Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, ĐHXDHN, 2026, 20 (4V): 60–72

# PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH XOẮN UỐN CỘT THÉP THÀNH MỎNG TIẾT DIỆN OMEGA: THIẾT LẬP CÔNG THỨC ĐẶC TRƯNG QUẠT VÀ ỨNG DỤNG

Bùi Hùng Cường[a], Nguyễn Đình Hòa[a,*], Nguyễn Quang Khải[b]

[a]*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam*
[b]*Công ty TNHH Tư vấn Đại học Xây dựng, Hà Nội, Việt Nam*

*Nhận ngày 02/8/2026, Sửa xong 03/9/2026, Chấp nhận đăng 09/9/2026*

**Tóm tắt**

Việc xác định chính xác lực tới hạn mất ổn định xoắn uốn của cột thép thành mỏng tiết diện Omega (Ω) phụ thuộc trực tiếp vào các đặc trưng hình học quạt của tiết diện, bao gồm tâm cắt và mô men quán tính quạt. Tuy nhiên, đối với tiết diện Omega có sườn dập nghiêng và mép gấp ngược, các công thức giải tích xác định các đặc trưng này hiện chưa được công bố. Bài báo thiết lập các công thức giải tích xác định tâm cắt và mô men quán tính quạt của tiết diện Omega gồm chín đoạn thẳng có sườn nghiêng góc bất kỳ trên cơ sở lý thuyết Vlasov. Độ chính xác của các công thức được kiểm chứng thông qua so sánh với kết quả phân tích trong các chương trình CUFSM và GBTUL trên cơ sở dữ liệu gồm 8640 tiết diện với các kích thước hình học khác nhau. Kết quả cho thấy sai lệch lớn nhất không vượt quá 0,035%. Các công thức đề xuất được ứng dụng để xác định lực tới hạn mất ổn định xoắn uốn của cột theo EN 15512 và EN 1993-1-3, qua đó cung cấp cơ sở tính toán thuận tiện và có độ chính xác cao cho phân tích và thiết kế cột thép thành mỏng tiết diện Omega.

*Từ khoá*: cột tiết diện Omega; mất ổn định xoắn uốn; đặc trưng quạt; công thức giải tích; ứng dụng.

FLEXURAL-TORSIONAL BUCKLING ANALYSIS OF THIN-WALLED OMEGA-SECTION COLUMNS: SECTORIAL PROPERTY FORMULATION AND APPLICATION

**Abstract**

Accurate determination of the flexural–torsional buckling load of thin-walled steel Omega (Ω) columns depends directly on the sectorial properties, including the shear center and the warping constant. However, analytical formulations for determining these properties have not yet been reported for Omega sections with arbitrarily inclined lips and return lips. This paper develops analytical formulations for calculating the shear center and warping constant of Omega sections composed of nine straight plate elements with arbitrarily inclined lips based on Vlasov's thin-walled beam theory. The accuracy of the proposed formulations is verified through comparison with numerical results obtained from the CUFSM and GBTUL programs using a database of 8,640 cross-sections with different geometric dimensions. The maximum deviation between the analytical and numerical results is less than 0.035%. The proposed formulations are subsequently applied to determine the flexural–torsional buckling load of columns in accordance with EN 15512 and EN 1993-1-3, providing an accurate and efficient basis for the analysis and design of thin-walled steel Omega columns.

*Keywords*: Omega-section column; flexural-torsional buckling; sectorial properties; analytical formula; application.

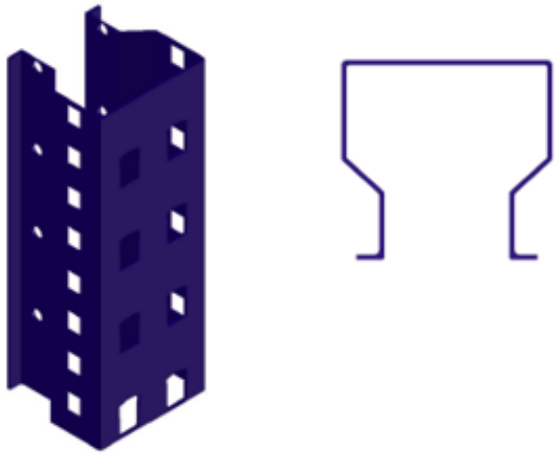
https://doi.org/10.31814/stce.huce2026-20(4V)-05 © 2026 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

