



PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA PANEL TRỤ VÀ VỎ TRỤ TRÒN BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

Trần Minh Tú¹, Nguyễn Văn Lợi²

Tóm tắt: Dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), lời giải giải tích dạng nghiệm Navier đã được xây dựng để tính toán tần số dao động riêng của panel trụ và vỏ trụ tròn. Các ví dụ số đã được thực hiện nhằm khảo sát ảnh hưởng của các tham số đặc trưng cho hình dạng kích thước của panel trụ và vỏ trụ tròn đến tần số dao động riêng. Độ tin cậy của lời giải đã được kiểm chứng thông qua so sánh với các kết quả đã công bố của một số tác giả khác.

Từ khóa: Vỏ trụ tròn; panel trụ; lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất; phân tích động; nghiệm Navier.

Summary: Based on the first-order shear deformation theory, Navier's solution is developed to analyze the free vibration frequencies of circular cylindrical shells and cylindrical panels. The numerical analyses have been performed to investigate the influence of geometrical parameters on the fundamental free frequency. Numerical results are compared with those available in existing literature to validate.

Keywords: Cylindrical shells; first order shear deformation theory; free vibration; Navier's solution.

Nhận ngày 10/8/2015, chỉnh sửa ngày 25/8/2015, chấp nhận đăng 30/9/2015



1. Mở đầu

Kết cấu vỏ với nhiều ưu điểm như: khả năng chịu lực cao so với kết cấu tấm cùng khẩu độ nhịp, tính thẩm mỹ, do đó đem lại hiệu quả kinh tế, đã và đang được sử dụng phổ biến trong các lĩnh vực xây dựng, cơ khí, công nghiệp hàng hải, hàng không, vũ trụ,... Xét riêng trong lĩnh vực xây dựng công trình, kết cấu vỏ thường gặp là các mái nhà công nghiệp, mái nhà các công trình văn hóa, bể chứa và bình chứa công nghiệp...

Trong trường hợp tổng quát kết cấu vỏ có hai độ cong, tuy nhiên trong thực tế kết cấu vỏ có một độ cong như: vỏ trụ tròn, vỏ nón, vỏ côn,... thường được sử dụng vì dễ tạo hình, cũng như mô hình hóa đơn giản hơn.

Cho đến nay lý thuyết vỏ đàn hồi tuyến tính, dựa trên các quan hệ ứng suất-biến dạng tuân theo định luật Hooke và biến dạng bé thường được sử dụng khi mô hình hóa các kết cấu vỏ. Lý thuyết vỏ tổng quát dựa trên lý thuyết đàn hồi ba chiều, coi vỏ như là vật thể khối mô tả chính xác hơn ứng xử cơ học của các kết cấu tấm và vỏ, tuy nhiên tính toán theo cách tiếp cận này khá phức tạp và cồng kềnh về mặt toán học. Để có mô hình đơn giản hơn, với việc chấp nhận một số giả thiết, bài toán ba chiều được đưa về bài toán hai chiều để tính toán trên mặt trung bình của vỏ.

Trong các tài liệu tham khảo, nhiều nghiên cứu về vỏ với mô hình lý thuyết vỏ cổ điển dựa trên giả thiết Kirchhof - Love đã được trình bày cụ thể [1-3]. Lý thuyết vỏ cổ điển bỏ qua ứng suất và biến dạng cắt ngang do vậy lời giải thu được chỉ phù hợp với vỏ mỏng. Khi phân tích ứng xử của vỏ có chiều dày trung bình trở lên cần phải sử dụng các lý thuyết biến dạng cắt. Đã có nhiều công trình [4-7] nghiên cứu về ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang khi phân tích dao động của vỏ trụ tròn đồng nhất đẳng hướng. Các tính toán của các tác giả này cũng như của một số nhóm nghiên cứu khác đã được Leissa biên tập lại trong [8]. Các nghiên cứu một lần nữa khẳng định ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang là đáng kể khi chiều dày của vỏ tăng lên. Gần đây Reddy [9-10] đã xây dựng các phương trình chủ đạo, biểu thức quan hệ dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất cho vỏ trụ tròn, tuy nhiên chưa khảo sát số đối với vỏ bằng vật liệu đẳng hướng.

