



PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA TẤM TRỤC HƯỚNG TRÊN NỀN ĐÀN HỒI VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN HOÀN TOÀN TỰ DO BẰNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN HỮU HẠN

Phạm Thị Toan¹

Tóm tắt: Trong bài báo này, phương pháp biến đổi tích phân cosin hữu hạn kép được sử dụng để tìm tần số và các dạng dao động riêng của tấm chữ nhật trục hướng trên nền đàn hồi với biên hoàn toàn tự do. Trong quá trình phân tích, lý thuyết tấm chữ nhật trục hướng theo Kirchhoff cổ điển đã được khảo sát và mô hình nền Winkler đã được sử dụng. Do các phương trình động lực học cơ bản của tấm mỏng trục hướng trên nền đàn hồi được chấp nhận, không cần chọn những hàm biến dạng tùy ý. Như vậy, nghiệm khai triển trong bài báo này là hợp lý và có tính chất lý thuyết. Để minh họa cho các công thức, kết quả số đã được biểu diễn và so sánh với các bài báo khác.

Từ khóa: Trục hướng; tấm chữ nhật mỏng; nền đàn hồi; dạng dao động; điều kiện biên tự do; tần số dao động riêng; phép biến đổi tích phân cosin hữu hạn.

Summary: The double finite cosine integral transform method is exploited to obtain explicit solutions for the natural frequencies and mode shapes of the orthotropic rectangular plate on foundation with four edges free. In the analysis procedure, the classical Kirchhoff orthotropic rectangular plate is considered and the Winkler elastic foundation is utilized to represent the elastic foundation. Because only are the basic dynamic elasticity equations of the orthotropic thin plate on elastic foundation adopted, it is not need prior to select the deformation function arbitrarily. Therefore, the solution developed by present paper is reasonable and theoretical. In order to illuminate the correction of formulations, the numerical results are also presented to comparing with that of the other references.

Keywords: Orthotropic; rectangular thin plate; elastic foundation; vibration modes; free boundary; eigenfrequencies; finite cosine integral transform.

Nhận ngày 15/6/2015, chỉnh sửa ngày 29/6/2015, chấp nhận đăng 30/9/2015



1. Mở đầu

Dao động của tấm chữ nhật với các điều kiện biên khác nhau đã được nghiên cứu rộng rãi từ nhiều năm trước. Các công trình nghiên cứu được công bố trong nhiều tài liệu [1, 4, 5]. Do tính phức tạp về mặt toán học, các nghiệm giải tích cho tấm chỉ có đối với điều kiện biên tựa đơn ở các cạnh. Một trong những phương pháp được sử dụng phổ biến nhất về bài toán dao động tự do của tấm là phương pháp năng lượng của Rayleigh-Ritz, ở đây các hàm tương thích kết hợp với các điều kiện biên khác nhau đã được chọn để mô tả độ võng của tấm. Các hàm được chọn hầu hết là không thỏa mãn các phương trình vi phân. Gorman [3] đã sử dụng phương pháp chồng mode để giải bài toán dao động tự do cho các điều kiện biên khác nhau một cách gần đúng. Sự điều chỉnh của các hàm dầm tĩnh đã được sử dụng để xác định tần số dao động của tấm đàn hồi. Hurlbaeus và cộng sự [2] đã khai triển nghiệm Fourier cho các điều kiện biên phức tạp hơn điều kiện tựa đơn. Các cách tiếp cận bằng phương pháp số khác như phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp phần tử biên đã được nhiều nhà khoa học sử dụng để phân tích tấm trên nền đàn hồi.

Biến đổi tích phân là một trong những cách tiếp cận tốt nhất để đạt được nghiệm hiển của một số phương trình vi phân đạo hàm riêng sử dụng trong đàn hồi [6]. Phương pháp này thường được sử dụng để phân tích một số bài toán kỹ thuật [7]. Trong bài báo [10], các tác giả đã sử dụng phương pháp này để phân

¹TS, Trường Đại học Giao thông vận tải. E-mail: phamthitoan155@yahoo.com.

tích dao động của tấm đẳng hướng. Trong bài báo [12], các tác giả có giới thiệu phương pháp này để giải bài toán dao động của tấm trực hướng. Tuy nhiên chỉ đưa ra phương trình tổng quát và kết quả số, không có lời giải cụ thể.

