThS, Công ty cổ phần Đầu tư, Tư vấn và Thi công xây dựng Việt

Nói chung các nghiên cứu này mới được ứng dụng cho các kết cấu đơn giản như dầm công xôn, dầm đơn giản với các số liệu dùng trong phân tích là các chuyển vị tĩnh hoặc các dạng dao động riêng nhận được từ giải tích hoặc bằng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH). Hạn chế của kết quả giải tích là chỉ thực hiện được với dầm có một hoặc hai vết nứt, còn đối với phương pháp PTHH thì phải chia nhỏ kết cấu theo số lượng vết nứt dẫn đến mô hình thiếu độ chính xác.

Đối với các kết cấu hệ thanh như dầm liên tục, khung,... hiện nay mới chỉ có rất ít nghiên cứu ứng dụng wavelet để xác định vết nứt. Ovanesova A.V., Suarez L.E. [13] đã phân tích wavelet đối với chuyển vị tĩnh của khung phẳng sử dụng phương pháp PTHH.

Trong các nghiên cứu [14, 15], Khiem N.T., Lien T.V. đã xây dựng được mô hình phần tử thanh 3 chiều có nhiều vết nứt theo phương pháp độ cứng động lực (ĐCĐL) kết hợp với phương pháp ma trận chuyển (MTC) sử dụng mô hình lò xo của vết nứt. Sử dụng các kết quả này, Liên T.V., Khôi T.T. [16] đã xác định được các vết nứt trong kết cấu hệ thanh bằng DWT của các chuyển vị tĩnh. Cũng từ mô hình này, các tác giả Lien T.V., Hao T.A. [17] đã xác định được biểu thức của hàm dạng và dạng dao động riêng. Từ đó, các tác giả Lien T.V., Khiem, N.T., Hao T.A. [18] đã ứng dụng SWT đối với các dạng dao động riêng theo phương pháp ĐCĐL để xác định số lượng và vị trí vết nứt trong kết cấu hệ thanh có xét đến ảnh hưởng của các mức nhiễu khác nhau.

Bài báo trình bày các kết quả xác định vết nứt trong các kết cấu hệ thanh như dầm liên tục, khung... dựa trên phân tích wavelet dùng SWT đối với các chuyển vị động. Các chuyển vị này được xác định từ mô hình phần tử thanh đàn hồi có nhiều vết nứt chịu kéo, nén, xoắn và uốn theo phương pháp ĐCĐL kết hợp với phương pháp MTC sử dụng mô hình lò xo của vết nứt.

2. Dao động của phần tử dầm chịu uốn có nhiều vết nứt

Xét một dầm có chiều dài L , diện tích tiết diện A , mômen quán tính tiết diện I_z , mật độ khối lượng ρ , mô đun đàn hồi E chịu uốn bởi tải trọng phân bố $Q(x,t)$ có chiều dương hướng theo trục y trong mặt phẳng Oxy của hệ tọa độ địa phương. Phương trình dao động uốn của dầm có dạng sau [19]

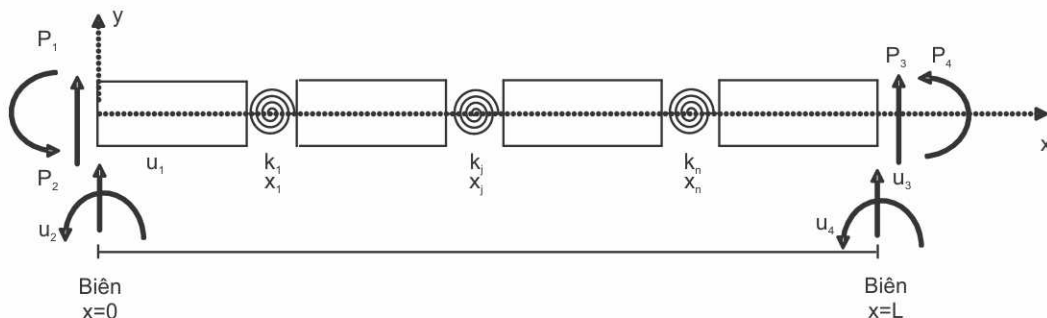
$$EI_z \left[\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \mu_1 \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} \right] + \rho A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu_2 \frac{\partial w}{\partial t} \right] = Q(x,t)$$

