



XÁC ĐỊNH VẾT NÚT XIÊN BẤT KỲ TRONG TẤM DÀY CHỊU UỐN SỬ DỤNG PHÂN TÍCH WAVELET ĐỐI VỚI ĐỘ VÔNG VÀ CÁC DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG

Trần Văn Liên¹, Ngô Trọng Đức²

Tóm tắt: Bài báo trình bày kết quả phân tích tấm chữ nhật dày có vết nứt xiên bất kỳ chịu uốn bằng phương pháp PTHH, sử dụng kết hợp 2 loại PTHH kỳ dị của Barsoum: tam giác đẳng tham số bậc hai 6 nút và tứ giác đẳng tham số bậc hai 8 nút (bài toán thuận). Trên cơ sở đó, các tác giả đã xác định được vị trí vết nứt xiên bất kỳ trong tấm chịu uốn bằng phân tích wavelet 2 chiều đối với độ võng và các dạng dao động riêng (bài toán ngược). Kết quả phân tích cho thấy đây là một phương pháp chẩn đoán cho kết quả tốt và có thể ứng dụng hiệu quả trong thực tế.

Từ khóa: Vết nứt; phần tử kỳ dị Barsoum; tấm dày; wavelet; độ võng; dạng dao động riêng.

Summary: The present article deals with the dynamic analysis of the slanting cracked bending thick plate using two Barsoum's singularity finite elements: isoparametric quadratic 6-node triangular and 8 - node quadrilateral crack tip elements (direct problem). Thence, crack detection of the slanting cracked bending thick plate is determined by using 2D wavelet transforms of deflections and shape modes (inverse problem). The theoretical development was illustrated and validated by numerical examples.

Keywords: Crack; barsoum's singularity element; thick plate; wavelet; deflections; mode Shape.

Nhận ngày 02/6/2015, chỉnh sửa ngày 16/6/2015, chấp nhận đăng 30/9/2015



1. Mở đầu

Những nghiên cứu hiện nay về tấm có vết nứt phát triển theo các hướng chủ yếu như sau:

a) Bài toán thuận: xác định ứng suất, biến dạng và chuyển vị, từ đó đánh giá khả năng làm việc của kết cấu khi xuất hiện vết nứt. Các bài toán thuận thường được giải quyết dựa vào lý thuyết cơ học phá hủy, sử dụng lời giải giải tích hoặc lời giải số, chẳng hạn bằng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH). Một số nghiên cứu tiêu biểu trong cùng lĩnh vực nghiên cứu có thể kể đến là:

+ Dựa trên cơ học phá hủy và các số liệu thực nghiệm, Rice và Levy [1] đã xác định được các công thức chuyển vị và góc xoay tại vị trí vết nứt cho các kết cấu dạng tấm mỏng chịu kéo và chịu uốn. Tuy nhiên, các nghiên cứu này mới chỉ xét đến các bài toán tấm chữ nhật có vết nứt bên trong và song song với một cạnh của tấm. Mặc dù vậy, hiện nay các kết quả của nghiên cứu này vẫn được sử dụng trong rất nhiều tài liệu.

+ Qian, Gu, Jiang [2] và Krawczuk [3], Krawczuk, Ostachowicz [4] đã xác định được ma trận độ mềm bằng phương pháp chỉ số cường độ ứng suất, từ đó xây dựng ma trận độ cứng của phần tử tấm mỏng chữ nhật có vết nứt theo mô hình PTHH.

+ Một trong những nghiên cứu đầu tiên về phân tích kết cấu tấm có vết nứt bằng phương pháp PTHH thuộc về Henshell, Shaw [5] và Barsoum [6], [7]. Barsoum đã đưa ra phần tử tứ giác đẳng tham số 8 nút suy biến để tăng độ chính xác cho lời giải PTHH ở lân cận mũi vết nứt, khi đó, ứng suất của phần tử tại mũi vết nứt sẽ trở nên *kì dị* như lý thuyết cơ học phá hủy.

+ Dựa trên phần tử tứ giác đẳng tham số, Gray, Phan, Paulino, Kaplan [8] đã xây dựng phần tử tứ giác cải tiến tại mũi vết nứt. Các tác giả đã sử dụng các PTHH này để phân tích ứng suất tại lân cận vết nứt

¹PGS.TS, Khoa Xây dựng dân dụng và công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng. E-mail: lientv@hotmail.com.

²ThS, Viện thiết kế, Bộ Quốc phòng.

trong bài toán 2 chiều. Kết quả tính hệ số cường độ ứng suất bằng phần tử tứ giác cải tiến đạt được độ chính xác cao.