¹PGS. TS, Khoa Xây dựng dân dụng và công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng. Email: tpnt2002@yahoo.com.

²ThS, Khoa Xây dựng dân dụng và công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng.

Trong bài báo này, trên cơ sở lý thuyết vỏ Reddy, các tác giả thiết lập lời giải giải tích để tính toán tần số dao động riêng của panel trụ và vỏ trụ tròn bằng vật liệu đẳng hướng liên kết khớp trên chu vi, sử dụng dạng nghiệm Navier.



2. Các hệ thức quan hệ và phương trình chủ đạo của vỏ trụ tròn

2.1 Trường chuyển vị và biến dạng

Reddy [9] giả thiết trường chuyển vị bậc nhất có dạng:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, z, t) &= u_0(x, \theta, t) + z \cdot \phi_x(x, \theta, t) \\ v(x, \theta, z, t) &= v_0(x, \theta, t) + z \cdot \phi_\theta(x, \theta, t) \\ w(x, \theta, z, t) &= w_0(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (1)$$

trong đó: $u_0(x, \theta, t)$, $v_0(x, \theta, t)$, $w_0(x, \theta, t)$ là chuyển vị của điểm trên mặt trung bình ($z=0$); $\phi_x(x, \theta, t)$, $\phi_\theta(x, \theta, t)$ là góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh trục θ, x . Quan hệ biến dạng - chuyển vị có dạng:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{x\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ 0 \\ 0 \\ \kappa_{x\theta} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{trong đó: } \varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \kappa_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial x}; \varepsilon_\theta^0 = \frac{\partial v_0}{R \partial \theta} + \frac{w_0}{R}; \kappa_\theta = \frac{\partial \phi_\theta}{R \partial \theta}; \gamma_{\theta z}^0 = \frac{\partial w_0}{R \partial \theta} - \frac{v_0}{R} + \phi_\theta; \gamma_{xz}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x;$$

$$\gamma_{x\theta}^0 = \frac{\partial u_0}{R \partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x}; \kappa_{x\theta} = \frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x}$$

Trường hợp riêng, lý thuyết vỏ cổ điển (CST):

$$\gamma_{\theta z}^0 = 0; \gamma_{xz}^0 = 0 \quad (\text{tức là: } \phi_\theta = -\frac{\partial w_0}{R \partial \theta} + \frac{v_0}{R}; \phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x})$$

2.2 Trường ứng suất

Với vật liệu đẳng hướng, đồng nhất, ta có quan hệ ứng suất - biến dạng:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{x\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{x\theta} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\text{trong đó: } Q_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}; Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}; Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}; Q_{44} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G; Q_{55} = G; Q_{66} = G$$

2.3 Các thành phần ứng lực

Các thành phần ứng lực trên phần tử vỏ được xác định theo các biểu thức:

$$\begin{aligned} [N_x \ N_{x\theta} \ M_x \ M_{x\theta}]^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_x \ \sigma_{x\theta} \ z \sigma_x \ z \sigma_{x\theta}\}^T dz \\ [N_\theta \ N_{\theta x} \ M_\theta \ M_{\theta x}]^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_\theta \ \sigma_{\theta x} \ z \sigma_\theta \ z \sigma_{\theta x}\}^T dz; \sigma_{x\theta} = \sigma_{\theta x} \\ Q_x &= K_s \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz; Q_\theta = K_s \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta z} dz; K_s = 5/6 \text{ là hệ số hiệu chỉnh cắt} \end{aligned} \quad (4)$$