với μ_1 là hệ số cản nhớt của vật liệu, μ_2 là hệ số cản của môi trường. Đặt $w(x,t) = \Phi(x,\omega)e^{i\omega t}$; $Q(x,t) = q(x,\omega)e^{i\omega t}$ với $\Phi(x,\omega)$ và $q(x,\omega)$ là biên độ của chuyển vị ngang và tải trọng ngang trên dầm, ta thu được phương trình.

$$\frac{d^4 \Phi(x,\omega)}{dx^4} - \lambda^4 \Phi(x,\omega) = \tilde{q}(x,\omega) \quad (1)$$

trong đó $\tilde{q}(x,\omega) = \frac{q(x,\omega)}{\hat{E}I_z}$ và $\lambda = \sqrt[4]{\omega^2 \frac{\rho A}{\hat{E}I_z} \left(1 - \frac{i\mu_2}{\omega} \right)}$; $i = \sqrt{-1}$ là tham số động lực; ω là tần số (rad/s); μ_1, μ_2

là hệ số cản nhớt của vật liệu và môi trường, $\hat{E} = E(1 + i\mu_1/\omega)$ là modul đàn hồi phức. Giả thiết dầm bị nứt tại các điểm x_j ($j=1,2,\dots,n$) với độ sâu a_j , sử dụng mô hình lò xo của vết nứt ta có mô hình dầm như Hình 1 với các độ cứng lò xo k_j^* được tính theo các công thức quy đổi [14].



Hình 1. Phần tử thanh chịu uốn có nhiều vết nứt

Nghiệm phương trình (1) trên $x \in (x_{j-1}, x_j)$ là

$$\Phi(x) = K_1(\lambda \bar{x}) Z_1^+(j-1) + \frac{K_2(\lambda \bar{x})}{\lambda} Z_2^+(j-1) + \frac{K_3(\lambda \bar{x})}{EI_z \lambda^3} Z_3^+(j-1) - \frac{K_4(\lambda \bar{x})}{EI_z \lambda^2} Z_4^+(j-1) + \frac{1}{\lambda^3} \int_0^{\bar{x}} K_4[\lambda(\bar{x}-\tau)] \tilde{q}(x_{j-1} + \tau, \omega) d\tau; \quad x \in [x_{j-1}, x_j]; \quad \bar{x} = x - x_{j-1} \quad (2)$$

trong đó K_i là các hàm Krylov và Z_{j-1}^+ là các tham số ban đầu của đoạn này

$$K_1(x) = \frac{\cosh x + \cos x}{2}; K_3(x) = \frac{\cosh x - \cos x}{2}; K_2(x) = \frac{\sinh x + \sin x}{2}; K_4(x) = \frac{\sinh x - \sin x}{2}$$

$$\{Z_{j-1,1}^+, Z_{j-1,2}^+, Z_{j-1,3}^+, Z_{j-1,4}^+\}^T = (\Phi(x_{j-1}+0); \Phi'(x_{j-1}+0); \hat{E}I_z \Phi''(x_{j-1}+0); -\hat{E}I_z \Phi'''(x_{j-1}+0))^T$$

$$Z_1^+(0) = \Phi(0) = u_1; Z_2^+(0) = \Phi'(0) = u_2; Z_3^+(0) = EI_z \Phi''(0) = P_1; Z_4^+(0) = -EI_z \Phi'''(0) = P_2;$$

$$Z_1^-(n+1) = \Phi(L) = u_3; Z_2^-(n+1) = \Phi'(L) = u_4; Z_3^-(n+1) = -EI_z \Phi''(L) = P_3; Z_4^-(n+1) = EI_z \Phi'''(L) = P_4.$$