+ Gần đây, Moes, Dolbow và Belytschko [9] đã giới thiệu phương pháp PTHH mở rộng (Extended FEM) để giải quyết các bài toán của cơ học phá hủy. Một biểu thức kì dị và một biểu thức không liên tục được đưa vào phương trình của hàm chuyển vị để mô tả trường ứng suất và biến dạng của mũi vết nứt. Ưu điểm của phương pháp này là việc chia lưới phần tử hoàn toàn độc lập với hình dạng và vị trí của vết nứt.

b) Bài toán ngược: xác định vết nứt trong kết cấu dựa trên việc đo đạc chuyển vị, ứng suất; hoặc sử dụng các thiết bị siêu âm; hoặc dựa vào các đặc trưng động lực như tần số riêng, dạng dao động riêng, hàm phổ phản ứng hoặc dựa trên phân tích wavelet của chuyển vị hoặc dạng dao động riêng. Có thể kể đến một số nghiên cứu trong lĩnh vực như sau:

+ Khadem, Rezaee [10] đã dùng phương pháp giải tích để phân tích sự thay đổi tần số riêng của tấm mỏng khi vị trí vết nứt thay đổi. Đặc biệt, các tác giả này đã đưa vào "*hàm so sánh mở rộng*" để xét ảnh hưởng của vết nứt đến hàm dạng dao động tại lân cận vết nứt.

+ Xác định hư hỏng dựa vào phân tích wavelet của tín hiệu: Đây là một hướng nghiên cứu mới, đang được phát triển mạnh. Ưu điểm của phân tích wavelet là có thể phát hiện các điểm bất bình, gãy, điểm gián đoạn của tín hiệu (ví dụ như chuyển vị hay dạng dao động của kết cấu) vì nó mô tả được các yếu tố thời gian, biên độ của sự đột biến và sự gián đoạn của tín hiệu. Douka, Louitridis, Trochidis [11] và Louitridis, Douka, Hadjileontiadis, Trochidis [12] đã xác định được vị trí và độ sâu vết nứt trong tấm mỏng dùng phân tích wavelet các dạng dao động riêng nhận được theo mô hình giải tích của Khadem, Rezaee [13].

+ Nguyễn Thị Hiền Lương, Phạm Ngọc Tiến [14] đã áp dụng mô hình phần tử đẳng tham số tứ giác bậc hai kết hợp với phần tử tam giác Barsoum để xác định độ võng của tấm mỏng có vết nứt. Từ đó, các tác giả đã nghiên cứu sự nhạy cảm của phân tích wavelet 1 chiều đối với độ võng dọc theo 1 trục và loại wavelet sử dụng khi tấm có vết nứt dọc theo 1 trục.

+ Nguyễn Hoài Sơn và Lâm Phát Thuận [15] cũng đã có những nghiên cứu về tính toán và chẩn đoán sự phát triển vết nứt của tấm chịu kéo bằng phương pháp PTHH và phân tích wavelet. Theo các tác giả này, có thể đánh giá vết nứt thông qua hệ số cường độ ứng suất được xác định bằng kỹ thuật tương quan chuyển vị và trường ứng suất được tính toán thông qua phép ngoại suy từ kết quả phân tích PTHH. Cũng với cách làm tương tự, Nguyễn Hoài Sơn, Nguyễn Thị Bích Liễu [16] đã xác định được vị trí vết nứt đối với tấm chịu kéo sử dụng phân tích wavelet 1 chiều của chuyển vị tĩnh và các dạng dao động riêng.

+ Trần Văn Liên, Trịnh Anh Hào, Nguyễn Minh Đức [17] đã lập ma trận độ mềm của phần tử tấm mỏng chữ nhật chịu uốn không nứt và có vết nứt theo phương pháp lực dựa trên định lý Castigliano thứ hai, từ đó lập được ma trận độ cứng của phần tử tấm chữ nhật chịu uốn có vết nứt; đồng thời cũng xác định được biểu thức của độ dẫn và góc xoay tại vị trí vết nứt. Dựa trên mô hình PTHH này, tác giả đã xác định được vị trí vết nứt dựa trên phân tích wavelet 2 chiều của độ võng và dạng dao động riêng của tấm chữ nhật mỏng chịu uốn có vết nứt.

+ Trần Văn Liên, Nguyễn Trọng Huy [18] đã phân tích độ võng và dạng dao động riêng của tấm có vết nứt song song với các cạnh của tấm chữ nhật dày chịu uốn sử dụng phần tử tứ giác đẳng tham số bậc 2 của Barsoum, từ đó sử dụng phân tích wavelet 2 chiều để xác định vị trí vết nứt trong tấm. Trường hợp vết nứt xiên bất kỳ trong tấm chưa được nghiên cứu.

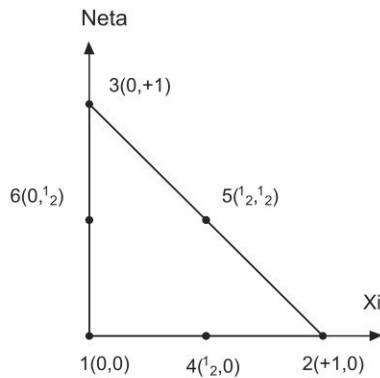
Bài báo trình bày kết quả phân tích tấm chữ nhật dày có vết nứt xiên bất kỳ chịu uốn theo lý thuyết Reissner - Mindlin sử dụng kết hợp 2 loại PTHH: PTHH tam giác đẳng tham số bậc hai 6 nút và PTHH tứ giác đẳng tham số bậc hai 8 nút của Barsoum (*bài toán thuận*) và việc xác định vị trí vết nứt xiên bất kỳ trong tấm chịu uốn bằng phân tích wavelet 2 chiều đối với độ võng tĩnh và các dạng dao động riêng (*bài toán ngược*).