## 1. Giới thiệu

Trong lĩnh vực kết cấu thép hiện đại, các cấu kiện thép thành mỏng tạo hình nguội (CFS) ngày càng khẳng định được ưu thế nhờ khả năng tối ưu hóa khối lượng, linh hoạt trong chế tạo và lắp dựng. Việc phân tích khả năng chịu lực của các cấu kiện này đòi hỏi phải giải quyết nhiều dạng mất ổn định phức tạp, từ mất ổn định cục bộ trên các tiết diện rỗng [1], sự suy giảm khả năng chịu lực của cột chịu nén ở nhiệt độ cao [2], cho đến các ứng xử cơ học trên tiết diện không đồng nhất [3]. Đặc biệt, đối với các kết cấu yêu cầu khả năng chịu tải trọng tốt và độ cứng cao, các cột tiết diện hình Omega (Ω)

*Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* hoand@huce.edu.vn (Hòa, N. Đ.)

như Hình 1 được ưu tiên sử dụng. So với các tiết diện truyền thống, tiết diện Omega có cấu trúc phức tạp hơn với hệ thống sườn dập nghiêng gia cường bản bụng và các mép gấp ngược tạo thành mô hình hình học 9 đoạn thẳng. Cấu tạo đặc thù này giúp tiết diện gia tăng đáng kể độ ổn định cục bộ và độ cứng chống xoắn, tuy nhiên hiện nay chưa có công bố các công thức dạng giải tích xác định các đặc trưng quạt của loại tiết diện này để ứng dụng cho tính toán mất ổn định xoắn uốn.



Hình 1. Hình ảnh cột tiết diện Omega trong thực tế

Để phân tích bài toán mất ổn định xoắn uốn của cột chịu nén đúng tâm, dựa trên các quy định trong tiêu chuẩn chuyên ngành như EN 15512 [4] và EN 1993-1-3 [5], việc đánh giá khả năng chịu lực của cột thép thành mỏng hở đòi hỏi phải xác định chính xác lực tới hạn gây mất ổn định xoắn uốn đàn hồi ($N_{cr,FT}$). Đối với cấu kiện đối xứng một trục chịu nén đúng tâm, giá trị này được xác định thông qua sự tương tác giữa lực tới hạn uốn ($N_{cr,x}$) và lực tới hạn xoắn ($N_{cr,T}$) theo phương trình tổng quát sau:

$$N_{cr,FT} = \frac{N_{cr,x}}{2\beta}\left[1 + \frac{N_{cr,T}}{N_{cr,x}} - \sqrt{\left(1 - \frac{N_{cr,T}}{N_{cr,x}}\right)^2 + 4\left(\frac{x_0}{i_0}\right)^2 \frac{N_{cr,T}}{N_{cr,x}}}\right] \tag{1}$$

trong đó: $\beta$ là hệ số lệch tâm hình học:

$$\beta = 1 - \left(\frac{x_0}{i_0}\right)^2 \tag{2}$$

$x_0$ là tọa độ tâm cắt đối với trọng tâm:

$$x_0 = a_x + x_C \tag{3}$$

$i_0$ là bán kính quán tính cực đối với tâm cắt:

$$i_0^2 = i_x^2 + i_y^2 + x_0^2 \tag{4}$$

$N_{cr,x}$ là lực tới hạn gây mất ổn định uốn Euler thuần túy đối với trục đối xứng (trục $x$):

$$N_{cr,x} = \frac{\pi^2 E I_x}{L_{ex}^2} \tag{5}$$

$N_{cr,T}$ là lực tới hạn gây mất ổn định xoắn thuần túy, phụ thuộc trực tiếp vào các đặc trưng quạt của tiết diện:

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_0^2}\left(GI_t + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L_{eT}^2}\right) \tag{6}$$

với: $L_{ex}$ và $L_{eT}$ lần lượt là chiều dài tính toán của cấu kiện khi uốn và khi xoắn.