Bằng phương pháp MTC, ta có được quan hệ giữa lực nút và chuyển vị nút [15]

$$[K]\{U\} = \{P\} + \{F\} \quad (3)$$

trong đó $[K]$ là ma trận ĐCĐL của dầm có n vết nứt, $P = [P_1 P_2 P_3 P_4]^T$ là véc tơ các ứng lực nút, $\{F\}$ là véc tơ biên độ phức của tải trọng suy rộng quy về nút.

Khi không có tải trọng ngoài, từ các (2) và (3), ta xác định được các hàm dạng dao động N_1, N_2, N_3, N_4 của phần tử dầm chịu uốn có nhiều vết nứt. Chẳng hạn, để tìm hàm dạng N_1 , ta xác định các ứng lực P_1 và P_2

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix}$$

Như vậy, các tham số của đoạn thứ nhất ($j=1$) là

$$Z_0^+ = \{Z_1^+(0) = 1; Z_2^+(0) = 0; Z_3^+(0) = k_{11}; Z_4^+(0) = k_{12}\} \quad (4)$$

nên hàm dạng N_1 cho đoạn này có dạng

$$N_1^{(1)} = K_1(\lambda \bar{x}) + \frac{K_4(\lambda \bar{x})}{\hat{E}I_z \lambda^3} k_{11} - \frac{K_3(\lambda \bar{x})}{\hat{E}I_z \lambda^2} k_{12} \quad (5)$$

Các tham số của hàm dạng N_1 trên đoạn kế tiếp được xác định qua MTC của đoạn dầm nguyên vẹn và của MTC tại vị trí nứt [17]. Khi không có vết nứt và bỏ qua hệ số cản $\mu_1 = \mu_2 = 0$, từ (5) ta nhận lại được kết quả từ [20]. Hàm dạng của phần tử thanh chịu kéo, nén và xoắn được xác định tương tự.

Việc lắp ghép ma trận ĐCĐL của từng phần tử dầm vào ma trận ĐCĐL của cả kết cấu $\hat{K}(\omega)$ thực hiện tương tự như phương pháp PTHH thông thường. Khi đó, bài toán dao động cưỡng bức của kết cấu dẫn đến giải phương trình đại số

$$\hat{K}(\omega) \hat{U}(\omega) = \hat{F}(\omega) \quad (6)$$

Sau khi xác định được các chuyển vị nút u_1, u_2, u_3, u_4 từ (6) ta xác định được chuyển vị động tại các điểm trên trục dầm có nhiều vết nứt theo hệ thức

$$w(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + N_3(x)u_3 + N_4(x)u_4 \quad (7)$$



3. Phân tích wavelet rời rạc và wavelet dừng

Phân tích wavelet rời rạc có dạng [3]

$$C_{j,k} = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(2^{-j}x - k) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{j,k}(x) dx \quad (8)$$

trong đó

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) \quad (9)$$

là các hàm wavelet rời rạc, j là số mức, $1/a = 2^j$ là độ phân giải, k là thời gian rời rạc.

Xét ở cấp phân tích là J , ta có tập hợp các hệ số chi tiết và xấp xỉ

$$cD_J(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{J,k}(x) dx; cA_J(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_{J,k}(x) dx \quad (10)$$

Tín hiệu được tái tạo trở thành

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^J \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} cD_j(k) \psi_{j,k}(x) \right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} cA_j(k) \phi_{j,k}(x) = \sum_{j \leq J} D_j(x) + A_j(x) \quad (11)$$

trong đó $D_j(x)$ và $A_j(x)$ là hàm chi tiết và xấp xỉ ở mức J

$$D_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} cD_j(k) \psi_{j,k}(x); A_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} cA_j(k) \phi_{j,k}(x) \quad (12)$$