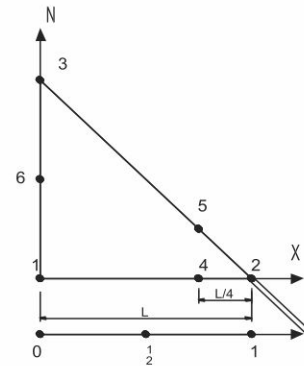
2. Mô hình PTHH của tấm dày theo lý thuyết Reissner - Mindlin có vết nứt

2.1 Mô hình phần tử tam giác đẳng tham số bậc hai 6 nút Barsoum

Đối với phần tử tam giác đẳng tham số bậc hai 6 nút thông thường như Hình 1, ta có các hàm dạng sau [19]:



Hình 1. Phân tử tam giác đẳng tham số bậc hai 6 nút thông thường



Hình 2. Phân tử tam giác đẳng tham số bậc hai 6 nút Barsoum

$$N_{a,1} = (1 - \xi - \eta) \cdot (1 - 2\xi - 2\eta);$$

$$N_{a,2} = \xi \cdot (2\xi - 1)$$

$$N_{a,3} = \eta \cdot (2\eta - 1);$$

$$N_{a,4} = 4\xi \cdot (1 - \xi - \eta)$$

(1)

$$N_{a,5} = 4\xi \cdot \eta;$$

$$N_{a,6} = 4\eta \cdot (1 - \xi - \eta)$$

Khi đó, vị trí và chuyển vị trên cạnh đáy của phân tử được xác định như sau:

$$x(\xi) = 4\xi \cdot (1 - \xi) \cdot L/2 + \xi \cdot (2\xi - 1) \cdot L = \xi L \rightarrow \xi = x/L$$

$$u(\xi) = u_1 \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - 2\xi) + u_4 \cdot 4\xi \cdot (1 - \xi) + u_2 \cdot \xi \cdot (2\xi - 1)$$

Do đó biến dạng dọc theo cạnh đáy là:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = [(4\xi - 3)u_1 - (8\xi - 4)u_4 + (4\xi - 1)u_2]/L \quad (2)$$

Biến dạng ε_{xx} có giá trị hữu hạn (không kì dị) tại mọi điểm trên cạnh đáy của phân tử, bao gồm cả mũi vết nứt, do đó ứng suất σ_{xx} cũng có giá trị hữu hạn, không kì dị.

Đối với phân tử Barsoum có nút 5 di chuyển về nút 2 một đoạn bằng $L/4$ như Hình 2, khi chọn gốc tọa độ x và chuyển vị u tại nút 2 thì: $x_2 = 0$; $x_4 = L/4$; $x_1 = L$; $u_2 = 0$, nên ta có:

$$x = (1 - \xi)(1 - 2\xi)L + 4\xi \cdot (1 - \xi)L/4 = L(1 - \xi)^2$$

$$u = (1 - \xi)(1 - 2\xi)u_1 + 4\xi \cdot (1 - \xi)u_4 \quad (3)$$

Dọc theo trục x : $x = r$ suy ra: $1 - \xi = \sqrt{\frac{r}{L}}$ và $u = \sqrt{\frac{r}{L}}[(1 - 2\xi)u_1 + 4\xi u_4]$. Mặt khác, biến dạng dọc $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$ với $\frac{\partial x}{\partial \xi} = -2(1 - \xi)L = -2\sqrt{r} \cdot \sqrt{L}$. Do đó ta có: $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{L}} [4\xi \cdot (1 - \xi)u_4 + \xi \cdot (2\xi - 1)u_1]$. Nghĩa là, trong khi chuyển vị của phân tử Barsoum tỉ lệ với $\sqrt{r}$ thì biến dạng (và ứng suất) tỉ lệ với $1/\sqrt{r}$. Như vậy, bằng việc chuyển các nút giữa của phân tử đẳng tham số bậc hai 6 nút về vị trí cách nút góc 1 một khoảng bằng $1/4$ chiều dài biên, ứng suất tại mũi vết nứt đã trở nên kì dị, tương tự như lý thuyết cơ học phá hủy [20].

Với phân tử tứ giác đẳng tham số bậc hai 8 nút thông thường, dùng các hàm dạng [19]:

$$N_{b,1} = \frac{1}{4}(1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (-\xi - \eta - 1); N_{b,2} = \frac{1}{4}(1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (\xi - \eta - 1)$$

$$N_{b,3} = \frac{1}{4}(1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (\xi + \eta - 1); N_{b,4} = \frac{1}{4}(1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (-\xi + \eta - 1)$$

(4)

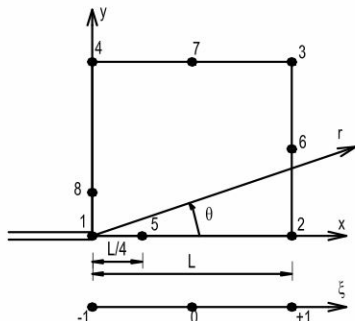
$$N_{b,5} = \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \cdot (1 - \eta); N_{b,6} = \frac{1}{2}(1 + \xi) \cdot (1 - \eta^2);$$

$$N_{b,7} = \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \cdot (1 + \eta); N_{b,8} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \cdot (1 - \eta^2)$$

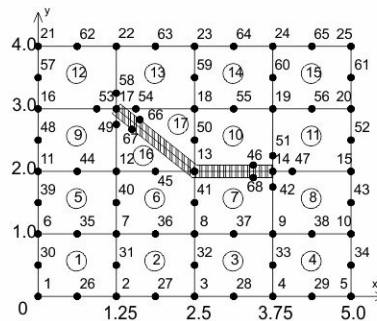
Bằng việc đẩy nút giữa di chuyển về vị trí $1/4$ trên cạnh biên như trên Hình 3, ta nhận được kết quả tương tự.