2.4 Các phương trình cân bằng

Áp dụng nguyên lý Hamilton, theo [9] ta nhận được hệ phương trình cân bằng:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{R \partial \theta} + q_x &= J_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial N_\theta}{R \partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{Q_\theta}{R} + q_\theta &= J_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{R \partial \theta} - \frac{N_\theta}{R} + q_z &= J_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{R \partial \theta} - Q_x &= J_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + J_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_\theta}{R \partial \theta} - Q_\theta &= J_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + J_2 \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2}
 \end{aligned} \quad (5)$$

trong đó: R là các bán kính trụ tròn; q_x, q_θ, q_z là các thành phần lực bề mặt theo các phương $x; \theta; z$ và $J_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^i dz$ ($i=0,1,2$); Trường hợp riêng, lý thuyết vỏ cổ điển (CST), $\phi_\theta = -\frac{\partial w_0}{R \partial \theta} + \frac{v_0}{R}$, $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$ ta chỉ có ba ẩn số độc lập là u_0, v_0, w_0 , vậy chỉ cần 3 phương trình độc lập để giải, nó chính là ba phương trình đầu của hệ (5), với chú ý rằng phương trình thứ ba thu được bằng cách rút Q_x, Q_θ từ phương trình thứ bốn và thứ năm sau đó thế vào phương trình thứ ba của hệ (5).



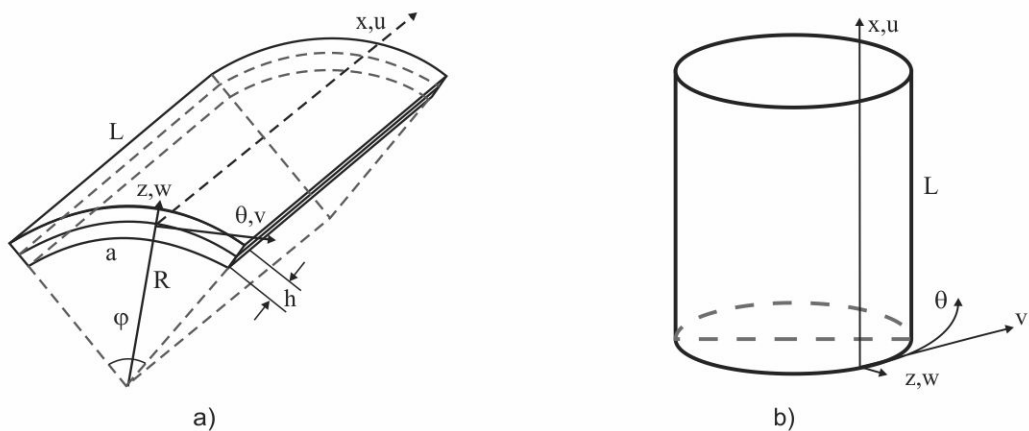
3. Lời giải giải tích

- Bài toán panel trụ: Xét panel trụ có chiều dài theo phương x là L , chiều dài theo phương cong θ là a (ứng với góc mở là φ), bán kính panel trụ R , chiều dày h (Hình 1a). Điều kiện biên là gối tựa đơn trên chu vi panel trụ:

$$\begin{aligned}
 w = v = M_x = N_x &= 0|_{x=0, L} \\
 w = u = M_\theta = N_\theta &= 0|_{\theta=0, \varphi}
 \end{aligned} \quad (6)$$