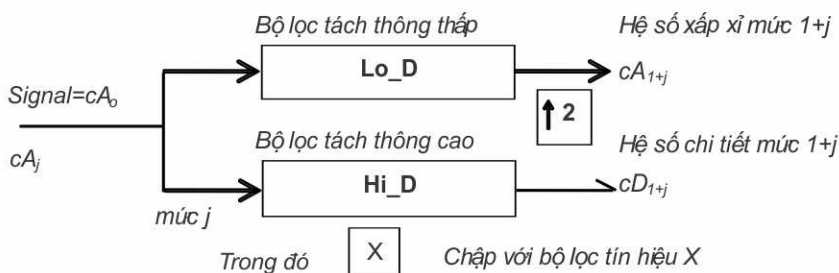
Như vậy, kết quả phân tích DWT tạo ra hàm xấp xỉ $A_j(x)$ ở mức J tương ứng với tín hiệu có tần số thấp và các hàm chi tiết $D_j(x)$ tương ứng với tín hiệu ở tần số cao. Để xác định vết nứt trong kết cấu, ta cần quan tâm đến các chi tiết của tín hiệu. Đồng thời, việc lựa chọn mức phân tách J thích hợp phụ thuộc vào tín hiệu và kinh nghiệm, thường thì mức được chọn dựa trên một tần số cắt thông thấp yêu cầu.

Phân tích DWT có nhược điểm là nó không phải là biến đổi bất biến theo thời gian. Nghĩa là, ngay cả với các tín hiệu tuần hoàn, DWT của một phiên bản đã dịch của tín hiệu gốc $f(x)$ về cơ bản không phải là bản dịch của DWT của tín hiệu gốc $f(x)$. Để khắc phục vấn đề này, thay cho (8) ta sử dụng phân tích rời rạc của tín hiệu $f(x)$ có dạng [8].

$$\tilde{C}_{j,k} = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi\left(\frac{x-k}{2^j}\right) dx; \tilde{D}_{j,k} = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi\left(\frac{x-k}{2^j}\right) dx \quad (13)$$

Phân tích DWT dựa trên (14) được gọi là phân tích wavelet dừng. Nếu như trong DWT, kích thước dãy số liệu sau phân tích DWT của tín hiệu gốc chỉ còn bằng một nửa kích thước của dãy số liệu gốc dẫn đến các hệ số chi tiết của DWT ít thông tin về tín hiệu, thì trong phân tích SWT, kích thước của dãy số liệu sau phân tích SWT của tín hiệu gốc không bị cắt đi một phần nào cả dẫn đến các hệ số chi tiết của SWT có nhiều thông tin hơn về tín hiệu gốc để nhận dạng tín hiệu như tách các điểm nổi bật, điểm gãy của tín hiệu,....

Thuật toán SWT là đơn giản và giống với DWT. Ứng dụng chủ yếu của SWT là hệ số chi tiết mức 1 thu được có kết quả rõ nét và khử nhiễu tốt. Tuy vậy, có một giới hạn là định nghĩa SWT chỉ cho các tín hiệu có chiều dài chia hết cho 2^j , trong đó j là mức phân tách tối đa. Sơ đồ thuật toán SWT thể hiện trên Hình 2. Đối với tín hiệu X có chiều dài N , ta nhận được 2 tập hệ số: hệ số xấp xỉ cA_1 và hệ số chi tiết cD_1 (mức 1). Các véc tơ nhận được nhờ nhân chập X với bộ lọc thông thấp Lo_D để có xấp xỉ, nhờ nhân chập X với bộ lọc thông cao Hi_D để có chi tiết. Các véc tơ cA_1, cD_1 có chiều dài N thay vì $N/2$ như trong DWT.

