ỔN ĐỊNH TỪ BIẾN CỦA VÒM TRÒN

Tô Văn Tấn[1], Đỗ Trí Công[2], Trần Viết Kiên[3]

***Tóm tắt**: Sử dụng lý thuyết từ biến di truyền tuyến tính và tiêu chuẩn ổn định từ biến PG2, các tác giả đưa việc giải bài toán ổn định từ biến của vòm về việc giải bài toán ổn định đàn hồi của vòm với mô đun đàn hồi giả tạo chứa thời gian. Từ đó tìm thời gian tới hạn và giới hạn ổn định dài hạn của vòm từ vật liệu đàn nhớt.*

***Từ khóa**: Ổn định từ biến; đàn nhớt; uốn dọc (mất ổn định); môđun đàn hồi giả tạo.*

***Summary**: Using a theory of linear inherent creep and the creep buckling criterion PG2, the authors reduced the problem of creep buckling of arches to elastic buckling of the same artches with pseudo elastic modulus that depends on time. The magnitude of critical time and long-time critical load of visco-elastic arches are determined.*

***Keywords**: Creep stability; viscoelastic; buckling; pseudo elastic modulus.*

Nhận ngày 05/8/2015, chỉnh sửa ngày 19/8/2015, chấp nhận đăng 30/9/2015

1. Mở đầu

Năm 1957 Iu.N.Rabotnov đã đưa ra tiêu chuẩn ổn định từ biến, mà sau này cho thấy [1] trùng với phân nhánh giả bậc 0 (PG0) của lý thuyết các điểm phân nhánh giả của V.D.Cliusnhicov. Năm 1961 L.M.Cursin đã đưa ra tiêu chuẩn ổn định từ biến mà thực chất trùng với phân nhánh giả bậc 1 (PG1). Năm 1986 các tác giả [1] cho thấy PG2 mới trùng với kết quả thực nghiệm. Kèm theo với tiêu chuẩn PG2 là phương pháp "tương tự đàn hồi" [1] cho phép giải nhiều bài toán ổn định từ biến của kết cấu. Lý thuyết của V.D.Cliusnhicov có thể áp dụng cho từ biến phi tuyến của kim loại cũng như cho từ biến tuyến tính của bê tông, polime,… Tuy nhiên, phương pháp này chỉ cho kết quả cụ thể khi đã có kết quả của bài toán ổn định đàn hồi tương ứng.

Áp dụng tiêu chuẩn PG2 đã giải được các bài toán ổn định từ biến của thanh thẳng [1 - 4] của tấm [1, 4, 5], bài toán ổn định dạng uốn phẳng của vòm [6]. Bài báo này giải bài toán ổn định từ biến của vòm chịu nén. Khi đạt thời gian tới hạn vòm sẽ mất ổn định, bị nén - uốn trong mặt phẳng của vòm [7].

Đối tượng nghiên cứu là các vòm tròn có số khớp khác nhau, chịu lực phân bố đều hướng tâm từ vật liệu đàn nhớt. Mục đích là giải bài toán ổn định từ biến: xác định thời gian tới hạn, giới hạn ổn định dài hạn của vòm và so sánh sự làm việc theo thời gian của các vòm có kích thước như nhau với số khớp khác nhau.

2. Phương pháp giải

Với vật liệu đàn nhớt, ta sử dụng phương trình trạng thái theo lý thuyết di truyền tuyến tính:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t K(t,\tau)\sigma(\tau)d\tau \qquad (1)$$

Trong đó: $K(t,\tau)$ là nhân từ biến. Tiêu chuẩn ổn định từ biến được sử dụng là PG2 [1] (trong đó xem hệ mất ổn định khi đạt phân nhánh giả bậc 2), phân nhánh giả bậc 2 là trường hợp khi $\Delta\ddot{e} \neq 0, \Delta\ddot{\sigma} \neq 0$, còn $\Delta e^{(r)} = 0, \Delta\sigma^{(r)} = 0$ với r ≠ 2, (2)

[1]PGS.TS, Khoa Xây dựng dân dụng và công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng.
[2]ThS, Công ty Cổ phần Tư vấn đầu tư phát triển và xây dựng Thikeco.
[3]KS, Công ty Cổ phần Tư vấn đầu tư phát triển và xây dựng Thikeco. E-mail: trankientkc@gmail.com.

