



TÍNH TOÁN ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA TIẾT DIỆN THANH THÀNH MỎNG KÍN CHỊU XOẮN

Nguyễn Minh Tuyền¹, Bùi Hùng Cường²

Tóm tắt: Bài báo trình bày các lý thuyết xoắn thuần túy và xoắn kiểm chế của thanh thành mỏng tiết diện kín. Từ đó, đã thiết lập được các công thức tính toán đặc trưng hình học khi xoắn của tiết diện thanh thành mỏng kín. Một vài ví dụ được thực hiện để làm rõ cách tính toán mômen quán tính khi xoắn thuần túy, biểu đồ tọa độ quạt và mômen quán tính quạt.

Từ khóa: Thanh thành mỏng; tiết diện kín; tiết diện kín - hở; xoắn kiểm chế; tọa độ quạt; mômen quán tính quạt; mômen quán tính khi xoắn thuần túy; đặc trưng hình học tiết diện.

Summary: This paper presents uniform torsion and non-uniform torsion theories of thin-walled members of closed section. Formulas for the calculation of the geometrical properties of thin-walled closed sections subjected to torsion are established. Some examples are performed to bring out the calculation of the Saint Venant torsion constant, diagram of sectorial coordinates and warping constant.

Keywords: Hin-walled section; closed section; closed-opened section; warping torsion; sectorial ordinates; warping section constant; torsion section constant; geometrical properties of section.

Nhận ngày 11/5/2015, chỉnh sửa ngày 25/5/2015, chấp nhận đăng 30/9/2015



1. Mở đầu

Thanh thành mỏng được tạo hình nguội (dập nguội, cán nguội) đã được áp dụng nhiều ở trên thế giới (châu Âu, Mỹ, Úc,...) và bắt đầu phát triển ở Việt Nam (qua sản phẩm của các công ty nước ngoài Zamil Steel, Bluescopes). Lý thuyết thanh thành mỏng tiết diện hở cổ điển đã được Vlasov [1] phát triển từ những năm 30 của thế kỷ 20 và hiện nay nhiều nước đã có quy phạm, tiêu chuẩn về tính toán, thiết kế kết cấu thành mỏng (châu Âu [2], Mỹ [3], Úc [4], Trung Quốc). Khi tính toán thanh thành mỏng việc xác định các đặc trưng hình học của tiết diện là bước đầu tiên và quan trọng. Dựa trên các công thức tổng quát của Murray [6], một nghiên cứu trước đây [5] đã lập một chương trình tính toán các đặc trưng hình học của thanh thành mỏng tiết diện hở bất kỳ. Bài báo này là phần nghiên cứu tiếp theo áp dụng cho thanh thành mỏng tiết diện kín và tiết diện kín-hở kết hợp. Loại hình kết cấu này xuất hiện nhiều trong xây dựng như: dầm hộp, dầm nhiều bản bụng, lõi cứng bê tông cốt thép trong nhà cao tầng. Việc nghiên cứu cách tính toán đặc trưng hình học của các loại tiết diện đó là cần thiết trong phân tích kết cấu.

Dựa trên lý thuyết tính toán thanh thành mỏng tiết diện hở của Vlasov, Von Karman và Christensen [7] đã thiết lập lý thuyết gần đúng tính toán thanh thành mỏng tiết diện kín. Giả thiết cơ bản nhất của lý thuyết gần đúng này là biến dạng trượt gây ra bởi xoắn kiểm chế bằng không, $\gamma_w = 0$ và chỉ có kể đến biến dạng trượt gây ra do xoắn thuần túy Saint-Venant (1853). Điều đó có nghĩa là quan hệ giữa ứng suất tiếp τ_w và biến dạng trượt γ_w không được sử dụng để tính toán τ_w . Việc xác định τ_w được thực hiện bằng cách xét điều kiện cân bằng theo phương trục thanh. Điều đó tương tự như giả thiết tiết diện phẳng của Bernoulli trong lý thuyết dầm. Giả thiết Bernoulli dẫn đến biến dạng trượt bằng không và lực cắt được tính toán dựa trên cân bằng của phần tử theo phương trục dầm.

¹ThS, Khoa Xây dựng dân dụng và công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng. E-mail: stream.80@gmail.com.

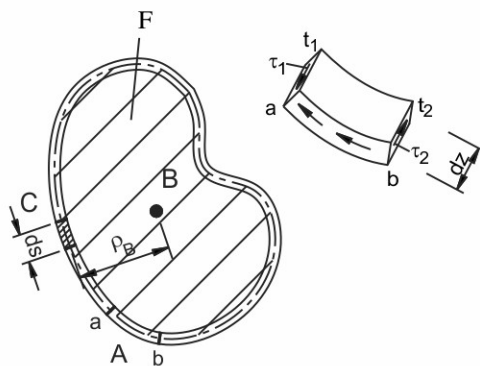
²PGS.TS, Khoa Xây dựng dân dụng và công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng.