- Bài toán vỏ trụ tròn: Xét vỏ trụ tròn có chiều dài theo phương x là L , bán kính vỏ trụ tròn R , chiều dày h (Hình 1b). Điều kiện biên là tựa gối đơn trên chu vi hai đầu vỏ trụ tròn:

$$w = v = M_x = N_x = 0|_{x=0, L} \quad (7)$$



Hình 1. Dạng hình học của panel trụ và vỏ trụ tròn

Chọn nghiệm chuyển vị thỏa mãn điều kiện biên (6) và (7), theo Reddy [9] có dạng:

$$\begin{aligned}
 u_0(x, \theta, t) &= \sum_m \sum_n u_{mn}(t) \cos(\alpha x) \sin(\beta \theta); & v_0(x, \theta, t) &= \sum_m \sum_n v_{mn}(t) \sin(\alpha x) \cos(\beta \theta) \\
 w_0(x, \theta, t) &= \sum_m \sum_n w_{mn}(t) \sin(\alpha x) \sin(\beta \theta); & \phi_x(x, \theta, t) &= \sum_m \sum_n \phi_{xmn}(t) \cos(\alpha x) \sin(\beta \theta) \\
 \phi_\theta(x, \theta, t) &= \sum_m \sum_n \phi_{\theta mn}(t) \sin(\alpha x) \cos(\beta \theta)
 \end{aligned} \quad (8)$$

Trong đó, với panel trụ: $\alpha = \frac{m\pi}{L}$; $\beta = \frac{n\pi}{\phi}$; vỏ trụ tròn: $\alpha = \frac{m\pi}{L}$; $\beta = n$

Để giải bài toán dao động riêng, ta giả thiết các hệ số phụ thuộc thời gian của (8) có dạng:

$u_{mn}(t) = u_{mn} e^{i\omega t}$; $v_{mn}(t) = v_{mn} e^{i\omega t}$; $w_{mn}(t) = w_{mn} e^{i\omega t}$; $\phi_{xmn}(t) = \phi_{xmn} e^{i\omega t}$; $\phi_{\theta mn}(t) = \phi_{\theta mn} e^{i\omega t}$, với ω là tần số góc, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$.

Sau đó thay (8) vào hệ phương trình (5), ta nhận được hệ phương trình:

$$([K] - \omega^2[M]) \{\Delta\} = \{0\} \quad (9)$$

trong đó: $\{\Delta\} = \{u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, \phi_{xmn}, \phi_{\theta mn}\}^T$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix}; [M] = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & M_{14} & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & M_{25} \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & 0 \\ M_{14} & 0 & 0 & M_{44} & 0 \\ 0 & M_{25} & 0 & 0 & M_{55} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Các hệ số K_{ij} và M_{ij} xem chi tiết phần phụ lục. Giải bài toán trị riêng của hệ (9) ta tìm được tần số riêng, ω_{mn} , ứng với mỗi cặp (m,n) và dạng dao động tương ứng, $\{\Delta\}$.



4. Kết quả số

Dựa trên cơ sở lý thuyết trình bày ở trên, các tác giả tiến hành viết code chương trình tính toán số trên nền Matlab. Kết quả số được so sánh với kết quả tính toán của Asadi [11] cho bài toán panel trụ (bài toán 1) và Loy [12] cho bài toán vỏ trụ tròn (bài toán 2). Tiếp theo, ảnh hưởng của tỷ số h/R của panel trụ và vỏ trụ tròn đến tần số dao động riêng khi tỷ số $L/R=0.5, 1.0$ được khảo sát.

Các tần số không thứ nguyên (tham số tần số) được trình bày trong các bài toán 1, 2, 3, và 4 là:

$$\Omega_1 = \omega L^2 \sqrt{\rho/E/h^2}; \Omega_2 = \omega L \sqrt{(1+\nu)\rho/E}; \Omega_3 = \omega R \sqrt{(1-\nu)^2 \rho/E}$$

4.1 Kiểm chứng kết quả

- Bài toán 1: Kiểm chứng tần số dao động riêng của panel trụ

Bảng 1 trình bày kết quả tần số dao động không thứ nguyên Ω , của panel trụ đẳng hướng, điều kiện biên gối đơn giản ($L/a=1, \nu=0.25$), kết quả tính theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) và lý thuyết vỏ cổ điển (CST) của bài báo so sánh với kết quả giải tích của Asadi [11] tính theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT cải tiến:

Bảng 1. Tần số dao động riêng không thứ nguyên của panel trụ ($L/a = 1, \nu = 0.25$)

Kích thước	Mô hình tính toán	(n,m)				
		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
L/h=20; L/R=0.5 (h/R=1/40)	E. Asadi [11]	7.5651	14.422	16.401	23.200	28.149
	CST	7.6156	14.684	16.614	23.786	29.061
	Sai khác so với [11]	(0.67%)	(1.82%)	(1.30%)	(2.53%)	(3.24%)
	FSDT	7.5648	14.421	16.401	23.199	28.148
	Sai khác so với [11]	(0.00%)	(0.01%)	(0.00%)	(0.00%)	(0.00%)
L/h=20; L/R=1 (h/R=1/20)	E. Asadi [11]	11.048	14.466	21.216	24.408	27.856
	CST	11.120	14.818	21.403	25.028	28.862
	Sai khác so với [11]	(0.65%)	(2.43%)	(0.88%)	(2.54%)	(3.61%)
	FSDT	11.047	14.463	21.215	24.405	27.851
	Sai khác so với [11]	(0.01%)	(0.02%)	(0.00%)	(0.01%)	(0.02%)
L/h=20; L/R=2 (h/R=1/10)	E. Asadi [11]	17.977	14.656	33.550	28.482	26.723
	CST	18.068	15.292	33.709	29.197	28.093
	Sai khác so với [11]	(0.51%)	(4.34%)	(0.47%)	(2.51%)	(5.13%)
	FSDT	17.973	14.649	33.542	28.470	26.706
	Sai khác so với [11]	(0.02%)	(0.05%)	(0.02%)	(0.04%)	(0.06%)

Bảng 2. Tần số dao động riêng không thứ nguyên của vỏ trụ tròn

Kích thước	Mô hình tính toán	n				
		1	2	3	4	5
m=1; L/R=1; h/R=0.3	Loy [12]	1.33748	1.32359	1.52804	1.92722	2.44692
	CST	1.41840	1.46761	1.78084	2.33490	3.06493
	Sai khác so với [12]	(6.05%)	(10.88%)	(16.54%)	(21.15%)	(25.26%)
	FSDT	1.34659	1.32595	1.51716	1.89653	2.39374
	Sai khác so với [12]	(0.68%)	(0.18%)	(0.71%)	(1.59%)	(2.17%)

- Bài toán 2: Kiểm chứng tần số dao động riêng của vỏ trụ tròn

Tần số dao động riêng không thứ nguyên Ω_2 của vỏ trụ tròn đẳng hướng, điều kiện biên gờ đơn giản ($m=1$, $L/R=1$, $h/R=0.3$) trình bày trong Bảng 2, kết quả tính theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) và lý thuyết vỏ cổ điển (CST) của bài báo so sánh với kết quả giải tích của Loy [12] tính theo lý thuyết 3D:

Qua kết quả ở Bảng 1 và Bảng 2 ở trên ta có thể thấy nghiệm giải tích đã xây dựng và chương trình tính theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) là đáng tin cậy (sai số nhỏ hơn 0.06% với panel trụ và nhỏ hơn 2.17% với vỏ trụ tròn khá dày $h/R=0.3$).

4.2 Khảo sát ảnh hưởng của một số tham số kích thước đến tần số cơ bản

- Bài toán 3: Ảnh hưởng của tỷ số h/R đến tần số cơ bản của panel trụ khi $L/R=0.5, 1.0, 2.0, L/a=1$.

Bảng 3 trình bày tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên Ω_3 của panel trụ đẳng hướng, điều kiện biên tựa đơn trên chu vi ($L/R=0.5, 1.0$ và $L/a=1$), kết quả tính theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) được so sánh với lý thuyết vỏ cổ điển (CST): Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên biến thiên theo tỉ số h/R thể hiện trên Hình 2.