Theo các phương trình trên, có thể thấy các đại lượng $x_0$ (bản chất là xác định vị trí tâm cắt $a_x$) và mô men quán tính quạt ($I_\omega$) đóng vai trò là "nút thắt" trong toàn bộ quá trình tính toán.

Tại Việt Nam, các nghiên cứu về đặc trưng hình học và bài toán xoắn của thanh thành mỏng đã được quan tâm đáng kể. Các nghiên cứu tiêu biểu bao gồm việc phân tích xoắn kiềm chế đối với cấu kiện tiết diện hở [6], tính toán đặc trưng hình học cho các tiết diện thành mỏng kín [7], hay đánh giá hiệu quả làm việc của dầm chữ I tổ hợp hàn cánh rỗng [8] và ổn định tổng thể của dầm chữ I hai bụng [9]. Dựa trên nền tảng lý thuyết thanh thành mỏng của V.Z. Vlasov [10], các nghiên cứu giải tích về đặc trưng quạt gần đây đã được phát triển thành công cho các tiết diện chữ C có sườn tăng cường đơn giản (như tiết diện OLC và ILC) [11] và tiết diện chữ C có sườn nghiêng góc bất kỳ [12]. Tuy nhiên, khi chuyển sang tiết diện Omega, sự xuất hiện của sườn dập nghiêng góc $\alpha$ và các mép gấp ngược làm biểu đồ phân bố tọa độ quạt phi tuyến thay đổi hoàn toàn. Các công thức dành cho tiết diện 7 đoạn thẳng trước đây không thể áp dụng cho mô hình 9 đoạn thẳng của tiết diện Omega.

Hiện tại, các hướng dẫn thiết kế vẫn thiếu các công thức giải tích tường minh cho loại tiết diện Omega này. Khi thực hành, kỹ sư thường phải phụ thuộc vào các phần mềm mô phỏng số như CUFSM [13], Thin-Wall-2 [14], GBTUL [15] hoặc các chương trình tính toán được xây dựng từ công thức tổng quát của Xiang [16] và Cường [17]. Điều này bắt buộc người dùng phải khai báo tọa độ chi tiết của từng điểm nút, gây tốn kém thời gian và làm giảm tính linh hoạt khi cần thiết kế sơ bộ hoặc tối ưu hóa kích thước tiết diện từ các danh mục sản phẩm thương mại.

Để giải quyết vấn đề trên, bài báo thiết lập các công thức giải tích xác định trực tiếp tâm cắt và mô men quán tính quạt của tiết diện Omega gồm chín đoạn thẳng có sườn nghiêng góc bất kỳ trên cơ sở lý thuyết Vlasov. Độ chính xác của các công thức được đánh giá thông qua so sánh với kết quả phân tích bằng các chương trình CUFSM và GBTUL trên cơ sở dữ liệu gồm 8640 tiết diện có các kích thước hình học khác nhau. Cuối cùng, các công thức đề xuất được ứng dụng để xác định trực tiếp lực tới hạn mất ổn định xoắn uốn $N_{cr,FT}$, qua đó cung cấp phương pháp tính toán thuận tiện và có độ chính xác cao cho phân tích và thiết kế cột thép thành mỏng tiết diện Omega.

## 2. Quy trình phân tích mất ổn định xoắn uốn cho cột tiết diện Omega chịu nén đúng tâm

Để triển khai việc đánh giá khả năng chịu lực của cột thép thành mỏng tiết diện Omega chịu nén đúng tâm theo các tiêu chuẩn hiện hành (như [4] và [5]), nghiên cứu đã hệ thống hóa một quy trình phân tích khép kín. Dựa trên nền tảng của các phương trình tương tác từ (1) đến (6) đã giới thiệu ở mục 1, quy trình này được minh họa trực quan thông qua sơ đồ thuật toán tại Hình 2.