Trong đó: $\Delta\ddot{e} = \ddot{e} - \ddot{e}^{(0)}, \Delta\ddot{\sigma} = \ddot{\sigma} - \ddot{\sigma}^{(0)}$, với $\ddot{e}^{(0)}, \ddot{\sigma}^{(0)}$ ở quá trình cơ bản; $\ddot{e}, \ddot{\sigma}$ ở quá trình lân cận. Viết (1) dưới dạng "kích động" Δ, sau khi biến đổi và sử dụng (2) ta thu được:

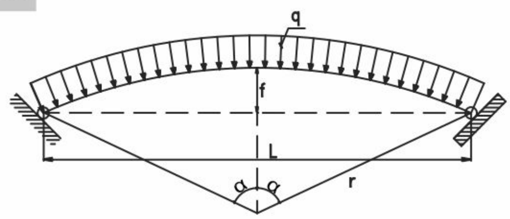
$$\Delta\ddot{\sigma} = \tilde{E}_2(t).\Delta\ddot{e} \tag{3}$$

Trong đó: $\tilde{E}_2(t) = E\left[1 + \frac{E}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 \ddot{K}(t,\tau)d\tau\right]^{-1}$ (4)

Đẳng thức (3) có dạng giống định luật Húc nhưng modun đàn hồi giả tạo là $\tilde{E}_2(t)$ chứa thời gian tới hạn theo PG2 [1 - 3].

Như vậy, có thể thay modun đàn hồi E trong công thức lực tới hạn của bài toán ổn định đàn hồi bằng $\tilde{E}_2(t)$ để đưa việc giải bài toán ổn định từ biến về giải bài toán ổn định đàn hồi với $\tilde{E}_2(t)$ .Sau đó tìm thời gian tới hạn và giới hạn ổn định dài hạn.

3. Áp dụng cho vòm tròn



Hình 1. *Vòm hai khớp chịu tải trọng phân bố đều*

Các bài toán ổn định đàn hồi của vòm với số khớp khác nhau đã được trình bày [8, 9] và có các kết quả lực tới hạn: $q_{th} = K_1\frac{EI}{r^3}$ (5)

Trong đó hệ số K_1 phụ thuộc loại vòm. Ví dụ với vòm hai khớp thì $K_1 = \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1$

Tức là $q_{th} = \frac{EI}{r^3}\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1\right)$ với r - bán kính vòm, 21α - góc mở của vòm (Hình 1).

Để giải bài toán ổn định từ biến ta thay E bằng $\tilde{E}_2(t)$ và đặt $S = \frac{q}{q_{th}}$, từ (4) và (5) ta có:

$$S = \left[1 + \frac{E}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 \ddot{K}(t,\tau)d\tau\right]^{-1} \tag{6}$$

Chọn nhân từ biến các dạng khác nhau [4], trước hết chọn:

$$K(t-\tau) = -\frac{\partial}{\partial\tau}C(t-\tau) \tag{7}$$

Trong đó độ đo từ biến [7]:

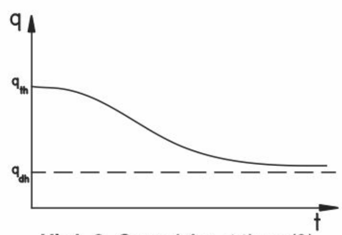
$C(t-\tau) = (C_o + A_o\bar{e}^{\gamma\tau})\left(1 - \bar{e}^{\gamma(t-\tau)}\right); C_o, A_o, \gamma$ là các hằng số của vật liệu (8)