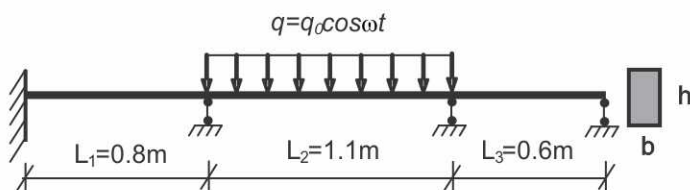


Hình 2. Phân tích wavelet dừng SWT



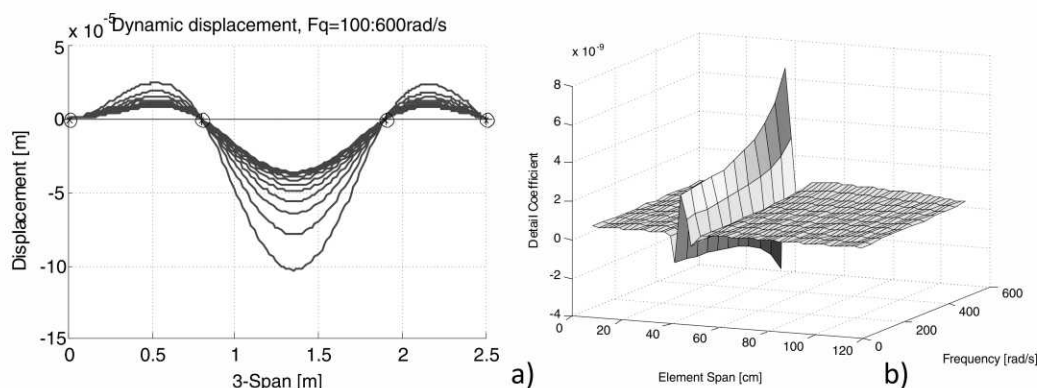
4. Phân tích wavelet đối với chuyển vị động của dầm liên tục có nhiều vết nứt

Xét dầm liên tục với chiều dài các nhịp: $L_1=0.8\text{m}$, $L_2=1.1\text{m}$, $L_3=0.6\text{m}$, tiết diện hình chữ nhật $b \times h=40 \times 20\text{mm}$, mô đun đàn hồi Young $E=2.1 \times 10^{11}\text{N/m}^2$, hệ số Poisson $\nu=0.3$ và khối lượng riêng $\rho=7800\text{kg/m}^3$. Dầm chịu tải trọng phân bố đều có cường độ $q(t)=q_0 \cos \omega t$ với $q_0=100\text{N/m}$ trên đoạn nhịp thứ hai (Hình 3).



Hình 3. Sơ đồ dầm liên tục

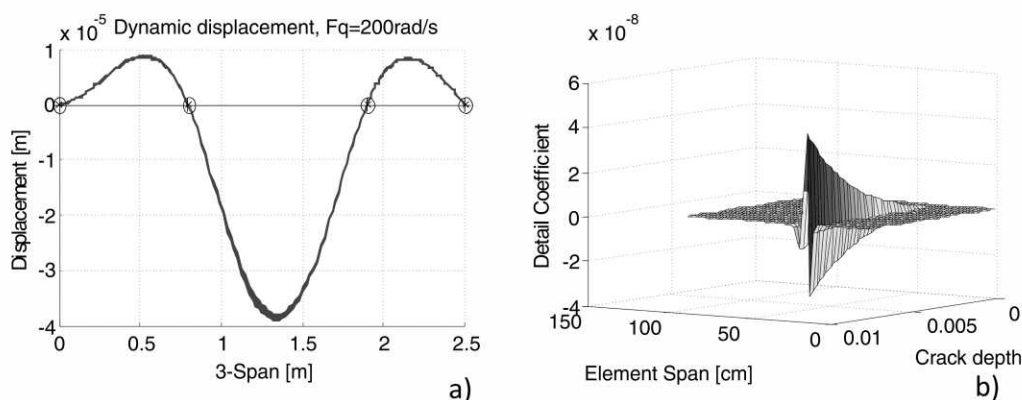
Hình 4a là biểu đồ chuyển vị động của dầm có vết nứt tại vị trí cách nút trái của nhịp 2 là 0.4m với độ sâu vết nứt mỗi phía là 2mm. Dầm chịu tần số kích động có giá trị thay đổi $\omega=100, 150, \dots, 600\text{rad/s}$. Hình 4b là biểu đồ hệ số chi tiết phân tích SWT db4 của chuyển vị động cho nhịp thứ 2 với bước nhảy tại vị trí vết nứt.