Quá trình phân tích được chia thành các bước thực hiện theo trình tự như sau:

Bước 1 - Khai báo dữ liệu đầu vào: Xác định toàn bộ các thông số ban đầu của bài toán, bao gồm ba nhóm chính:

- Thông số hình học tiết diện Omega: Chiều cao bản bụng ($h$), bề rộng cánh ($b$), chiều dài sườn dập nghiêng ($c$), góc nghiêng sườn ($\alpha$), chiều dài đoạn cánh ép ($d$), chiều dài mép gấp ngược ($k$) và độ dày thành mỏng ($t$). Từ đó, thiết lập tọa độ đường trung bình cho mô hình 9 đoạn thẳng.
- Đặc trưng vật liệu: Mô đun đàn hồi ($E$), mô đun đàn hồi trượt ($G$) và giới hạn chảy của thép ($f_y$).
- Thông số cấu kiện: Tải trọng nén thiết kế ($N_{Ed}$), cùng với chiều dài tính toán khi mất ổn định uốn ($L_{ex}$) và mất ổn định xoắn ($L_{eT}$) được xác định thông qua chiều dài thực tế và điều kiện biên.

Bước 2 - Xác định đặc trưng hình học cơ bản của tiết diện: Từ các kích thước hình học ở Bước 1, tính toán diện tích tiết diện ngang ($A$), tọa độ trọng tâm ($x_c$, $y_c$), các mô men quán tính đối với hệ trục trung tâm ($I_x$, $I_y$) và hằng số xoắn St. Venant ($I_t$).

Bước 3 - Xác định đặc trưng quạt và các thông số hình học dẫn xuất: Bằng việc thiết lập hệ tọa độ quạt dọc theo đường trung bình của tiết diện, tính toán xác định vị trí tâm cắt (khoảng cách $a_x$) và mô men quán tính quạt ($I_\omega$). Sau khi có được tọa độ tâm cắt $a_x$, các thông số dẫn xuất bao gồm tọa độ tâm cắt đối với trọng tâm ($x_0$) và bán kính quán tính cực đối với tâm cắt ($i_0$) sẽ lần lượt được xác định theo (3) và (4).

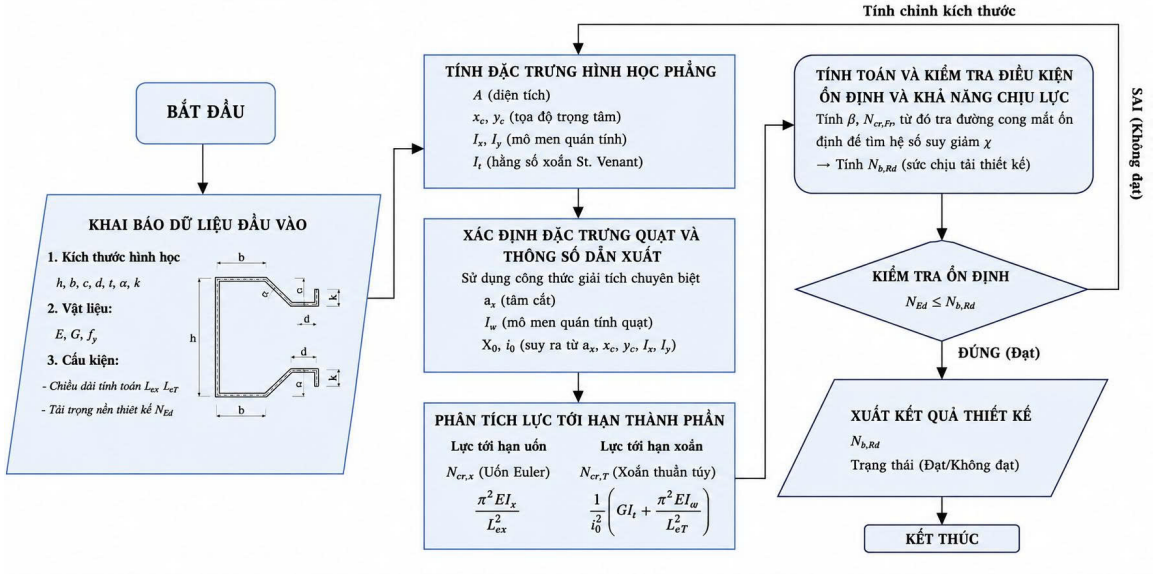
Bước 4 - Phân tích các lực tới hạn thành phần: Sử dụng các thông số từ Bước 1, 2 và 3 để tính toán lực tới hạn gây mất ổn định uốn Euler thuần túy ($N_{cr,x}$) theo (5) và lực tới hạn mất ổn định xoắn thuần túy ($N_{cr,T}$) theo (6).