2.2 Tính tấm dầy có vết nứt chịu uốn theo phương pháp PTHH

Xét tấm dầy chịu uốn trong mặt phẳng trung bình x-y. Tại các vị trí không có vết nứt, tấm được chia nhỏ bằng các phần tử đẳng tham số bậc hai thông thường. Tại vị trí mũi vết nứt, ta sử dụng 2 loại phần tử tam giác và tứ giác đẳng tham số bậc hai của Barsoum (Hình 4).



Hình 3. Phần tử tứ giác đẳng tham số bậc hai 8 nút của Barsoum



Hình 4. Kết hợp phần tử đẳng tham số số bậc hai thường và phần tử đẳng tham số số bậc hai của Barsoum

Theo lý thuyết tấm dầy Reissner - Mindlin, tại mỗi nút có 3 bậc tự do là độ võng w , góc θ_x xoay quanh trục x và góc θ_y xoay quanh trục y . Chuyển vị tại các điểm trong tấm xác định theo công thức sau [19]:

$$u(x,y,z)=z\theta_y(x,y); v(x,y,z)=-z\theta_x(x,y) \quad (5)$$

Các biến dạng trong và ngoài mặt phẳng uốn xác định theo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = -z \cdot \boldsymbol{\chi} = -z \begin{Bmatrix} -\partial\theta_y/\partial x \\ \partial\theta_x/\partial y \\ \partial\theta_x/\partial x - \partial\theta_y/\partial y \end{Bmatrix}; \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi của phần tử tấm Reissner - Mindlin là:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dAdz + \frac{1}{2} \int_{A_e} \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\gamma} dAdz \quad (7)$$

trong đó: biểu thức thứ nhất là do ứng suất và biến dạng trong mặt phẳng uốn; biểu thức thứ hai là do ứng suất và biến dạng cắt; τ là ứng suất tiếp trung bình tương ứng với biến dạng cắt:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} = \kappa \mathbf{c}_s \boldsymbol{\gamma} \quad (8)$$

G là mô đun chống cắt; κ là hệ số hiệu chỉnh cắt có giá trị $\pi^2/12$ hay $5/6$. Từ đó, ta nhận được biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi của phần tử tấm Reissner - Mindlin:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \frac{h^3}{12} \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{c}_x \boldsymbol{\chi} dA + \frac{1}{2} \int_{A_e} \kappa h \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{c}_s \boldsymbol{\gamma} dA \quad (9)$$

trong đó c là ma trận hằng số đàn hồi: $\boldsymbol{\sigma} = c\boldsymbol{\varepsilon}$. Đối với bài toán ứng suất phẳng, c có dạng:

$$\mathbf{c} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Đối với phần tử đẳng tham số số bậc hai thông thường tại vị trí không có vết nứt và phần tử đẳng tham số số bậc hai Barsoum tại mũi vết nứt, véc tơ chuyển vị nút đều có dạng chung:

$$\mathbf{d} = (w \quad \theta_x \quad \theta_y)^T = \mathbf{N}_a \mathbf{d}_{a,e} = \mathbf{N}_a [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad w_6 \quad \theta_{x6} \quad \theta_{y6}]^T$$

$$\mathbf{d} = (w \quad \theta_x \quad \theta_y)^T = \mathbf{N}_b \mathbf{d}_{b,e} = \mathbf{N}_b [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad w_8 \quad \theta_{x8} \quad \theta_{y8}]^T \quad (11)$$

với $\mathbf{N}_a$ và $\mathbf{N}_b$ là ma trận các hàm dạng của phần tử tam giác đẳng tham số số bậc hai 6 nút (1) và của phần tử tứ giác đẳng tham số số bậc hai 8 nút (4) trên đây:

$$\mathbf{N}_a = \begin{bmatrix} N_{a,1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & N_{a,6} & 0 & 0 \\ 0 & N_{a,1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & N_{a,6} & 0 \\ 0 & 0 & N_{a,1} & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & N_{a,6} \end{bmatrix}_{3 \times 18}$$

$$\mathbf{N}_b = \begin{bmatrix} N_{b,1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & N_{b,8} & 0 & 0 \\ 0 & N_{b,1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & N_{b,8} & 0 \\ 0 & 0 & N_{b,1} & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & N_{b,8} \end{bmatrix}_{3 \times 24} \quad (12)$$