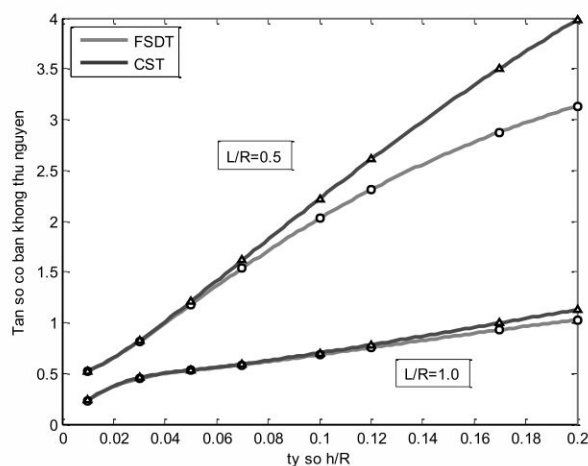
Bảng 3. Tần số dao động riêng không thứ nguyên của panel trụ ($L/a=1$)

L/R	Mô hình tính toán	h/R (L/a=1)							
		0.01	0.03	0.05	0.07	0.1	0.12	0.17	0.2
0.5	CST	0.523	0.821	1.209	1.615	2.221	2.610	3.507	3.981
	FSDT	0.523	0.813	1.177	1.537	2.026	2.309	2.876	3.134
	Sai số%	0.12%	1.01%	2.65%	4.86%	8.78%	11.53%	17.99%	21.26%
1.0	CST	0.234	0.457	0.532	0.592	0.702	0.782	0.997	1.128
	FSDT	0.233	0.451	0.528	0.584	0.683	0.754	0.929	1.029
	Sai số%	0.39%	1.36%	0.69%	1.34%	2.64%	3.69%	6.76%	8.78%

Từ các kết quả của Bảng 3 và quan sát Hình 2, ta thấy đối với panel trụ khi tỷ số h/R tăng thì tần số cơ bản tăng và khi L/R tăng thì tần số cơ bản giảm. Khi tỉ số h/R tăng lên thì sai số giữa lý thuyết vỏ cổ điển và lý thuyết vỏ bậc nhất tăng lên phản ánh đúng hiệu quả của mô hình vỏ bậc nhất so với mô hình vỏ cổ điển.

- Bài toán 4: Ảnh hưởng của tỷ số h/R đến tần số cơ bản của vỏ trụ tròn khi $L/R=0.5, 1.0, 2.0$.

Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên Ω_3 của vỏ trụ tròn đẳng hướng, tựa đơn trên chu vi ở hai đầu vỏ trụ ($L/R=0.5, 1.0$) thể hiện trong Bảng 4, kết quả tính theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) được so sánh với lý thuyết vỏ cổ điển (CST). Biến thiên của tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên Ω_3 của vỏ trụ tròn theo tỉ số h/R biểu diễn trên Hình 3.

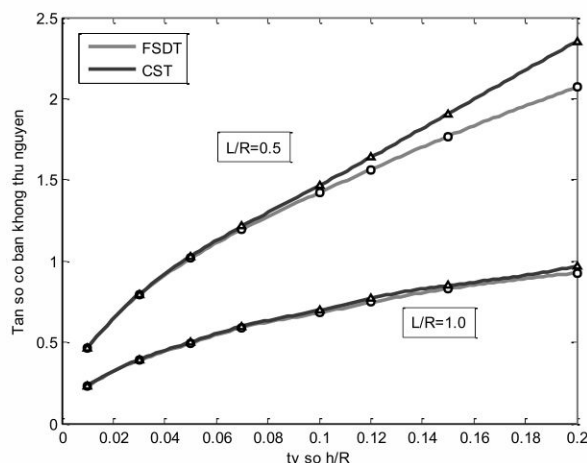


Hình 2. Ảnh hưởng của tỷ số h/R đến tần số dao động riêng cơ bản của panel trụ khi $L/a=1$