Bước 5 – Tính toán và kiểm tra khả năng chịu lực theo điều kiện ổn định:

- Tính toán hệ số lệch tâm hình học $\beta$ theo phương trình (2) và thay các giá trị $N_{cr,x}$, $N_{cr,T}$ và $\beta$ vào phương trình (1) để xác định $N_{cr,FT}$.

- Từ giá trị $N_{cr,FT}$ và các đặc trưng vật liệu, tra đường cong mất ổn định để tìm hệ số suy giảm $\chi$, từ đó xác định khả năng chịu lực của cột theo điều kiện ổn định $N_{b,Rd}$.

- Kiểm tra ổn định: So sánh khả năng chịu lực theo điều kiện ổn định tổng thể $N_{b,Rd}$ với tải trọng thiết kế $N_{Ed}$. Nếu $N_{Ed} \leq N_{b,Rd}$, cột đảm bảo ổn định. Ngược lại, cột bị mất ổn định và cần phải điều chỉnh lại kích thước hình học ở Bước 1.




Hình 2. Sơ đồ quy trình phân tích mất ổn định xoắn uốn cho cột tiết diện Omega chịu nén đúng tâm

Từ sơ đồ thuật toán ở Hình 2, có thể nhận thấy các Bước 1, 2, 4 và 5 chủ yếu là quá trình nạp dữ liệu và xử lý các phép toán đại số theo quy định hiện hành của tiêu chuẩn. Tuy nhiên, Bước 3 là một "nút thắt" quyết định tính khả thi của toàn bộ quy trình.

Do tiết diện Omega gồm chín đoạn thẳng với sườn nghiêng góc $\alpha$, sự phân bố tọa độ quạt trên tiết diện có dạng phức tạp, gây khó khăn cho việc xác định trực tiếp tâm cắt và mô men quán tính quạt. Vì vậy, việc thiết lập các công thức giải tích xác định các đặc trưng hình học quạt $a_x$ và $I_\omega$ có ý nghĩa quan trọng, tạo cơ sở để xác định trực tiếp lực tới hạn mất ổn định xoắn uốn theo các phương trình (1) – (6) mà không cần thực hiện phân tích số đối với từng tiết diện. Nội dung này được xây dựng trên cơ

sở lý thuyết thanh thành mỏng của Vlasov và được trình bày chi tiết trong Mục 3.

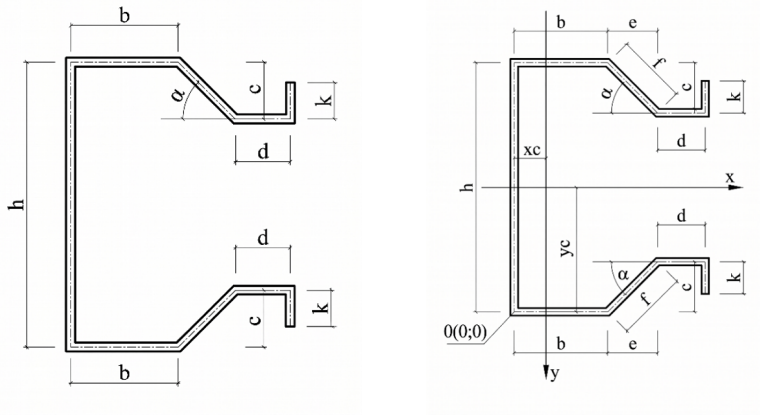
## 3. Thiết lập công thức giải tích đặc trưng quạt cho tiết diện Omega

Dựa trên nguyên lý của lý thuyết thanh thành mỏng Vlasov đã được đề cập, phần này đi sâu vào việc thiết lập các công thức giải tích phục vụ tính toán đặc trưng quạt cho mô hình hình học nhiều phân đoạn của tiết diện Omega.