Thay biểu thức (10) - (12) vào (7), ta nhận được $U_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e$ trong đó $\mathbf{k}_e$ là ma trận độ cứng của phần tử:

$$\mathbf{k}_e = \int_{A_e} \frac{h^3}{12} \cdot [\mathbf{B}^I]^T \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}^I \cdot dA + \int_{A_e} kh \cdot [\mathbf{B}^O]^T \cdot \mathbf{c}_s \cdot \mathbf{B}^O \cdot dA \quad (13)$$

$\mathbf{B}^I$ là ma trận biến dạng trong mặt phẳng uốn; $\mathbf{B}^O$ là ma trận biến dạng ngoài mặt phẳng uốn của phần tử tam giác và tứ giác tương ứng:

$$\mathbf{B}^I = [\mathbf{B}_1^I \quad \mathbf{B}_2^I \quad \mathbf{B}_3^I \quad \mathbf{B}_4^I \quad \mathbf{B}_5^I \quad \mathbf{B}_6^I]; \quad \mathbf{B}^O = [\mathbf{B}_1^O \quad \mathbf{B}_2^O \quad \mathbf{B}_3^O \quad \mathbf{B}_4^O \quad \mathbf{B}_5^O \quad \mathbf{B}_6^O]$$

$$\mathbf{B}^I = [\mathbf{B}_1^I \quad \mathbf{B}_2^I \quad \mathbf{B}_3^I \quad \mathbf{B}_4^I \quad \mathbf{B}_5^I \quad \mathbf{B}_6^I \quad \mathbf{B}_7^I \quad \mathbf{B}_8^I]; \quad \mathbf{B}^O = [\mathbf{B}_1^O \quad \mathbf{B}_2^O \quad \mathbf{B}_3^O \quad \mathbf{B}_4^O \quad \mathbf{B}_5^O \quad \mathbf{B}_6^O \quad \mathbf{B}_7^O \quad \mathbf{B}_8^O] \quad (14)$$

với:

$$\mathbf{B}_j^I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\partial N_j / \partial x \\ 0 & \partial N_j / \partial y & 0 \\ 0 & \partial N_j / \partial x & -\partial N_j / \partial y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_j^O = \begin{bmatrix} \partial N_j / \partial x & 0 & \partial N_j \\ \partial N_j / \partial y & -\partial N_j & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Từ (10) - (12) ta nhận được biểu thức động năng của phần tử tám Reissner - Mindlin:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV = \frac{1}{2} \int_{A_e} \rho (h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2) dA = \frac{1}{2} \int_{A_e} (\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{d}) dA \quad (16)$$

trong đó $\mathbf{I}$ là ma trận đường chéo:

$$\mathbf{I} = \text{diag} \left(\rho h \quad \frac{\rho h^3}{12} \quad \frac{\rho h^3}{12} \right) \quad (17)$$

Do đó, ma trận khối lượng $\mathbf{m}_e$ của phần tử có dạng:

$$\mathbf{m}_e = \int_{A_e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{N} \cdot dA \quad (18)$$

Véc tơ tải trọng quy về nút $\mathbf{F}_e$ của phần tử có dạng:

$$\mathbf{F}_e = \int_{A_e} \mathbf{N}^T \cdot \{f_z \quad 0 \quad 0\}^T \cdot dA \quad (19)$$

Các tích phân (13), (18), (19) được tính theo phương pháp tích phân Gauss tại 3x3 điểm [19].



3. Phân tích wavelet 1 chiều và 2 chiều [21]

Phân tích wavelet liên tục (CWT) 1 chiều là tổng trên toàn miền xác định của tín hiệu được nhân bởi tỷ lệ $a > 0$ và dịch mức b của wavelet cơ bản $\psi(x)$ tạo ra tập hợp hệ số $C(a, b)$:

$$C(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{a,b}(x) dx \quad (20)$$

Các hệ số $C(a, b)$ cho biết mức độ tương quan giữa tín hiệu $f(x)$ và hàm wavelet $\psi_{a,b}(x)$, giá trị $C(a, b)$ càng lớn thì tính tương quan giữa tín hiệu và hàm wavelet càng cao. Vì thế, các thay đổi đột ngột trong $f(x)$ sẽ tạo ra các hệ số wavelet có biên độ lớn, đây là đặc điểm để xây dựng phương pháp nhận dạng vết nứt. Biến đổi ngược wavelet tái tạo tín hiệu ban đầu từ các hệ số $C(a, b)$:

$$f(x) = \frac{1}{K_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{db da}{a^2} \quad (21)$$

trong đó K_ψ là hằng số phụ thuộc vào dạng wavelet. Giả thiết rằng hệ số wavelet $C(a, b)$ chỉ có giá trị đối với tỷ lệ $a < a_0$, với $a > a_0$ được xem như nhiễu. Khi đó, việc tái tạo tín hiệu $f(x)$ ban đầu từ $C(a, b)$ cần thêm phần bù của tín hiệu tương ứng với $a > a_0$. Để thực hiện điều này, người ta đưa vào hàm $\phi(x)$, gọi là hàm tỷ lệ (scaling function), thu được các hệ số wavelet:

$$D(a_0, b) = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi \left(\frac{x-b}{a_0} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_{a_0,b}(x) dx \quad (22)$$