Trước hết, bài báo trình bày lý thuyết xoắn thuần túy của Saint-Venant sau đó trình bày lý thuyết của Von Karman và Christensen. Các công thức tính toán các đặc trưng xoắn của tiết diện lần lượt được thiết lập, cụ thể là mô men quán tính khi xoắn thuần túy, biểu đồ quạt và mô men quán tính quạt. Các công thức được áp dụng vào một vài dạng tiết diện kín điển hình để có được các kết quả ở dạng giải tích của các đặc trưng xoắn. Nghiên cứu cũng thực hiện tính toán số với dạng tiết diện kín - hở kết hợp.



2. Lý thuyết xoắn thuần túy thanh thành mỏng tiết diện kín - lý thuyết Saint - Venant

Theo lý thuyết của Saint - Venant, đối với dầm có tiết diện không đổi chịu uốn thuần túy thì trên tiết diện chỉ tồn tại ứng suất tiếp.



Hình 1. Tiết diện kín một khoang

Trong trường hợp tiết diện kín có một khoang như trên Hình 1, xét cân bằng phân tố A theo phương trục z.

$$\tau_1 t_1 dz = \tau_2 t_2 dz \rightarrow T_1 = T_2 \quad (1)$$

trong đó: T_1 và T_2 là ứng lực tiếp τt . Như vậy, ứng lực tiếp quanh tiết diện kín là không đổi. Lấy mômen của lực trên phân tố C đối với một điểm B bất kỳ.

$$dM = T p_B ds \quad (2)$$

Bằng cách tích phân theo chu vi của tiết diện, có được:

$$M = 2TF \quad (3)$$

trong đó: F là diện tích được bao bởi đường trung bình của thành mỏng.

Góc xoắn được tìm bằng cách cân bằng công ngoại lực và công nội lực.

$$\frac{1}{2} M d\phi = \oint \frac{1}{2} \tau t ds dz \quad (4)$$

Thay phương trình (3) vào phương trình (4) nhận được:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{2GF} \oint \frac{T}{t} ds = \frac{M}{G} \oint \frac{ds}{4F^2} \quad (5)$$

$$\text{Đặt } J_p = \frac{4F^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (6)$$

J_p được gọi là mômen quán tính khi xoắn thuần túy.

Như vậy, mô men xoắn thuần túy trên tiết diện được xác định.

$$M = G \frac{d\phi}{dz} J_p \quad (7)$$

Đối với tiết diện kín-hở kết hợp, ví dụ tiết diện bao gồm một khoang kín và các khoang hở, ta có thể dùng nguyên lý cộng tác dụng. Mô men xoắn thuần túy trên toàn tiết diện bằng tổng của các mô men xoắn trên phần tiết diện kín và trên phần tiết diện hở.

$$M = (\sum M)_{ho} + M_{kin} = G \frac{d\phi}{dz} [(\sum J_p)_{ho} + (J_p)_{kin}] = G \frac{d\phi}{dz} J_p \quad (8)$$

Mô men xoắn thuần túy trên phần tiết diện kín và trên phần tiết diện hở được xác định như sau:

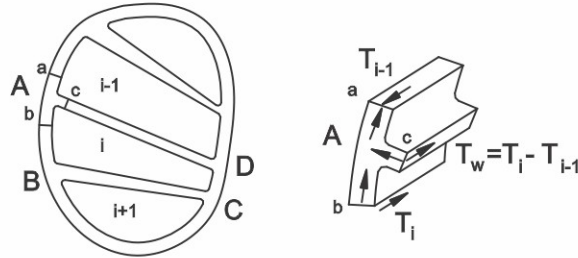
$$M_{kin} = M \frac{(J_p)_{kin}}{J_p}; \quad (\sum M)_{ho} = M \frac{(\sum J_p)_{ho}}{J_p} \quad (9)$$

Khi tiết diện bao gồm một vài khoang kín như Hình 2, xét cân bằng tại điểm nối.

$$T_w = T_i - T_{i-1} \quad (10)$$

Đối với khoang thứ i, từ biểu thức (3): $M_i = 2T_i F_i$

$$\text{Và cho toàn bộ tiết diện: } M = \sum 2T_i F_i \quad (11)$$



Hình 2. Tiết diện kín nhiều khoang

Góc xoắn của khoang thứ i được tính từ biểu thức (5).