### *3.1. Mô hình hình học đường trung bình và đặc trưng cơ bản*

Căn cứ theo các điều kiện của EN 1993-1-3 đối với cấu kiện thép tạo hình nguội, do bán kính góc lượn thực tế có kích thước tương đối nhỏ, cấu hình hình học của tiết diện được lý tưởng hóa bằng đường trung bình bỏ qua độ cong tại các nếp gấp. Giả thiết này ảnh hưởng rất nhỏ đến độ chính xác nhưng giúp đơn giản hóa bài toán tích phân. Cần lưu ý rằng, khi ứng dụng làm cột kệ hàng, tiết diện Omega thường được dập các hệ lỗ dọc theo chiều dài cấu kiện để phục vụ mục đích liên kết (như minh họa tại Hình 1). Tuy nhiên, nghiên cứu này tập trung thiết lập các công thức giải tích xác định đặc trưng quạt cho mô hình tiết diện nguyên liên tục. Điều này đóng vai trò là nền tảng lý thuyết cốt lõi và tường minh về mặt toán học trước khi xét đến các yếu tố giảm yếu phức tạp trong thực tế. Đối với cấu kiện thực tế có lỗ đột dập, ảnh hưởng của sự giảm yếu đến đặc trưng quạt và độ cứng chống xoắn uốn có thể được giải quyết bằng cách áp dụng phương pháp bề rộng tương đương theo EN 15512.

Bài toán thiết lập một hệ trục tọa độ quy chiếu $x - y$ với gốc tọa độ $O(0;0)$ được định vị tại mép dưới cùng của bản thành đứng, trục $x$ là trục đối xứng ngang của tiết diện (như minh họa tại Hình 3). Tiết diện Omega tổng quát được mô hình hóa bằng 9 đoạn thẳng liên tục, bao gồm: 1 bản bụng ($h$), 2 bản cánh ($b$), 2 sườn dập nghiêng góc $\alpha$ (đoạn $c$), 2 đoạn cánh ép ($d$) và 2 mép gấp ngược ($k$). Độ dày thành mỏng là $t$ đồng nhất trên toàn tiết diện.




(a) Tiết diện Omega với các thông số hình học

(b) Tiết diện Omega với các thông số hình học và hệ trục tọa độ

Hình 3. Thông số hình học đường trung bình của tiết diện Omega

Giả sử $C\,(x_c; y_c)$ là trọng tâm hình học của tiết diện, tọa độ trọng tâm được xác định bằng biểu thức đại số sau:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i S_i}{\sum_{i=1}^{9} S_i} = \frac{b^2 + 2bf + ef + 2bd + 2ed + d^2 + 2kb + 2ke + 2kd}{h + 2b + 2f + 2d + 2k}; \quad y_c = \frac{h}{2} \tag{7}$$

trong đó, $e$ và $f$ lần lượt là hình chiếu ngang và chiều dài thực của đoạn sườn nghiêng:

$$e = \frac{c}{\tan\alpha}; \quad f = \frac{c}{\sin\alpha} \tag{8}$$

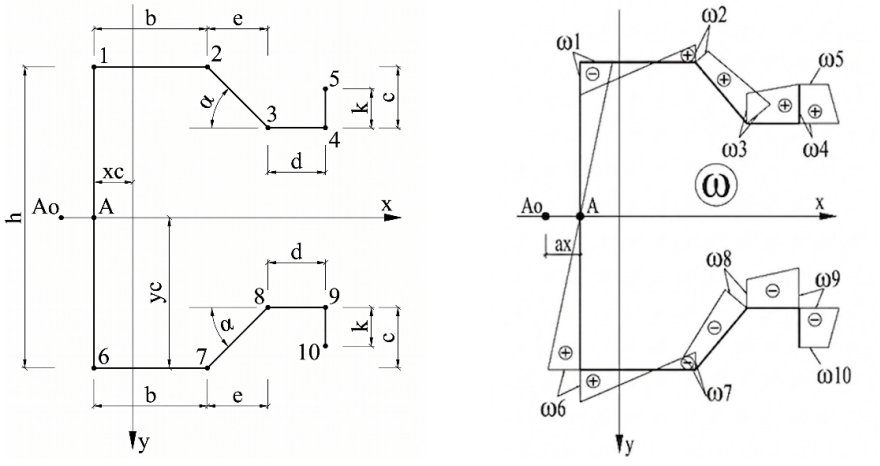
Mô men quán tính phẳng đối với trục chính trung tâm $x$ ($I_x$) được xác định như sau:

$$I_x = \frac{th^3}{12} + \frac{bt^3}{6} + \frac{h^2bt}{2} + \frac{tc^3}{6\sin\alpha} + \frac{(h-c)^2ft}{2} + \frac{dt^3}{6} + \frac{(h-2c)^2dt}{2} + \frac{tk^3}{6} + \frac{kt(h-2c+k)^2}{2} \tag{9}$$