Hàm tỷ lệ rất cần thiết cho các tính toán bằng số nhưng không phải mọi wavelet đều có hàm tỷ lệ tương ứng. Thay cho (21), biến đổi ngược cho phép tái tạo tín hiệu gồm hai phần:

$$f(x) = \frac{1}{K_\psi} \int_{a=0}^{a_0} \int_{b=-\infty}^{\infty} C(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{db da}{a^2} + \frac{1}{K_\psi a_0} \int_{b=-\infty}^{\infty} D(a_0, b) \phi_{a_0,b}(x) db \quad (23)$$

Nếu chọn một tập con các tỷ lệ và vị trí dựa trên hàm mũ cơ sở hai, gọi là các vị trí và mức dyadic ($a=2^j$; $b=k.2^j$), thì phân tích wavelet sẽ có hiệu quả hơn mà vẫn đảm bảo chính xác. Điều này dẫn đến phép phân tích wavelet rời rạc (DWT) 1 chiều có dạng:

$$C_{j,k} = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(2^{-j}x - k) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{j,k}(x) dx \quad (24)$$

trong đó: $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)$ là các hàm wavelet rời rạc, j là số mức, $1/a=2^j$ là độ phân giải, k là thời gian rời rạc. Thay cho (21), tín hiệu được tái tạo lại từ các hệ số $C_{j,k}$ thông qua biến đổi wavelet rời rạc ngược có dạng:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) \quad (25)$$

Xét cấp phân tích là J , sử dụng (24) ta có tập hợp các hệ số chi tiết và xấp xỉ:

$$cD_J(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{J,k}(x) dx; cA_J(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_{J,k}(x) dx \quad (26)$$

Thay cho (25), phiên bản rời rạc của dạng tái tạo trở thành:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^J \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} cD_j(k) \psi_{j,k}(x) \right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} cA_J(k) \phi_{J,k}(x) = \sum_{j \leq J} D_j(x) + A_J(x) \quad (27)$$

trong đó $D_j(x)$ và $A_J(x)$ là hàm chi tiết và xấp xỉ ở mức J . Như vậy, kết quả phân tích DWT tạo ra hàm xấp xỉ $A_J(x)$ ở mức J tương ứng với tín hiệu có tần số thấp và các hàm chi tiết $D_j(x)$ tương ứng với tín hiệu ở tần số cao. Để xác định vết nứt trong kết cấu, ta cần quan tâm đến các chi tiết của tín hiệu. Đồng thời, việc lựa chọn mức phân tích J thích hợp phụ thuộc vào tín hiệu và kinh nghiệm, thường thì mức được chọn dựa trên một tần số cắt thông thấp yêu cầu.

Trong phân tích wavelet 2 chiều, người ta thường chọn các hàm wavelet và hàm tỷ lệ là tích của các hàm 1 chiều tương ứng. Như vậy ta có 3 hàm wavelet sau hay được dùng:

$$\psi^1(x, y) = \phi(x) \psi(y); \psi^2(x, y) = \psi(x) \phi(y); \psi^3(x, y) = \psi(x) \psi(y) \quad (28)$$

với:

$$\phi(x, y) = \phi(x) \phi(y) \quad (29)$$

Các tham số tỷ lệ và tham số dịch chuyển cũng được rời rạc hóa để giảm thời gian tính, do đó các wavelet này có dạng:

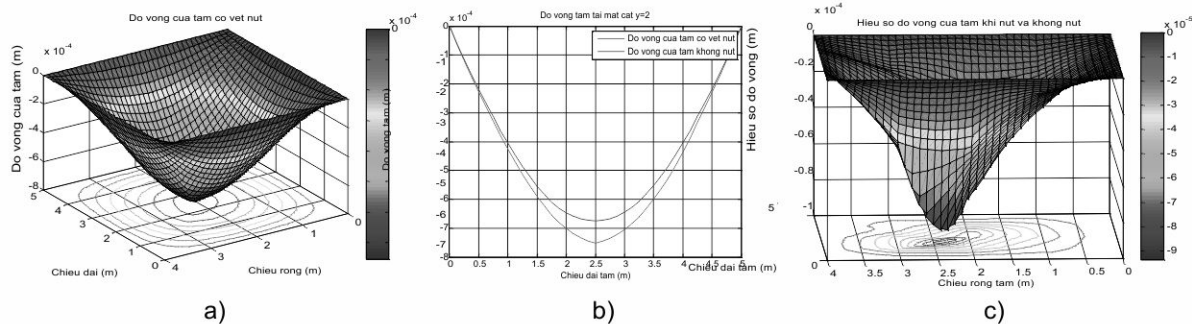
$$\psi_{j,n,m}^k(x, y) = \frac{1}{2^j} \psi^k \left(\frac{x - 2^j n}{2^j} - \frac{y - 2^j m}{2^j} \right); 1 \leq k \leq 3 \quad (30)$$

Các hệ số xấp xỉ và chi tiết được tính toán tương tự như trường hợp 1 chiều.