Hình 4. Dầm liên tục có 1 vết nứt:

(a) Chuyển vị động của dầm khi tần số thay đổi từ 100rad/s đến 600 rad/s, (b) Biểu đồ hệ số chi tiết SWT

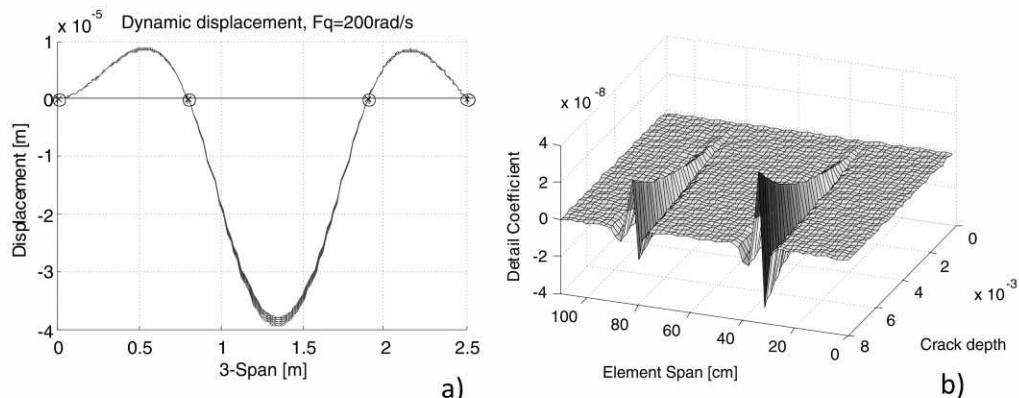
Hình 5a là biểu đồ chuyển vị động của dầm có vết nứt tại vị trí cách nút trái nhịp số 2 là 0.4m với tần số kích động $\omega=200\text{rad/s}$, độ sâu vết nứt tăng dần từ 0 đến 8mm mỗi phía. Hình 5b là biểu đồ hệ số chi tiết phân tích SWT db4 của chuyển vị động cho nhịp thứ 2 với bước nhảy tại vị trí vết nứt.



Hình 5. Dầm liên tục có một vết nứt với độ sâu thay đổi:

(a) Chuyển vị động của dầm khi tần số 200 rad/s, (b) Biểu đồ hệ số chi tiết SWT

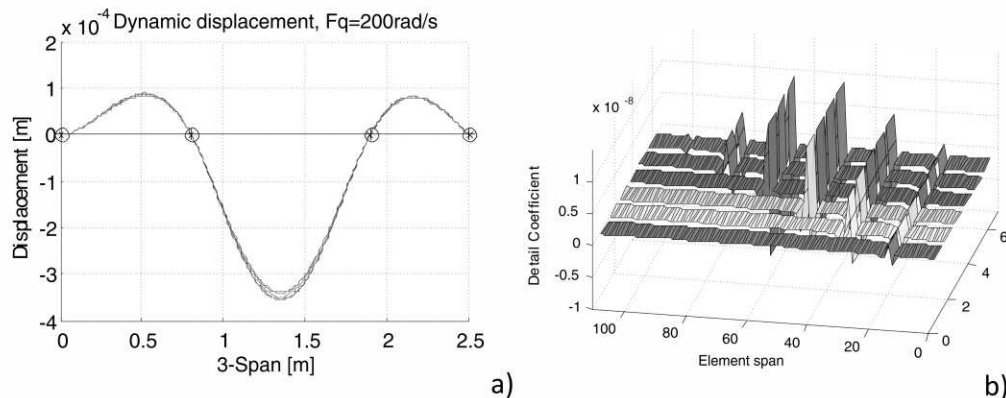
Hình 6a là biểu đồ chuyển vị động của dầm có 2 vết nứt tại vị trí cách nút trái của nhịp 2 lần lượt là 0.4m và 0.8m. Dầm chịu tần số kích động $\omega=200\text{rad/s}$, chiều sâu vết là tăng dần từ 0 đến 8mm mỗi phía. Hình 6b là biểu đồ hệ số chi tiết phân tích SWT db4 của chuyển vị động cho nhịp thứ 2 với bước nhảy tại các vết nứt.



Hình 6. Dầm liên tục có hai vết nứt:

(a) Chuyển vị động của dầm khi tần số 200 rad/s, (b) Biểu đồ hệ số chi tiết SWT

Hình 7a là biểu đồ chuyển vị động của dầm có số lượng vết nứt tăng dần từ 1 đến 6, vết nứt đầu tiên có vị trí cách nút trái nhịp 2 là 0.2m và khoảng cách đều là 0.15m. Dầm chịu tần số kích động $\omega=200\text{rad/s}$, độ sâu các vết nứt đều là 2mm mỗi phía. Hình 7b là biểu đồ hệ số chi tiết phân tích SWT db4 của chuyển vị động cho nhịp thứ 2 với bước nhảy tại các vết nứt.



Hình 7. Dầm liên tục có số lượng vết nứt tăng từ 1 đến 6 với khoảng cách đều:
(a) Chuyển vị động với tần số 200 rad/s, (b) Biểu đồ hệ số chi tiết SWT

Dựa trên các kết quả tính toán, ta có nhận xét như sau:

- Các biểu đồ hệ số chi tiết SWT mức 1 đều có đỉnh trùng với vị trí vết nứt (các Hình 4 - 7). Biên độ tăng khi chiều sâu vết nứt tại vị trí đó tăng (Hình 5)
- Tuy các vết nứt có độ sâu như nhau nhưng biên độ đỉnh hệ số chi tiết SWT tại các vị trí vết nứt khác nhau là khác nhau (Hình 6,7).
- Cùng với một vết nứt biên độ đỉnh của biểu đồ hệ số chi tiết thay đổi khi tần số kích động thay đổi (Hình 4 - 7)



5. Kết luận

Trong bài báo này, các tác giả đã trình bày kết quả nghiên cứu mới về việc xác định vết nứt trong các kết cấu hệ thanh có nhiều vết nứt dựa trên phân tích wavelet dừng đối với chuyển vị động. Biên độ chuyển vị động được xác định dựa trên các hàm dạng của mô hình phần tử thanh đàn hồi chịu kéo, nén, xoắn và uốn có nhiều vết nứt theo phương pháp độ cứng động lực kết hợp với phương pháp ma trận chuyển sử dụng mô hình lò xo của vết nứt. Kết quả tính toán cho thấy phương pháp đề xuất là một phương pháp chẩn đoán cho kết quả tốt và có thể ứng dụng hiệu quả trong thực tế.