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{2GF_i} \left[\oint \frac{T}{t} ds \right]_i = \frac{1}{2GF_i} \left[-T_{i-1} \int_A^D \frac{ds}{t} + T_i \int_A^C \frac{ds}{t} - T_{i+1} \int_B^C \frac{ds}{t} \right] \quad (12)$$

Biết rằng $d\phi/dz$ là không đổi đối với mọi khoang, đặt:

$$\psi_i = \frac{T_i}{G \frac{d\phi}{dz}} \quad (13)$$

Hệ phương trình (12) được biến đổi:

$$\frac{1}{2F_i} \left[-\psi_{i-1} \int_A^D \frac{ds}{t} + \psi_i \int_A^C \frac{ds}{t} - \psi_{i+1} \int_B^C \frac{ds}{t} \right] = 1 \quad (14)$$

Giải hệ phương trình (14) nhận được các giá trị ψ_i , thay vào (13) rồi vào (11) sẽ nhận được quan hệ sau:

$$M = G \frac{d\phi}{dz} \sum 2\psi_i F_i \quad (15)$$

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{M}{G(\sum 2\psi_i F_i)} \quad (16)$$

Mô men quán tính khi xoắn thuần túy của tiết diện kín nhiều khoang được xác định:

$$J_p = 2 \sum \psi_i F_i \quad (17)$$

Khi tiết diện kín chỉ có một khoang và từ công thức (5), ta có:

$$\psi = \frac{T}{G \frac{d\phi}{dz}} = \frac{2F}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (18)$$

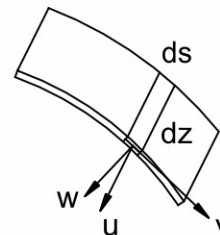


3. Lý thuyết gần đúng khi xoắn của thanh thành mỏng tiết diện kín - Lý thuyết Von Karman và Christensen

3.1 Giả thiết của Von Karman và Christensen

Hình 3 thể hiện một phân tố thành mỏng $dzds$ với các chuyển vị u , v trong mặt phẳng theo các phương z , s ; w là chuyển vị theo phương vuông góc với mặt phẳng phân tố.

Trong lý thuyết xoắn thanh thành mỏng tiết diện hở, giả thiết cơ bản của Vlasov là biến dạng trượt toàn phần trong mặt phẳng tầm bằng không.



Hình 3. Phân tố thành mỏng

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

Đối với xoắn thanh thành mỏng tiết diện kín, lý thuyết gần đúng của Von Karman và Christensen giả thiết biến dạng trượt toàn phần bằng biến dạng trượt thuần túy Saint-Venant γ_s hay nói cách khác là bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt do xoắn kiểm chế γ_w .

$$\gamma_{zs} = \gamma_s + \gamma_w = \gamma_s \quad (20)$$

$$\rightarrow \gamma_{zs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{T_i}{Gt} \quad (21)$$

Công thức (21) viết cho từng khoang kín với T_i là ứng lực tiếp gây ra do xoắn thuần túy trong thành mỏng của khoang thứ i . Thay công thức (13) vào công thức (21).

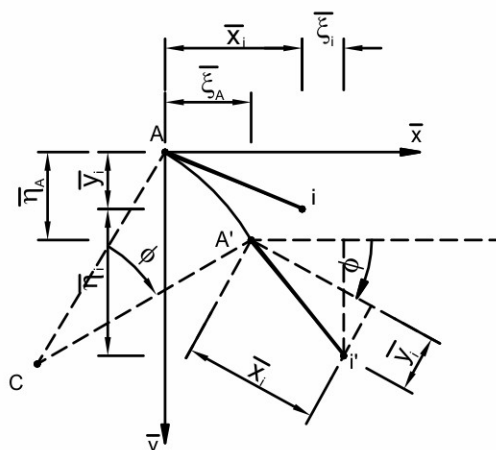
$$\gamma_{zs} = \frac{\psi_i}{t} \frac{d\phi}{dz} \quad (22)$$

$$\rightarrow \gamma_{zs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\psi_i}{t} \frac{d\phi}{dz} \quad (23)$$

3.2 Xác định các chuyển vị

3.2.1 Chuyển vị trong mặt phẳng tiết diện thanh

Xét tiết diện thanh thành mỏng quay xung quanh gốc C bất kỳ một góc theo chiều kim đồng hồ.