Thay (7) (8) vào (6) ta thu được:

$$S = \left\{1 + EC_o\left[1 - \bar{e}^{\gamma t}\left(1 + \gamma t + \frac{\gamma^2 t^2}{2}\right)\right]\right\}^{-1} \tag{9}$$

Cho t $\rightarrow\infty$ ta có giới hạn ổn định dài hạn q_{dh}:

$S_{dh} = \frac{q_{dh}}{q_{th}} = (1 + EC_o)^{-1}$ hay $q_{dh} = q_{th}(1 + EC_o)^{-1}$ (10)



Hình 2. *Quan hệ q~t theo (9)*

Từ (9) ta vẽ được đồ thị q~t (Hình 2)

Ta nhận thấy: Khi q = q_{th} vòm sẽ mất ổn định tức thời (đàn hồi).

Khi q_{dh} < q < q_{th} vòm sẽ mất ổn định sau một khoảng thời gian nào đó.

Khi q < q_{dh} thì vòm luôn ổn định với mọi t.

- Nếu chọn nhân từ biến với độ đo từ biến [4]:

$C(t-\tau) = C_o - C_1\bar{e}^{\gamma_1(t-\tau)} - C_2\bar{e}^{\gamma_2(t-\tau)}$; C_o, C_1, C_2 là các hằng số vật liệu (11)

Thì $S=\left\{1+EC_1\left[1-\bar{e}^{\gamma_1 t}\left(1+\gamma_1 t+\frac{\gamma_1{}^2t^2}{2}\right)\right]+EC_2\left[1-\bar{e}^{\gamma_2 t}\left(1+\gamma_2 t+\frac{\gamma_2{}^2t^2}{2}\right)\right]\right\}^{-1}$ (12)

Cho t → ∞ ta có giới hạn ổn định dài hạn: $q_{dh}=q_{th}(1+EC_1+EC_2)^{-1}$ (13)

- Nếu chọn nhân từ biến dạng: $K(t-\tau)=\gamma\frac{k}{E}\bar{e}^{\gamma(t-\tau)}$; γ, k, E là các hằng số vật liệu (14)

Ta thu được: $S=\left\{1+k\left[1-\left(1+\gamma t+\frac{\gamma^2t^2}{2}\right)\bar{e}^{\gamma t}\right]\right\}^{-1}$ (15)

Cho t → ∞ ta có: $q_{dh}=q_{th}(1+k)^{-1}$ (16)

4. Các ví dụ

Tìm thời gian tới hạn và giới hạn ổn định lâu dài cho vòm tròn hai khớp (Hình 1) có bán kính r = 6m, tiết diện có chiều dày h=0,2 m; chịu tải trọng phân bố đều q hướng tâm với nửa góc chắn tâm α=70^0, $E=3{,}4.10^5\frac{KG}{cm^2}$, hằng số vật liệu đàn nhớt: $C_o=0{,}15.10^{-3}\frac{mm^2}{KG}, \gamma=0{,}04\ (ngày)^{-1}$.

Trước tiên tính lực tới hạn q_{th}:

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{1.0{,}2^3}{12}=0{,}67.10^{-3}m^4(b=1m)$$

$$q_{th}=\frac{EI}{r^3}\left(\frac{r^2}{\alpha^2}-1\right)=\frac{3{,}4.10^9.0{,}67.10^{-3}}{6^3}\left(\frac{180^2}{70^2}-1\right)=58{,}9.10^3\frac{KG}{m}\cong 58{,}9\ T/m \quad (17)$$

Sử dụng (9), ta có:

$$S=\left\{1+EC_0\left[1-\bar{e}^{\gamma t}\left(1+\gamma t+\frac{\gamma^2t^2}{2}\right)\right]\right\}^{-1}=\left\{1+0{,}51\left[1-\bar{e}^{0{,}04t}\left(1+0{,}04t+\frac{0{,}04^2t^2}{2}\right)\right]\right\}^{-1} \quad (18)$$

Cho t → ∞ ta thu được:

$$S_{dh}=\frac{q_{dh}}{q_{th}}=(1+EC_o)^{-1}=0{,}662 \quad (19)$$

Như vậy với $q<q_{dh}=0{,}662q_{th}=39.10^3\frac{KG}{m}=39\ T/m$ thì vòm luôn ổn định với mọi t.