Tài liệu tham khảo

1. C. Surace and R. Ruotolo (1994), "Crack Detection of a Beam Using Wavelet Transform", *Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference*, Honolulu, Hawaii, pp.1141-1167.
2. K.M. Liew and Q. Wang (1998), "Application of Wavelet Theory for Crack Identification in Structures", *Journal of Engineering Mechanics*, 124, 152-157.
3. Z. Hou, M. Noori and R.St. Amand (2000), "Wavelet-Based Approach for Structural Damage Detection", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol 126 (7), 677-683.
4. Q. Wang and X. Deng (1999), "Damage Detection with Spatial Wavelets", *International Journal of Solid and Structures* 36, 3443-3468.
5. E. Douka, A. Loutridis and A. Trochidis (2003), "Crack Identification in Beam Using Wavelet Analysis", *International Journal of Solid and Structures*, 40, 3557-3569.
6. C.C. Chang and L.W. Chen (2005), "Detection of the Location and Size of Cracks in the Multiple Cracked Beam by Spatial Wavelet Based Approach", *Mechanical Systems and Signal processing*, 19, 139-155.

7. X.Q. Zhu and S.S. Law (2006), "Wavelet-based Crack Identification of Bridge Beam from Operational Deflection Time History", *International Journal of Solid and Structures*, 43, 2299-2317.
8. S. Zhong and O. Oyadiji (2007), "Crack Detection in Simply Supported Beams without Baseline Modal Parameters by Stationary Wavelet Transform", *Mechanical Systems and Signal processing*, 21, 1853-1884.
9. Viet Khoa Nguyen, Olatunbosun, Khiem N.T. (2007), "Wavelet based Method for remote monitoring of structural health by analysing the nonlinearity in dynamic response of damaged structures caused by crack – breathing phenomenon", *Technische mechanik*, Band 28, Heft 3-4;
10. Nguyễn Thị Hiền Lương, Lý Vĩnh Phan (2009), "Phân tích độ nhạy cảm của dầm có vết nứt bằng phép biến đổi wavelet", *Tuyển tập công trình Hội nghị cơ học toàn quốc 8-9/4/2009*, tập 1, trang 115;
11. Trần Thanh Hải (2011), *Chẩn đoán vết nứt của dầm bằng phương pháp đo rung động*, Luận án Tiến sĩ Kỹ thuật, Viện Cơ học.
12. Nguyễn Việt Khoa, Nguyễn Văn Quang, Trần Thanh Hải, Cao Văn Mai, Đào Như Mai (2012), "Giám sát vết nứt thờ của dầm bằng phân tích wavelet: nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm", *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ IX*, Hà nội, 8-9/12/2012;
13. A.V. Ovanesova and L.E. Suárez (2004), "Applications of Wavelet Transforms to Damage Detection in Frame Structure", *Engineering Structures*, 26, 39–49.
14. Khiem N.T. and Lien T.V. (2001), "A simplified method for natural frequency analysis of a multiple cracked beam", *Journal of Sound and vibration*, 2001, 245(4): 737-751.
15. Khiem N.T., Lien T.V. (2002), "The dynamic stiffness matrix method in forced vibration analysis of multiple cracked beam", *Journal of Sound and Vibration*, 254(3), 541-555.
16. Trần Văn Liên, Trần Tuấn Khôi (2010), "Xác định các vết nứt trong kết cấu hệ thanh bằng phân tích wavelet các chuyển vị tĩnh", *Tuyển tập Hội nghị khoa học toàn quốc CHVRBD lần thứ X*, Thái nguyên, 12-13/11/2010;
17. Tran Van Lien, Trinh Anh Hao, "Determination of the shape function of a multiple cracked beam element and its application for the free vibration analysis of a multiple cracked frame structure", *American Journal of Civil Engineering and Architecture*, Science and Education Publishing, Vol. 2, No. 1, 2014, pages 12-25.
18. Tran Van Lien, Nguyen Tien Khiem, Trinh Anh Hao (2014), "Crack identification in frame structures by using the stationary wavelet transform of mode shapes", *Jokull Journal*, Vol. 64.
19. Rao S.S. (1986), *Mechanical vibrations*, Second Edition, Addison-Wesley Pub Company.
20. Y.T. Leung (1993), *Dynamic Stiffness and Substructures*, Springer-Verlag, London.