Trong bài báo này, tác giả đã phát triển các kết quả nghiên cứu của [10] cho trường hợp tấm trực hướng. Phương pháp biến đổi tích phân cosin hữu hạn kép được sử dụng để tìm nghiệm chính xác cho tần số và dạng dao động của tấm chữ nhật mỏng trực hướng trên nền đàn hồi Winkler với biên hoàn toàn tự do. Các kết quả tính tần số và dạng dao động nhận được đã được biểu diễn và so sánh với các kết quả đã công bố khác.



2. Phương trình vi phân dao động uốn của tấm mỏng trực hướng trên nền đàn hồi Winkler

Phương trình dao động của tấm trực hướng trên nền đàn hồi theo lý thuyết của Kirchhoff cổ điển có dạng như sau [5]:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + kw + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

trong đó: $D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}$, $D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}$, $D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12}$ là các độ cứng uốn và xoắn của tấm; E_x và E_y là mô đun đàn hồi theo các phương x và y , G_{xy} là mô đun trượt, ν_x và ν_y là các hệ số Poisson theo các hướng x và y tương ứng, h và ρ là chiều dày và mật độ khối của tấm. Hàm $w(x,y,t)$ là độ võng của mặt trung hòa và k là hệ số phản lực nền.

Đối với dao động điều hòa:

$$w(x, y, t) = W(x, y) \sin \omega t \quad (2)$$

trong đó: $W(x,y)$ là hàm dạng dao động và ω là tần số vòng của tấm. Thay phương trình (2) vào phương trình (1), ta được:

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + D_{xy} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \lambda W = 0 \quad (3)$$

Ở đây $\lambda = k - \rho h \omega^2$.

Đối với điều kiện biên hoàn toàn tự do, ta có:

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = a \quad (4)$$

$$M_x = -\left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = a \quad (5)$$

$$M_{xy} = -2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = a \quad (6)$$

$$Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \text{ tại } y = 0 \text{ và } y = b \quad (7)$$

$$M_y = -\left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \text{ tại } y = 0 \text{ và } y = b \quad (8)$$

$$M_{xy} = -2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \text{ tại } y = 0 \text{ và } y = b \quad (9)$$

Để giải được phương trình (3), ta sử dụng phép biến đổi tích phân cosin hữu hạn kép. Hàm $W(x,y)$ được tìm dưới dạng chuỗi như sau:

$$W(x, y) = \frac{1}{ab} \bar{W}(0,0) + \frac{2}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{W}(m,0) \cos \alpha_m x + \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}(0,n) \cos \beta_n y + \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}(m,n) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (10)$$

Trong đó: $\bar{W}(m,n) = \int_0^a \int_0^b W(x,y) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y dx dy$; $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$; $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$

Để tìm các số hạng về bên phải của phương trình (10), trước hết ta nhân hai vế phương trình (3) với $\cos \alpha_m x \cos \beta_n y$ trong đó $m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots; 0 < x < a, 0 < y < b$, sau đó lấy tích phân hai vế theo x và y ta được:

$$\underbrace{D_x \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y dx dy}_{sh1} + 2H \underbrace{\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y dx dy}_{sh2} + D_y \underbrace{\int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y dx dy}_{sh3} + \lambda \int_0^a \int_0^b W \cos \alpha_m x \cos \beta_n y dx dy = 0 \quad (11)$$

Đặt

$$sh1 = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y dx dy; sh2 = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y dx dy$$

$$sh3 = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y dx dy$$

Bằng cách biến đổi tích phân từng phần của các biểu thức trên ta nhận được:

$$sh1 = \alpha_m^4 \bar{W}(m, n) + \int_0^b \left\{ (-1)^m \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \Big|_{x=a} - \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \Big|_{x=0} - \alpha_m^2 \left[(-1)^m \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=a} - \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] \right\} \cos \beta_n y dy$$

$$sh3 = \beta_n^4 \bar{W}(m, n) + \int_0^a \left\{ (-1)^n \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \Big|_{y=b} - \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \Big|_{y=0} - \beta_n^2 \left[(-1)^n \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=b} - \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0} \right] \right\} \cos \alpha_m x dx$$

Số hạng thứ hai trong (11) được tách làm hai phần. Phần thứ nhất tính tích phân theo x trước, phần thứ hai tính tích phân theo y trước, ta có:

$$sh2 = \int_0^b \left[(-1)^m \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} \Big|_{x=a} - \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} \Big|_{x=0} \right] \cos \beta_n y dy - \alpha_m^2 \int_0^a \left[(-1)^n \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=b} - \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0} \right] \cos \alpha_m x dx + \alpha_m^2 \beta_n^2 \bar{W}(m, n)$$

$$sh2 = \int_0^a \left[(-1)^n \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=b} - \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=0} \right] \cos \alpha_m x dx - \beta_n^2 \int_0^b \left[(-1)^m \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=a} - \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] \cos \beta_n y dy + \alpha_m^2 \beta_n^2 \bar{W}(m, n)$$