4. Xác định vết nứt trong tấm dùng phân tích wavelet 2 chiều độ võng và dạng dao động riêng

Xét tấm chữ nhật bốn biên tựa khớp có chiều dài $L=5\text{m}$, chiều rộng $H=4\text{m}$, chiều dày $h=0,2\text{m}$. Tấm có mô đun đàn hồi $E=32,5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, hệ số Poisson $\nu=0,2$, khối lượng riêng $\rho=2550 \text{ N/m}^3$, chịu tải trọng phân bố đều với cường độ $q=-10000 \text{ N/m}^2$.



Hình 5. Phân tích tĩnh tấm có vết nứt

Tấm được chia thành 17 PTHH gồm có 15 phần tử tứ giác đẳng tham số bậc hai 8 nút và 2 phần tử tam giác đẳng tham số bậc hai 6 nút như Hình 4. Hình 5a thể hiện kết quả tính độ võng tấm có vết nứt. Hình 5b thể hiện độ võng của tấm tại mặt cắt $y=2m$. Hình 5c thể hiện hiệu số độ võng của tấm có vết nứt và không có vết nứt. Ta nhận thấy vết nứt càng gần khu vực trung tâm của tấm thì sự chênh lệch của độ võng giữa tấm không nứt và tấm có vết nứt càng lớn. Sự chênh lệch độ võng của tấm có vết nứt và không có vết nứt tập trung xung quanh vị trí vết nứt. Càng gần vết nứt, sự chênh lệch này càng lớn, lớn nhất tại tâm vết nứt (Bảng 1). Tuy vậy, nếu chỉ dừng lại ở so sánh độ võng tấm bằng phương pháp PTHH thì ta rất khó phân biệt tấm có vết nứt và không có vết nứt.

Bảng 2 là kết quả so sánh sự thay đổi tần số dao động riêng của tấm khi xuất hiện vết nứt. Ta nhận thấy sự thay đổi 5 tần số dao động riêng đầu tiên là rất nhỏ, chỉ từ tần số thứ 6 là lớn.

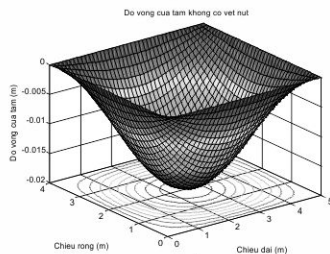
Hình 6 thể hiện các dạng dao động riêng thứ 1, 2 và 4 của tấm có vết nứt. Để phân biệt rõ hơn tấm có vết nứt, ta sử dụng phân tích wavelet 2 chiều đối với độ võng tĩnh của tấm được tính ở trên. Hình 7 thể hiện kết quả phân tích wavelet 2 chiều dùng họ wavelet $db4$ đối với độ võng tĩnh của tấm. Ta nhận thấy, phân tích wavelet đều xác định được khá chính xác vị trí vết nứt trong tấm. Việc phân tích wavelet đối với các dạng dao động riêng của tấm cũng cho kết quả tương tự.

Bảng 1. Kết quả tính độ võng

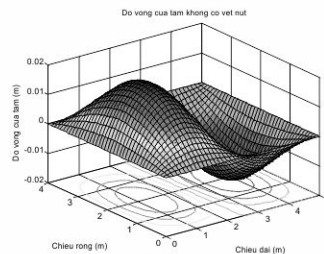
Nút	Tấm có vết nứt (mm)	Tấm không có vết nứt (mm)	Chênh lệch (%)
7	-0.3752	-0.362	-3.65%
8	-0.5382	-0.492	-9.39%
9	-0.4023	-0.362	-11.13%
12	-0.5167	-0.482	-7.20%
13	-0.7505	-0.672	-11.68%
14	-0.5229	-0.482	-8.49%

Bảng 2. Kết quả tính tần số dao động riêng

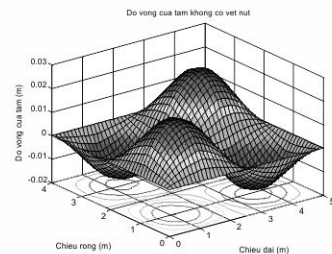
Mode	Tấm không vết nứt (Hz)	Tấm có vết nứt (Hz)	Sai số so với không có vết nứt (%)
1	34.05	32.66	-4.26%
2	76.28	75.02	-1.68%
3	99.14	96.56	-2.67%
4	148.17	139.32	-6.35%
5	158.81	154.76	-2.61%
6	220.71	196.17	-12.51%



a)

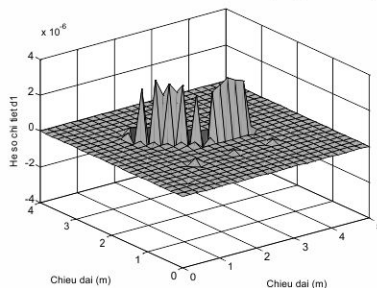


b)

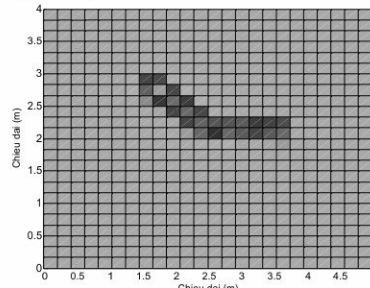


c)

Hình 6. Các dạng dao động riêng thứ 1, 2 và 4 của tấm có vết nứt



a)



b)

Hình 7. Kết quả phân tích wavelet db4 đối với độ võng của tấm có vết nứt



5. Kết luận

- Đã kết hợp các mô hình PTHH tứ giác đẳng tham số bậc hai 8 nút và PTHH tam giác đẳng tham số bậc hai 6 nút của Barsoum để phân tích tấm chịu uốn có vết nứt xiên bất kỳ theo lý thuyết tấm dày Reissner - Mindlin. Từ đó đã xây dựng được chương trình phân tích tĩnh và động cho tấm chữ nhật dày chịu uốn có vết nứt xiên bất kỳ (bài toán thuận). Kết quả so sánh cho thấy chương trình được lập có độ tin cậy.