Thời gian tới hạn ứng với tải trọng tác dụng lớn hơn q_{dh} được tính từ (18).

- Xét vòm ba khớp (thêm một khớp giữa vòm), với số liệu như của vòm hai khớp nêu trên.

Lực tới hạn tính theo [8]: $q_{th}=\frac{4\vartheta^2-\alpha^2}{\alpha^2}\cdot\frac{EI}{r^3}$

Từ: $\frac{tg\vartheta-\vartheta}{\vartheta^3}=\frac{4(tg\alpha-\alpha)}{\alpha^3}$ ta có $\vartheta=85{,}44$; Do đó $q_{th}=52{,}039.10^3KG/m$

$$S=\frac{q}{q_{th}}=\left\{1+0{,}51\left[1-\bar{e}^{0{,}04t}\left(1+0{,}04t+\frac{0{,}04^2t^2}{2}\right)\right]\right\}^{-1} \quad (20)$$

$$S_{dh}=\frac{q_{dh}}{q_{th}}=(1+EC_o)^{-1}=0{,}662$$

Vì vậy với $q<q_{dh}=0{,}662q_{th}=34{,}46.10^3\frac{KG}{m}=34{,}46\ T/m$ thì vòm luôn ổn định với mọi t, thời gian tới hạn ứng với tải trọng lớn hơn q_{dh} được tính từ (20).

- Xét vòm một khớp (ở giữa vòm): Tương tự như trên ta thu được:

$$S_{dh}=0{,}662, q_{th}=78{,}88.10^3\frac{KG}{m}, q_{dh}=52{,}24.10^3\frac{KG}{m}=52{,}24T/m$$

- Xét vòm không khớp ta thu được:

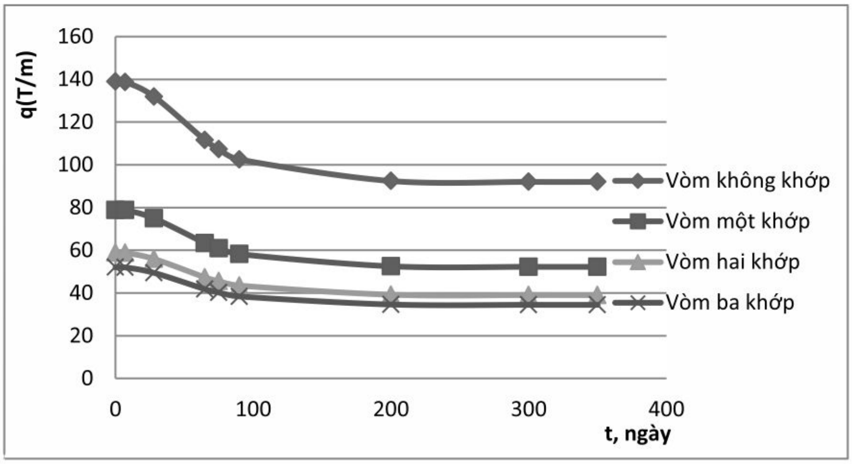
$$S_{dh}=0{,}662, q_{th}=388{,}89.10^3\frac{KG}{m}, q_{dh}=91{,}98.10^3\frac{KG}{m}=91{,}98T/m$$

Các số liệu tính toán cho các vòm khác nhau (có cùng r,α, loại vật liệu) được đưa vào Bảng 1, đồ thị q~ t ở Hình 3, để tiện so sánh.