Đặt

$$I_m = \int_0^a \left[(-1)^n \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=b} - \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0} \right] \cos \alpha_m x dx; J_n = \int_0^b \left[(-1)^m \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=a} - \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] \cos \beta_n y dy$$

Thế các phương trình trên vào (11) và chú ý đến các điều kiện biên (4), (7), ta được:

$$\bar{W}(m, n) = \frac{(D_y \beta_n^2 + H \alpha_m^2) I_m + (D_x \alpha_m^2 + H \beta_n^2) J_n}{D_x \alpha_m^4 + 2H \alpha_m^2 \beta_n^2 + D_y \beta_n^4 + \lambda} \quad (12)$$

Thay (12) vào (10) cho kết quả:

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 (H I_m + D_x J_0) C_{m0} \cos \alpha_m x + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 (D_y I_0 + H J_n) C_{0n} \cos \beta_n y$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(D_y \beta_n^2 + H \alpha_m^2) I_m + (D_x \alpha_m^2 + H \beta_n^2) J_n \right] C_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (13)$$

$$\text{Trong đó: } C_{mn} = \frac{2}{ab(D_x \alpha_m^4 + 2H \alpha_m^2 \beta_n^2 + D_y \beta_n^4 + \lambda)}$$

Công thức (13) thỏa mãn các điều kiện biên (6) và (9). Thay công thức (13) vào các điều kiện biên (5) và (8) ta nhận được:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} H\alpha_m^2 A_{m0} I_m + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (D_y \beta_n^2 + H\alpha_m^2) I_m \cos \beta_n y \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} H\beta_n^2 A_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} (D_x \alpha_m^2 + H\beta_n^2) B_{mn} \right] J_m \cos \beta_n y \\ & - \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 A_{0n} D_y I_0 \cos \beta_n y + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 A_{m0} D_x J_0 \right] = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2 H B_{0n} J_n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} (D_x \alpha_m^2 + H\beta_n^2) J_n \cos \alpha_m x \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} H\alpha_m^2 B_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} (D_y \beta_n^2 + H\alpha_m^2) \right] I_m \cos \alpha_m x \\ & - \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 D_y B_{0n} I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 D_x B_{m0} J_0 \cos \alpha_m x \right] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Trong đó: $A_{mn} = 2C_{mn} [1 + (-1)^m] (D_x \alpha_m^2 + D_y \beta_n^2)$ $B_{mn} = 2C_{mn} [1 + (-1)^n] (D_x \alpha_m^2 + D_y \beta_n^2)$

Nhân phương trình (14) với $\cos \beta_j y$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) và sau đó tích phân theo y trong miền $[0, b]$, cho ta:

$$\underbrace{\left[\frac{1}{2} H\beta_j^2 A_{0j} + \sum_{m=1}^{\infty} (D_x \alpha_m^2 + H\beta_j^2) A_{mj} \right] J_j}_{j=0,1,2,\dots} + \underbrace{\frac{1}{2} D_y \beta_j^2 A_{0j} I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mj} (D_y \beta_j^2 + H\alpha_m^2) I_m}_{j=1,2,3,\dots} = 0 \quad (16)$$

Tương tự, nhân phương trình (15) với $\cos \alpha_i x$ ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$) và sau đó tích phân theo x trong miền $[0, a]$:

$$\underbrace{\left[\frac{1}{2} H\alpha_i^2 B_{i0} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{in} (D_y \beta_n^2 + H\alpha_i^2) \right] I_i}_{i=0,1,2,3,\dots} + \underbrace{\frac{1}{2} \alpha_i^2 D_x B_{i0} J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_{in} (D_x \alpha_i^2 + H\beta_n^2) J_n}_{i=1,2,3,\dots} = 0 \quad (17)$$

Các phương trình (16) và (17) lập thành một hệ phương trình đại số thuần nhất chứa các ẩn I_m và J_n ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Để hệ phương trình trên có nghiệm không tầm thường thì định thức của ma trận hệ số phải bằng không, dẫn đến phương trình xác định tần số dao động riêng của tấm như sau:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} H\beta_0^2 A_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (D_x \alpha_m^2 + H\beta_0^2) A_{m0} & & & & & & \\ 0 & \frac{1}{2} H\beta_1^2 A_{01} & 0 & \dots & \frac{1}{2} D_y \beta_1^2 A_{01} & (D_y \beta_1^2 + H\alpha_1^2) A_{11} & \dots \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (D_x \alpha_m^2 + H\beta_1^2) A_{m1} & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} H\alpha_0^2 B_{00} & 0 & \dots \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (D_y \beta_n^2 + H\alpha_0^2) B_{0n} & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{1}{2} D_x \alpha_1^2 B_{10} & (D_x \alpha_1^2 + H\beta_1^2) B_{11} & (D_x \alpha_1^2 + H\beta_2^2) B_{12} & \dots & 0 & + \sum_{n=1}^{\infty} (D_y \beta_n^2 + H\alpha_1^2) B_{1n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$