- Đã tiến hành phân tích wavelet 2 chiều đối với độ võng và các dạng dao động riêng của tấm chữ nhật dày chịu uốn có vết nứt xiên bất kỳ để xác định vị trí vết nứt trong tấm (bài toán ngược). Kết quả phân tích cho thấy đây là một phương pháp chẩn đoán cho kết quả và có thể ứng dụng hiệu quả cho các công trình thực tế.

Tài liệu tham khảo

1. Rice J.R., Levy N. (1972), "The part-through surface crack in an elastic plate", *Journal of Applied Mechanics*, 3, 185-194.
2. Qian G.L., Gu S.N., Jiang J.S. (1991), "A finite element model of cracked plates and application to vibration problems", *Computers & Structures*, Vol. 39, No. 5, 483-487.
3. Krawczuk M. (1994), "Rectangular shell finite element with an open crack", *Finite elements in analysis and design*, 15, 233-253.
4. Krawczuk M., Ostachowicz W. (1994), "A finite plate element for dynamic analysis of a cracked plate", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 115, 67-78.
5. Henshell, R.D and Shaw, K.G (1975), "Crack tip elements are unnecessary", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.6, 99-117.
6. Barsoum, R.S (1976), "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.10, 25-38.
7. Barsoum, R.S (1977), "Triangular quarter point elements as elastic and perfectly elastic crack tip elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.11, 85-98.
8. Gray L. J., Phan V., Glaucio H. Paulino, Kaplan T. (2003), "Improved quarter point crack tip element", *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 269-283.
9. Nicolas Moes, John Dolbow and Ted Belytschko (1999), "A finite element method for crack growth without remeshing", *International Journal for Numerical methods in engineering*, 46, 131-150.
10. Khadem S.E., Rezaee M. (2000), "Introduction of modified comparison functions for vibration analysis of a rectangular cracked plate", *Journal of Sound and Vibration*, 236(2), 245-258.
11. Douka E., Louitridis S., Trochidis A. (2004), "Crack identification in plate using wavelet analysis", *Journal of Sound and Vibration*, 270, 279-295.
12. Louitridis S., Douka E., Hadjileontiadis L.J., Trochidis A. (2005), "A two-dimensional wavelet transform for detection of cracks in plate", *Engineering structures*, 27, 1327-1338.
13. Khadem S.E., Rezaee M. (2000), "An analytical approach for obtaining the location and depth of an all-over part-through crack on externally in-plane loaded rectangular plate using vibration analysis", *Journal of Sound and Vibration*, 230(2), 291-308.
14. Nguyễn Thị Hiền Lương, Phạm Ngọc Tiến (2007), "Khảo sát sự nhạy cảm của độ võng tấm mỏng chịu uốn có vết nứt bằng kỹ thuật biến đổi wavelet", *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ 8*, 268-278.
15. Nguyễn Hoài Sơn, Lâm Phát Thuận (2010), "Nhận dạng vết nứt và tính toán ứng suất kỳ dị trong tấm dùng phân tích wavelets", *Tuyển tập công trình Hội nghị Khoa học toàn quốc CHVRBD lần thứ 10*, 631-636.
16. Nguyễn Hoài Sơn, Nguyễn Thị Bích Liễu (2010), "Phân tích động tấm có vết nứt sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn-biến đổi wavelet", *Tuyển tập công trình Hội nghị Khoa học toàn quốc CHVRBD lần thứ 10*, 620-630.
17. Trần Văn Liên, Trịnh Anh Hào, Nguyễn Minh Đức, "Xác định vị trí vết nứt trong tấm chịu uốn bằng phân tích wavelet chuyển vị và dạng dao động riêng", *Tạp chí Kết cấu và Công nghệ Xây dựng*, Hội Kết cấu và Công nghệ Việt Nam, số 13/IV-2013, trang 53-65.
18. Trần Văn Liên, Nguyễn Trọng Huy, "Xác định vết nứt trong tấm dày chịu uốn sử dụng phân tích wavelet 2 chiều của độ võng và dạng dao động riêng", *Tuyển tập Hội nghị Cơ học Kỹ thuật Toàn quốc Kỷ niệm 35 năm thành lập Viện Cơ học*, Hà Nội ngày 9/4/2014, tập 1, trang 137-142.
19. Liu G.R. and Quek S.S (2003), *The finite element method-A practical course*, First Edition, Butterworth-Heinemann.
20. Schreurs P.J.G (2012), *Fracture Mechanics*, Eindhoven University of Technology
21. *Wavelet toolbox user's guide R2012a*, MathWorks.