Hình 4. Chuyển vị của điểm i khi điểm A quay xung quanh gốc C một góc ϕ

Theo Hình 4, xác định được chuyển vị $\bar{\xi}_i$ và $\bar{\eta}_i$ của điểm i khi điểm A quay xung quanh gốc C một ϕ , đoạn Ai coi như tuyệt đối cứng.

$$\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_A - \bar{x}_i + \bar{x}_i \cos \phi - \bar{y}_i \sin \phi \quad (24)$$

$$\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_A - \bar{y}_i + \bar{x}_i \sin \phi + \bar{y}_i \cos \phi \quad (25)$$

Khi góc xoay nhỏ, sử dụng gần đúng sau

$$\sin \phi \approx \phi, \quad \cos \phi \approx 1 \quad (26)$$

Do đó:

$$\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_A - \bar{y}_i \phi \quad (27)$$

$$\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_A + \bar{x}_i \phi \quad (28)$$

Tương tự, ta có thể biểu diễn chuyển vị của điểm B bất kỳ qua chuyển vị của điểm A :

$$\bar{\xi}_B = \bar{\xi}_A - \bar{y}_B \phi \quad (29)$$

$$\bar{\eta}_B = \bar{\eta}_A + \bar{x}_B \phi \quad (30)$$

Từ các công thức (27) + (30) có thể biểu diễn chuyển vị của điểm i qua chuyển vị của điểm B và góc xoắn ϕ .

$$\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_B - (\bar{y}_i - \bar{y}_B)\phi \quad (31)$$

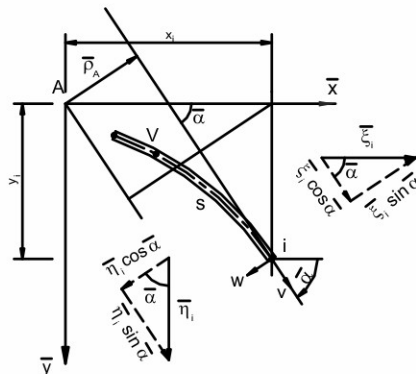
$$\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_B + (\bar{x}_i - \bar{x}_B)\phi \quad (32)$$

Từ Hình 5 và các công thức (27), (28) xác định được chuyển vị v và w qua chuyển vị của điểm A

$$v = \bar{\xi}_i \cos \bar{\alpha} + \bar{\eta}_i \sin \bar{\alpha} = \bar{\xi}_A \cos \bar{\alpha} + \bar{\eta}_A \sin \bar{\alpha} + \left[\bar{x}_i \sin \bar{\alpha} - \bar{y}_i \cos \bar{\alpha} \right] \phi \quad (33)$$

$$w = -\bar{\xi}_i \sin \bar{\alpha} + \bar{\eta}_i \cos \bar{\alpha} = -\bar{\xi}_A \sin \bar{\alpha} + \bar{\eta}_A \cos \bar{\alpha} + \left[\bar{x}_i \cos \bar{\alpha} + \bar{y}_i \sin \bar{\alpha} \right] \phi \quad (34)$$

Trong đó chuyển vị v theo phương tiếp tuyến còn chuyển vị w theo phương vuông góc với mặt phẳng tấm tại điểm i , cả hai chuyển vị w , v đều nằm trong mặt phẳng tiết diện thanh thành mỏng.



Hình 5. Phân tích chuyển vị $\bar{\xi}_i$, $\bar{\eta}_i$ theo hai phương của chuyển vị v , w tại điểm i

Biểu thức trong ngoặc vuông của các công thức (33), (34) chính là các thành phần của véc tơ A_i chiếu theo hai phương của chuyển vị v , w . Gọi $\bar{\rho}_A$ là thành phần của véc tơ A_i theo phương của w , đó chính là khoảng cách từ A đến đường tiếp tuyến với đường trung bình của thành mỏng tại i như trên Hình 5. Từ công thức (33):

$$v = \bar{\xi}_i \cos \bar{\alpha} + \bar{\eta}_i \sin \bar{\alpha} = \bar{\xi}_A \cos \bar{\alpha} + \bar{\eta}_A \sin \bar{\alpha} + \bar{\rho}_A \phi \quad (35)$$

Tương tự, từ Hình 5 và các công thức (31), (32) xác định được chuyển vị v và w qua chuyển vị của điểm B:

$$v = \bar{\xi}_B \cos \bar{\alpha} + \bar{\eta}_B \sin \bar{\alpha} + \left[(\bar{x}_i - \bar{x}_B) \sin \bar{\alpha} - (\bar{y}_i - \bar{y}_B) \cos \bar{\alpha} \right] \phi \quad (36)$$

$$w = -\bar{\xi}_B \sin \bar{\alpha} + \bar{\eta}_B \cos \bar{\alpha} + \left[(\bar{x}_i - \bar{x}_B) \cos \bar{\alpha} + (\bar{y}_i - \bar{y}_B) \sin \bar{\alpha} \right] \phi \quad (37)$$