3. Kết quả số

Từ phương trình (18) ta có thể xác định tần số dao động riêng của tấm sử dụng MATLAB, từ đó xác định các dạng dao động riêng tương ứng. Chọn $m=n$ và cho các giá trị tăng theo m , kết quả ta nhận được các giá trị của tần số riêng.

Ví dụ 1: Kiểm chứng độ tin cậy của kết quả tính toán

Theo bài báo [12], ta đưa vào các số liệu như sau:

$$a = b = 4.0 \text{ m}; h = 0.2 \text{ m}; k = 5.5 \times 10^7 \text{ N/m}^3; u_x = 0.18; u_y = 0.12;$$

$$E_x = 30 \times 10^9 \text{ N/m}^2; E_y = 20 \times 10^9 \text{ N/m}^2; G = 15 \times 10^9 \text{ N/m}^2; \rho = 1750 \text{ kg/m}^3;$$

Kết quả tính tần số dao động riêng theo [12] và kết quả tính trong bài báo này được trình bày trong Bảng 1. Ở đây bậc có nghĩa là thứ tự nghiệm ứng với chỉ số $m = n$ thay đổi. Ví dụ $m = n = 10$, trong kết quả tính toán phạm vi tần số dao động từ 30 đến 50 ta có 4 nghiệm theo thứ tự tăng dần.

Bảng 1. Kết quả tính toán tần số riêng

Tần số \ Bậc	1	2	3	4
Bài báo [12]	36,7694	39,8403	41,1277	41,4417
Bài báo hiện tại	42,0352	43,5676	48,0804	50,028

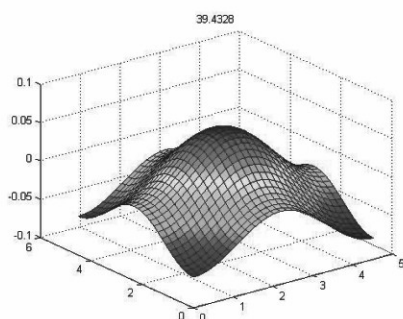
Ví dụ 2: Tấm trực hướng làm bằng vật liệu glass-epoxy với các tính chất vật liệu và hình học được cho như sau:

$$a = b = 4.5 \text{ m}; h = 0.2 \text{ m}; k = 5.5 \times 10^7 \text{ N/m}^3; u_x = 0.25; u_y = 0.0836;$$

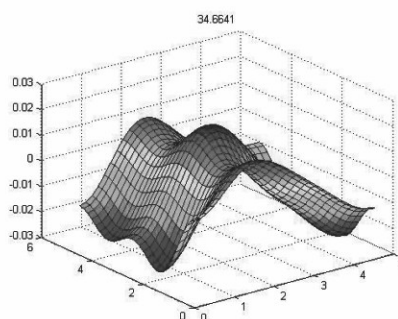
$$E_x = 53.8 \times 10^9 \text{ N/m}^2; E_y = 18 \times 10^9 \text{ N/m}^2; G = 9 \times 10^9 \text{ N/m}^2; \rho = 340 \text{ kg/m}^3$$

Bảng 2. Kết quả tính toán tấm trực hướng

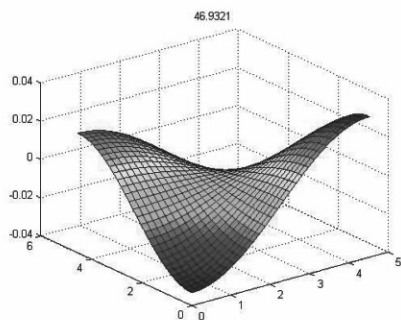
Tần số	Bậc				
	1	2	3	4	5
$m = n = 2$	36.57	39.43	50.27	63.1	
$m = n = 4$	34.66	39.43	46.93	57.1	59.58
$m = n = 6$	34.21	37.19	39.43	43.62	48.1
$m = n = 8$	34.03	36.12	39.43	42.33	47.47
$m = n = 10$	33.95	35.55	39.43	41.64	47.19
$m = n = 12$	33.9	35.2	39.43	41.22	47.04
$m = n = 14$	33.86	34.97	39.43	40.92	46.95
$m = n = 16$	33.84	34.8	39.43	40.72	46.89