Bảng 1. *Quan hệ tải trọng - thời gian tới hạn của các loại vòm*

t (ngày)	q (T/m)			
	Vòm ba khớp	Vòm hai khớp	Vòm một khớp	Vòm không khớp
0	52,04	58,89	78,88	138,89
7	51,96	58,80	78,77	138,69
28	49,43	55,94	74,92	131,92
65	41,78	47,28	63,33	111,51
75	40,21	45,51	60,95	107,32
90	38,39	43,45	58,19	102,46
200	34,62	39,19	52,49	92,41
300	34,47	39,04	52,25	92,00
∞	34,46	39,01	52,24	91,98

Từ bảng trên ta thấy, ví dụ với q= 45,51T/m = 4,551KN/cm thì vòm hai khớp nêu trên sẽ mất ổn định sau khoảng 75 ngày.



Hình 3. *Đồ thị quan hệ tải trọng - thời gian tới hạn các loại vòm*

5. Kết luận

- Sử dụng phương pháp nêu trên các tác giả đã giải bài toán ổn định từ biến của vòm tròn (tìm được thời gian tới hạn và giới hạn ổn định dài hạn). Với tải trọng cho trước sẽ biết được thời gian vòm mất ổn định.

- Với cùng loại vật liệu, chiều dài nhịp, tải trọng tác dụng, khi số khớp của vòm giảm thì thời gian tới hạn tăng. Nói cách khác, với cùng thời gian, kích thước, vật liệu, vòm sẽ mất ổn định với tải trọng tăng lên khi số khớp ở vòm giảm đi.

- Với cùng loại vật liệu, sử dụng cùng nhân từ biến thì dạng đồ thị S~t giống nhau, còn đồ thị q~t là khác nhau với các vòm khác nhau. Giới hạn ổn định lâu dài (không thứ nguyên) S_{dh} là như nhau đối với các vòm có số lượng khớp khác nhau.

- Ở đây chỉ nghiên cứu vòm tròn chịu lực hướng tâm. Khi mất ổn định vòm chuyển từ dạng cân bằng chịu nén sang dạng cân bằng chịu nén - uốn. Phương pháp tính toán trên có thể áp dụng cho vòm parabol có trục trùng đường cong áp lực.

- Ngoài phụ thuộc số lượng khớp, sự ổn định của vòm còn phụ thuộc góc mở 2α của vòm, tỷ số độ võng f và chiều dài nhịp l của vòm.

- Khi tải trọng nhỏ hơn S_{dh} thì vòm không mất ổn định theo thời gian. Khi tải trọng tăng thì thời gian tới hạn giảm. Khi S=1 thì vòm mất ổn định tức thời (t=0).

Tài liệu tham khảo

1. Cliusnhicov V.D, To Van Tan (1986), *Creep Stability: Variant of theory and experiment, Transactions of AN*, MTT (in Russian).
2. Tô Văn Tấn (1986), “Ổn định của thanh trong điều kiện từ biến”, *Tạp chí cơ học*, tr20-25.
3. Tô Văn Tấn (1987), “Ổn định của thanh vật liệu có tính già và di truyền”, *Tạp chí cơ học*, tr22-25.
4. Phạm Quốc Doanh (2000), *Ổn định từ biến của các kết cấu thanh và tấm*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật - Hà Nội 2000.
5. Pham Quoc Doanh, To Van Tan (1998), “Stability of viscoelastic plate in shear”, *Viet Nam journal of Mechanics*, T.XX, No 46-54.
6. Tô Văn Tấn, Lê Hải Đăng, Phạm Đức Trung (2013), “Mất ổn định từ biến dạng uốn phẳng của vòm”, *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, Trường ĐH Xây dựng, số 17, tr 17-22.
7. Đỗ Trí Công (2012), *Ổn định từ biến của vòm*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật, Trường ĐH Xây dựng.
8. Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình (2002), *Ổn định công trình*, NXB Khoa học và kỹ thuật.
9. A.F.Xmirnov (1984), *Dynamic and Stability of Structures*, Building publishers Moscow (in Russian).