Như trên, biểu thức trong ngoặc vuông của các công thức (36), (37) là các thành phần của véc tơ B_i chiếu theo hai phương của chuyển vị v , w . Gọi $\bar{\rho}_B$ là khoảng cách từ B đến đường tiếp tuyến với đường trung bình của thành mỏng. Từ công thức (36):

$$v = \bar{\xi}_B \cos \bar{\alpha} + \bar{\eta}_B \sin \bar{\alpha} + \bar{\rho}_B \phi \quad (38)$$

3.2.2. Chuyển vị ngoài mặt phẳng tiết diện thanh

Từ các công thức (23), (38) nhận được:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\psi_i}{t} \frac{d\phi}{dz} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{d\bar{\xi}_B(z)}{dz} \cos \bar{\alpha}(s) - \frac{d\bar{\eta}_B(z)}{dz} \sin \bar{\alpha}(s) - \frac{d\phi(z)}{dz} \left[\bar{\rho}_B(s) - \frac{\psi_i(z)}{t(s)} \right] \quad (40)$$

Lấy tích phân phương trình (40) theo đường trung bình của thành mỏng từ điểm gốc V đến điểm i đang xét (Hình 5), khoảng cách V_i là s tính từ V

$$u = -\frac{d\bar{\xi}_B(z)}{dz} \int_0^s \cos \bar{\alpha}(s) ds - \frac{d\bar{\eta}_B(z)}{dz} \int_0^s \sin \bar{\alpha}(s) ds - \frac{d\phi(z)}{dz} \int_0^s \left[\bar{\rho}_B(s) - \frac{\psi_i(z)}{t(s)} \right] ds + \bar{\xi}(z) \quad (41)$$

trong đó, $\bar{\zeta}(z)$ là hằng số tích phân đối với tọa độ s .

Đề ý rằng

$$dx = ds \cos \bar{\alpha}(s) \quad dy = ds \sin \bar{\alpha}(s) \quad (42)$$

Đặt $\bar{\omega}_B(s) = \int_0^s \left[\bar{\rho}_B(s) - \frac{\Psi_i(z)}{t(s)} \right] ds$ (43)

$\bar{\omega}_B(s)$ được gọi là tọa độ quạt của tiết diện thành mỏng kín.

Lưu ý: theo lý thuyết thanh thành mỏng tiết diện hở của Vlasov, tọa độ quạt được xác định theo công thức sau:

$$\bar{\omega}_B(s) = \int_0^s \bar{\rho}_B(s) ds \quad (44)$$

Công thức (44) có thể nhận được bằng cách sử dụng công thức (19) thay thế cho công thức (23) trong các biến đổi của mục 3.2.2. Các công thức xác định tọa độ quạt (43) và (44) nêu rõ sự khác nhau giữa lý thuyết thanh thành mỏng tiết diện kín và lý thuyết thanh thành mỏng tiết diện hở.

Thay (42) và (43) vào công thức (41) nhận được công thức thể hiện chuyển vị ngoài mặt phẳng tiết diện thanh (chuyển vị dọc trục thanh thành mỏng):

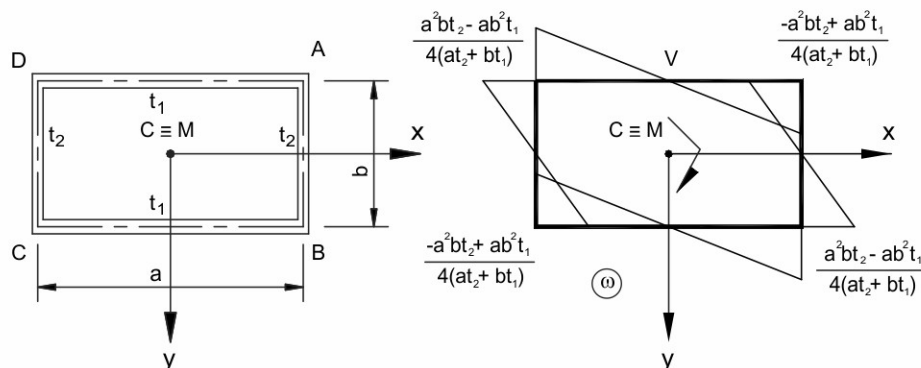
$$u = -\frac{d\bar{\zeta}_B(z)}{dz} \bar{x}(s) - \frac{d\bar{\eta}_B(z)}{dz} \bar{y}(s) - \frac{d\phi(z)}{dz} \bar{\omega}_B + \bar{\zeta}(z) \quad (45)$$



4. Ví dụ áp dụng

4.1 Ví dụ 1: Tiết diện hộp kín một khoang

Hãy xác định các đặc trưng hình học của thanh thành mỏng tiết diện hộp chữ nhật kín một khoang (Hình 6).