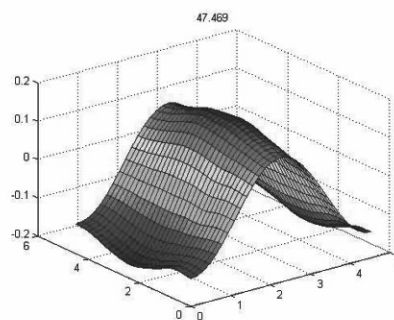
Hình 1. Dạng dao động bậc 2 với $m=n=2$



Hình 2. Dạng dao động bậc 1 với $m=n=4$

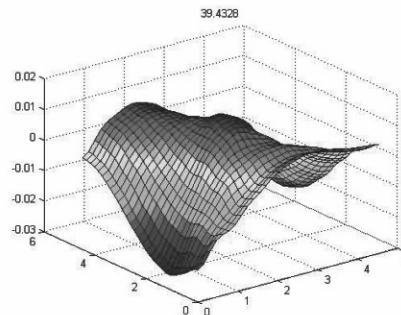


Hình 3. Dạng dao động bậc 3 với $m=n=4$



Hình 4. Dạng dao động bậc 5 với $m=n=8$

Từ bảng 2 ta nhận thấy tần số riêng giảm nhẹ khi m tăng. Khi giá trị của m càng tăng, số lượng tần số riêng tăng nhanh và có giá trị gần nhau. Tần số riêng không thay đổi đáng kể khi tăng giá trị của m thể hiện tính hội tụ cao của nghiệm.



Hình 5. Dạng dao động bậc 2 với $m = n = 12$



4. Kết luận

Bài báo đã chỉ ra rằng tần số riêng và dạng dao động riêng của tấm chữ nhật trục hướng trên nền đàn hồi theo các giả thiết của Krichhoff với biên hoàn toàn tự do có thể được tính toán bằng phương pháp biến đổi tích phân. Cách tiếp cận dựa vào phép biến đổi tích phân cosin hữu hạn kép cho phương trình vi phân chuyển động cổ điển của tấm mỏng. Một trong những lợi ích của phương pháp là kết quả hội tụ nhanh và có thể tính toán với độ chính xác theo yêu cầu. Các nghiệm tần số và dạng dao động riêng dưới dạng hiển của tấm mỏng trên nền đàn hồi với biên hoàn toàn tự do có thể sử dụng cho nhiều ứng dụng trong thực tế.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Văn Khang (1998), *Dao động kỹ thuật*, Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
2. Gaul L., S. Hurlbaeus, J. T.-S. Wang (2001), "An exact series solution for calculating the natural frequencies of orthotropic plates with completely free boundary", *Journal of Sound and Vibration* 244, pp. 747-759.
3. Gorman D. J. (1980), "A comprehensive study of the free vibration of rectangular plates resting on symmetrically distributed uniform elastic edge supports", *Journal of Applied Mechanics* 56, pp. 893- 899.
4. Gorman D. J. (1982), *Free Vibration Analysis of rectangular Plates*, Elsevier North Holland, Inc.
5. S. Timoshenko, *Theory of plates and shells*, Mc Graw Hill company Inc. New York 1940.
6. Ian. H. Sneddon (1972), *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill Inc.
7. Ian. H. Sneddon (1981), *The Application of Integral Transform in Elasticity*, McGraw-Hill Inc.
8. Warburton G. B. (1954), "The vibration of rectangular plates", *Proceedings of the institution of Mechanical Engineers* 168, pp. 371-384.
9. Yang T. Y. (1972), "A finite element analysis of plate on two parameters foundation model", *Computer and Structure*(2), pp. 573 – 616.
10. Yang Zhong, Jian-Hua Yin (2008), "Free vibration analysis of a plate on foundation with completely free boundary by finite integral transform method", *Mechanics Research Communications* 35, 268–275.
11. Zafrang A. E. (1995), "A new fundamental solution for boundary element analysis of thick plate on Winkle foundation", *International Journal of Numerical Engineering* (38), pp. 887-903.
12. Yang Zhong and Yuanyuan Gao (2011), "Free Vibration of Orthotropic Plate on Foundation with Four Edges Free by Finite Integral Transform Method", *Advanced Materials Research* Vols.243-249, pp 4253-4256.