Bảng 4. Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của vỏ trụ tròn

L/R	Mô hình tính toán	h/R							
		0.01	0.03	0.05	0.07	0.1	0.12	0.15	0.2
0.5	CST	0.466	0.796	1.030	1.214	1.465	1.638	1.907	2.352
	FSDT	0.465	0.791	1.016	1.196	1.421	1.563	1.768	2.069
	Sai số%	0.24%	0.63%	1.29%	1.48%	2.96%	4.56%	7.27%	12.03%
1.0	CST	0.230	0.393	0.501	0.598	0.697	0.772	0.850	0.970
	FSDT	0.228	0.389	0.494	0.591	0.681	0.746	0.830	0.926
	Sai số%	0.50%	1.01%	1.34%	1.18%	2.39%	3.38%	2.37%	4.48%

Từ các kết quả trên Bảng 4 và quan sát đồ thị trên Hình 3, ta thấy cũng như với panel trụ, khi tỉ số h/R tăng thì độ cứng của vỏ tăng, dẫn tới tần số dao động riêng cơ bản của vỏ trụ tròn cũng tăng. Khi vỏ càng dày (tỉ số h/R càng lớn) thì sai số giữa hai lý thuyết vỏ cổ điển và vỏ bậc nhất càng tăng. Ảnh hưởng của các lý thuyết vỏ đến vỏ ngắn ($L/R=0,5$) là rõ rệt hơn so với vỏ có $L/R=1$.


Hình 3. Ảnh hưởng của tỉ số h/R đến tần số cơ bản của vỏ trụ tròn


5. Kết luận

Dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), bài báo đã xây dựng nghiệm giải tích tính toán tần số dao động riêng của panel trụ liên kết khớp trên chu vi và vỏ trụ tròn có liên kết khớp trên chu vi hai đầu chiều dài trụ. Chương trình tính trên nền Matlab đã được viết để khảo sát số các lớp bài toán. Qua so sánh với một số nghiên cứu đã công bố, độ tin cậy của lời giải đã được khẳng định. Các ví dụ số đã chỉ ra sự cần thiết phải sử dụng lý thuyết vỏ bậc nhất với vỏ có chiều dày trung bình trở lên. Các nghiên cứu trình bày trong bài báo này là cơ sở cho các nghiên cứu tiếp theo của các tác giả đối với vỏ làm bằng vật liệu mới.

Tài liệu tham khảo

- Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S (1959), *Theory of plates and shells*, New-York. McGraw-Hill.
- Eduard Ventel, Theodor Krauthammer (2008), *Thin Plates and Shells-Theory, Analysis, and Applications*, Taylor & Francis.
- Ansel C. Ugural (2000), *Stress in plates and shell*, Mac-Graw-Hill-Internationaledition.
- Hildebrand F.B., Reissner E., Thomas G.B. (1949), *Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells*, NACA TN 1833.
- Vlasov V.Z. (1951), *Basic differential equations in general theory of elastic shells*, NASA TM;1241.
- Naghdi P.M., Cooper R.M. (1956), "Propagation of elastic waves in cylindrical shells, including the effects of transverse shear and rotatory inertia", *J. Acoust. Soc. Am.* 28:56-63.
- Mirsky I., Herrmann G. (1957), "Nonaxially symmetric motions of cylindrical shells", *J. Acoust. Soc. Am.* 29:1116-1124.
- Leissa A.W. (1973), *Vibrations of shells*. NASA;SP-88
- Reddy J.N. (2007), *Theory and Analysis of Elastic plates and shells*, CRC Press.
- Reddy J.N. (2004), *Mechanics of Laminated composite plates and shells-Theory and analysis*, CRC Press.
- Asadi E. (2012), "Static and vibration analyses of thick deep laminated cylindrical shells using 3D and various shear deformation theories", *Composite Structure*; 94:494-500.
- Loy C.T., Lam K.Y. (1999), "Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity", *Journal of Sound and Vibration*; 226(4), 719-737.