Hình 6. Biểu đồ tọa độ quạt của thanh thành mỏng tiết diện hộp kín một khoang

Mô men quán tính khi xoắn thuần túy của tiết diện chữ nhật có một khoang kín như trên Hình 6 được xác định theo công thức (6)

$$J_p = \frac{4F^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4(ab)^2}{\frac{2a}{t_1} + \frac{2b}{t_2}} = \frac{2a^2b^2t_1t_2}{at_2 + bt_1}$$

Do tiết diện có hai trục đối xứng nên trọng tâm C và tâm xoắn M của tiết diện trùng nhau và chính là giao điểm của hai trục đối xứng. Từ công thức (18)

$$\Psi = \frac{2F}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{2ab}{\frac{2a}{t_1} + \frac{2b}{t_2}} = \frac{abt_1t_2}{at_2 + bt_1}$$

Xác định tọa độ quạt đối với tâm xoắn M theo công thức (43)

$$\omega_M(A) = \int_0^{a/2} \left(\frac{b}{2} - \frac{abt_2}{at_2 + bt_1} \right) ds = \frac{-a^2bt_2 + ab^2t_1}{4(at_2 + bt_1)}; \quad \omega_M(B) = -\omega_M(A)$$

Mô men quán tính quạt tính theo phương pháp nhân biểu đồ

$$I_{\bar{\omega}} = \int_A \omega^2 dA = \frac{1}{3} \sum_k (\omega_i^2 + \omega_j^2 + \omega_i \omega_j)_k A_k = \frac{1}{12} (at_1 + bt_2) \frac{(a^2 bt_2 - ab^2 t_1)^2}{(at_2 + bt_1)^2}$$

Khi $t_1 = t_2 = t$

$$J_p = \frac{2a^2 b^2 t}{a+b} ; \omega_M(A) = \omega_M(C) = \frac{-a^2 b + ab^2}{4(a+b)} ; \omega_M(B) = \omega_M(D) = \frac{a^2 b - ab^2}{4(a+b)}$$

$$I_{\omega} = \frac{a^2 b^2 (a-b)^2 t}{12(a+b)}$$

Công thức tính J_p khi bề dày thành mỏng không đổi trùng với các kết quả đã được nêu trong các tài liệu [8, 9].

Khi tiết diện hộp kín vuông $a = b$ và $t_1 = t_2 = t$

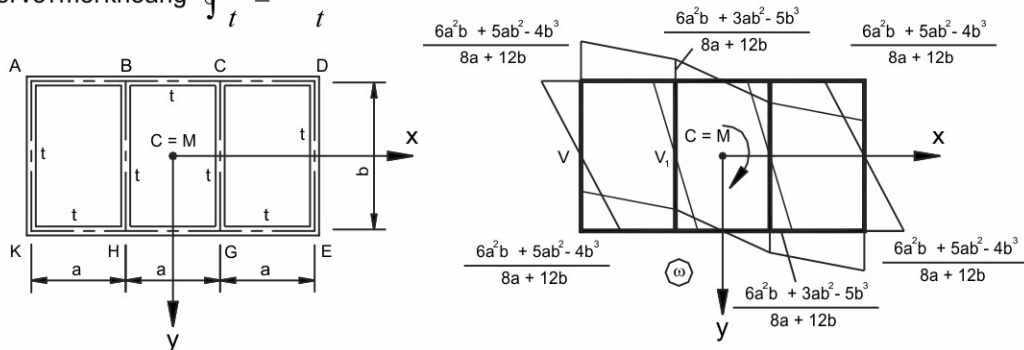
$$J_p = a^3 t ; \omega_M(A) = \omega_M(B) = \omega_M(C) = \omega_M(D) = 0 ; I_{\omega} = 0$$

Như vậy, tiết diện hộp kín vuông có bề dày thành mỏng không đổi không bị vênh ra ngoài mặt phẳng tiết diện khi chịu xoắn, có nghĩa là thanh thành mỏng tiết diện hộp kín vuông chỉ chịu xoắn thuần túy mà không có xoắn kiểm chế.

4.2 Ví dụ 2: Tiết diện hộp kín ba khoang đều nhau

Hãy xác định các đặc trưng hình học của thanh thành mỏng tiết diện hộp chữ nhật kín ba khoang đều nhau (Hình 7).

Đối với mỗi khoang $\oint \frac{ds}{t} = \frac{2(a+b)}{t}$



Hình 7. Biểu đồ tọa độ quạt của thanh thành mỏng tiết diện hộp kín ba khoang

Đối với mỗi bản bụng ở giữa: $\int \frac{ds}{t} = \frac{b}{t}$

Từ công thức (14), ta thiết lập được hệ phương trình

Đối với khoang 1: $\frac{1}{2ab} \left[\frac{2(a+b)}{t} \psi_1 - \frac{b}{t} \psi_2 \right] = 1$

Đối với khoang 2: $\frac{1}{2ab} \left[-\frac{b}{t} \psi_1 + \frac{2(a+b)}{t} \psi_2 - \frac{b}{t} \psi_3 \right] = 1$

Đối với khoang 3: $\frac{1}{2ab} \left[-\frac{b}{t} \psi_2 + \frac{2(a+b)}{t} \psi_3 \right] = 1$

Giải hệ phương trình trên có: $\psi_1 = \psi_3 = \frac{2b(a+b)t}{2a+3b}$; $\psi_2 = \frac{2b(a+2b)t}{2a+3b}$

Xác định tọa độ quạt đối trên chu vi hình hộp, với tâm xoắn M theo công thức (43) và chọn điểm gốc V như trên Hình 7.

$$\omega_M(A) = \int_0^{b/2} \left[\frac{3a}{2} - \frac{2b(a+b)}{2a+3b} \right] ds = \frac{6a^2b + 5ab^2 - 4b^3}{4(2a+3b)} ; \omega_M(A) = -\omega_M(D) = \omega_M(E) = -\omega_M(K)$$

$$\omega_M(B) = \omega_M(A) + \int_0^a \left[\frac{b}{2} - \frac{2b(a+b)}{2a+3b} \right] ds = \frac{6a^2b + ab^2 - 6b^3}{4(2a+3b)} ; \omega_M(B) = -\omega_M(C) = \omega_M(G) = -\omega_M(H)$$

Đối với bản bụng BH, chọn điểm gốc V_1 như trên Hình 8.

$$\Psi_{HB} = \Psi_2 - \Psi_1 = \frac{2b^2 t}{2a+3b}; \quad \omega_M(B) = \int_0^{b/2} \left[\frac{a}{2} - \frac{2b^2}{2a+3b} \right] ds = \frac{2a^2 b + 3ab^2 - 4b^3}{4(2a+3b)}$$

Mô men quán tính khi xoắn thuần túy được tính theo công thức (17)

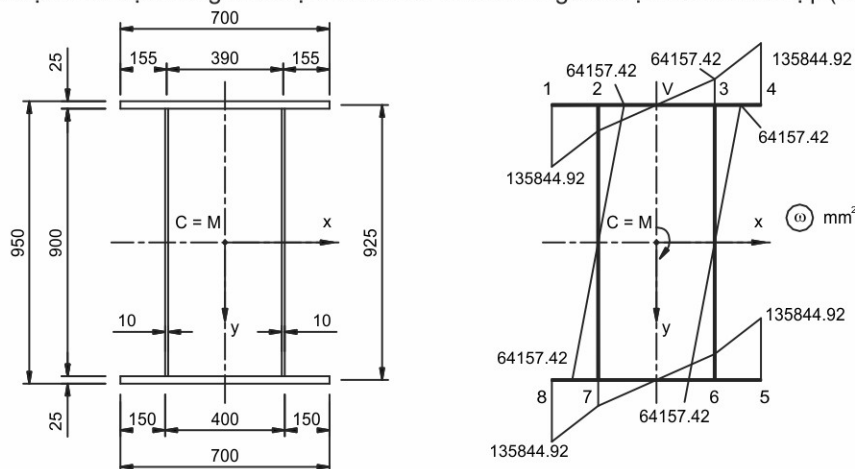
$$J_p = 2 \sum \Psi_i F_i = 2 \left[2 \frac{2b(a+b)t}{2a+3b} ab + \frac{2b(a+2b)t}{2a+3b} ab \right] = \frac{4ab^2(3a+4b)t}{2a+3b}$$

Mô men quán tính quật tính theo phương pháp nhân biểu đồ

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA = \frac{1}{3} \sum_k (\omega_i^2 + \omega_j^2 + \omega_i \omega_j)_k A_k = \frac{2t}{3} \frac{(272a^5 b^2 + 292a^4 b^3 - 305a^3 b^4 - 232a^2 b^5 + 113ab^6 + 32b^7)}{(8a+12b)^2}$$

4.3 Ví dụ 3: Tiết diện kín - hờ kết hợp

Hãy xác định các đặc trưng hình học của thanh thành mỏng tiết diện kín-hờ kết hợp (Hình 8).



Hình 8. Biểu đồ tọa độ quật của thanh thành mỏng tiết diện kín - hờ kết hợp

Từ công thức (18): $\Psi = \frac{2F}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{2 \times 390 \times 925}{\frac{2 \times 390}{25} + \frac{2 \times 925}{10}} = 3337.19 \text{ mm}^2$

Chọn điểm gốc V như trên Hình 8.

Xác định các tọa độ quật cho phần tiết diện kín với tâm xoắn M và điểm gốc V theo công thức (43) của lý thuyết Von Karman và Christensen

$$\omega_3 = 0 + \int_0^{195} \left(\frac{925}{2} - \frac{3337.19}{25} \right) ds = 64157.42 \text{ mm}^2 = -\omega_2 = -\omega_6 = \omega_7$$

Xác định các tọa độ quật cho phần tiết diện hờ, áp dụng công thức tính toán tọa độ quật theo lý thuyết Vlasov

$$\omega_4 = 64157.42 + \int_0^{155} \frac{925}{2} ds = 135844.92 \text{ mm}^2 = -\omega_1 = -\omega_5 = \omega_8$$

Mô men quán tính khi xoắn thuần túy là tổng của phần tiết diện kín và phần tiết diện hờ

$$J_p = (J_p)_{kin} + (\sum J_p)_{ho} = \frac{4F^2}{\oint \frac{ds}{t}} + \sum \left(\frac{1}{3} b_i t_i^3 \right) = \frac{4 \times (390 \times 925)^2}{\frac{2 \times 390}{25} + \frac{2 \times 925}{10}} + 4 \times \left(\frac{1}{3} \times 155 \times 25^3 \right)$$

$$J_p = 2407.78 \times 10^6 + 3.23 \times 10^6 = 2411.01 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Rõ ràng mô men quán tính khi xoắn thuần túy của phần tiết diện hờ rất nhỏ so phần tiết diện kín. Vì vậy, khi xác định mô men quán tính khi xoắn thuần túy của các dạng tiết diện kín-hờ, có thể chỉ cần xét phần tiết diện kín để đơn giản bài toán.

Mô men quán tính quật được xác định theo phương pháp nhân biểu đồ

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA = \frac{1}{3} \sum_k (\omega_i^2 + \omega_j^2 + \omega_i \omega_j)_k A_k = 213.78 \times 10^{12} \text{ mm}^6$$



5. Kết luận

Bài báo trình bày các lý thuyết xoắn thuần túy và xoắn kiểm chế thanh thành mỏng tiết diện kín. Thông qua hai lý thuyết nói trên, lần lượt các công thức tính toán các đặc trưng xoắn của tiết diện thành mỏng kín được thiết lập, đó là mô men quán tính khi xoắn thuần túy, biểu đồ tọa độ quạt và mô men quán tính quạt. Các ví dụ được thực hiện với một vài tiết diện thành mỏng kín nhằm làm rõ qui trình tính toán. Một số kết quả biểu diễn ở dạng giải tích có thể áp dụng trong thực tế tính toán kết cấu.

Tài liệu tham khảo

1. Vlasov, V. Z. (1961), *Thin-walled elastic beams*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.
2. EUROCODE 3 (2006), *Design of steel structures. Part 1-3: General rules-Supplementary rules for cold-formed members and sheeting*, EN 1993-1-3.
3. AISI (2007), *Specifications for the Design of Cold-formed steel structural Members*, AISI S100-07, American Iron and Steel Institute.
4. AS/NZS 4600 (2005), *Cold-formed steel structures*, Australian/New Zealand Standard.
5. Bùi Hùng Cường (2010), "Tính toán các đặc trưng hình học của tiết diện thanh thành mỏng hở", *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, Trường Đại học Xây dựng, số 8, trang 16-28.
6. Murray, N. W. (1984), *Introduction to the theory of thin-walled structures*, Clarendon Press, Oxford.
7. Von Karman, T. and Christensen, N.B. (1944), "Methods of analysis for torsion with variable twist", *J. Aero. Sci. (II)*, 2, pp.110-124.
8. Phan Quang Minh (2010), *Bê tông cốt thép-Phần kết cấu nhà cửa*, NXB Khoa học Kỹ thuật, Hà Nội.
9. Bourrier, P. et Brozzetti, J. (1996), *Construction métallique et mixte acier-béton. Partie 1: Calcul et dimensionnement selon les Eurocodes 3 et 4*, Eyrolles.