*3.2. Thiết lập hàm phân bố tọa độ quạt cho hệ 9 đoạn thẳng*

Để định lượng biến dạng vênh của tiết diện, một cực tính toán giả định $A$ được đặt tại trung điểm của bản bụng (nằm trên trục đối xứng $x$), và $A_o$ là cực chính (tâm cắt thực tế cần tìm, cách cực $A$ một đoạn $a_x$). Tiết diện Omega được rời rạc hóa thành 9 phân đoạn liên kết tại 10 điểm nút (từ nút 1 đến nút 10 như Hình 4(a)).

Để đảm bảo tính nhất quán và chính xác cho quá trình tính toán tích phân xác định đặc trưng quạt, các quy ước về dấu của tung độ phẳng và diện tích quét dọc theo đường trung bình của tiết diện được thiết lập cụ thể như sau: Quy ước dấu của tung độ $y$: Trục tung $y$ nhận chiều hướng xuống dưới là chiều dương và hướng lên trên là chiều âm, với gốc tọa độ đặt tại trục đối xứng $x$ của tiết diện. Do đó, các nút nằm ở nửa dưới tiết diện sẽ có tung độ mang dấu dương, trong khi các nút ở nửa trên có tung độ mang dấu âm. Quy ước dấu của góc quay và diện tích quét (tọa độ quạt ω): Chiều quay ngược chiều kim đồng hồ quanh cực quạt lý thuyết $A$ được quy ước là mang dấu âm (chiều quay thuận chiều kim đồng hồ mang dấu dương). Khi thực hiện tích phân đường bắt đầu từ nút 1 đến nút 10, nếu vectơ bán kính từ cực $A$ đến điểm chạy trên đường trung bình quay ngược chiều kim đồng hồ, giá trị vi phân tọa độ quạt ω tương ứng sẽ mang dấu âm; ngược lại sẽ nhận giá trị dương. Quy ước dấu rõ ràng này là cơ sở quan trọng để xây dựng chính xác các biểu đồ tung độ hình học $y$ (Hình 5(a)) và biểu đồ tọa độ quạt $\omega_A$ (Hình 4(b), Hình 5(b)), đồng thời phục vụ cho phép nhân biểu đồ xác định đặc trưng quạt ở các bước tiếp theo.



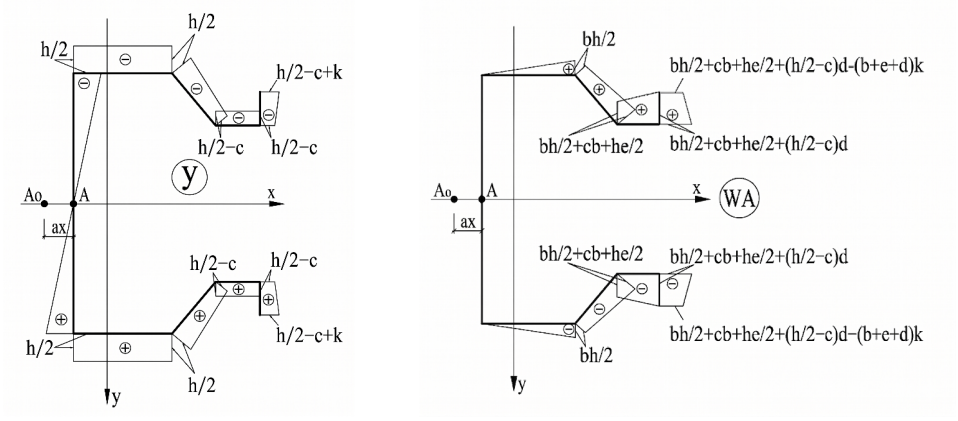

(a) Các điểm tọa độ quạt trên tiết diện (b) Biểu đồ quạt tiết diện Omega

Hình 4. Biểu đồ tọa độ quạt trên tiết diện Omega

Khác với các tiết diện chữ C thông thường, sự hiện diện của góc dập nghiêng $\alpha$ và các mép gấp ngược $k$ trên tiết diện Omega làm cho khoảng cách vuông góc hạ từ cực $A$ xuống tiếp tuyến của từng đoạn thẳng thay đổi liên tục và không còn tính trực giao. Dựa trên vi phân diện tích quét, hàm tọa độ quạt $\omega$ tại 10 điểm nút chuyển tiếp hình học được thiết lập thành hệ phương trình như sau:

$$
\begin{aligned}
\omega_A &= 0 \\
\omega_1 &= -2 \times S_{\Delta A_0 A1} = -\frac{a_x h}{2} \\
\omega_2 &= \omega_1 + 2 \times S_{\Delta A_0 12} = -\frac{a_x h}{2} + \frac{bh}{2} = -\frac{h}{2}(a_x - b) \\
\omega_3 &= \omega_2 + 2 \times S_{\Delta A_0 23} = -\frac{h}{2}(a_x - b) + c(a_x + b + e) + e\left(\frac{h}{2} - c\right) \\
\omega_4 &= \omega_3 + 2 \times S_{\Delta A_0 34} = -\frac{h}{2}(a_x - b) + c(a_x + b + e) + (e + d)\left(\frac{h}{2} - c\right) \\
\omega_5 &= \omega_4 - 2 \times S_{\Delta A_0 45} = -\frac{h}{2}(a_x - b) + c(a_x + b + e) + (e + d)\left(\frac{h}{2} - c\right) - (a_x + b + e + d)k \\
\omega_6 &= 2 \times S_{\Delta A_0 A6} = \frac{a_x h}{2} \\
\omega_7 &= \omega_6 - 2 \times S_{\Delta A_0 67} = \frac{a_x h}{2} - \frac{bh}{2} = \frac{h}{2}(a_x - b) \\
\omega_8 &= \omega_7 - 2 \times S_{\Delta A_0 78} = \frac{h}{2}(a_x - b) - c(a_x + b + e) - e\left(\frac{h}{2} - c\right) \\
\omega_9 &= \omega_8 - 2 \times S_{\Delta A_0 89} = \frac{h}{2}(a_x - b) - c(a_x + b + e) - (e + d)\left(\frac{h}{2} - c\right) \\
\omega_{10} &= \omega_9 + 2 \times S_{\Delta A_0 910} = \frac{h}{2}(a_x - b) - c(a_x + b + e) - (e + d)\left(\frac{h}{2} - c\right) + (a_x + b + e + d)k
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Biểu đồ phân bố tọa độ quạt $\omega$ và biểu đồ tung độ hình học $y$ dọc theo 9 nhánh của mặt cắt được thể hiện chi tiết tại Hình 4(b) và Hình 5.




(a) Biểu đồ tung độ $y$ (b) Biểu đồ tọa độ quạt $\omega_A$

Hình 5. Biểu đồ tung độ $y$ và tọa độ $\omega_A$ quạt tiết diện Omega

*3.3. Các công thức giải tích cho tâm cắt ($a_x$) và mô men quán tính quạt ($I_\omega$)*

Việc xác định tâm cắt $a_x$ và mô men quán tính quạt $I_\omega$ đòi hỏi phải thực hiện tính toán mô men tĩnh quạt đường ($I_{\omega x}$) và tích phân bình phương hàm tọa độ quạt ($\int \omega^2 dA$). Nghiên cứu áp dụng

phương pháp nhân biểu đồ Vereshchagin để nhân chéo biểu đồ tọa độ quạt $\omega_A$ với biểu đồ tung độ $y$ (Hình 5).

Việc thực hiện phép nhân biểu đồ cho một hệ gồm 9 đoạn thẳng sinh ra một chuỗi đa thức đại số bậc cao phức tạp. Bằng cách tích phân toàn miền và nhóm các biến số đại số, mô men tĩnh quạt đường được rút gọn thành công thức:

Công thức giải tích của mô men tĩnh quạt đường:

$$\begin{aligned} I_{\omega_A x} = & -tbh\left(\frac{bh}{4}+\frac{c}{\sin\alpha}\frac{h-c}{2}\right)-\frac{tc}{\sin\alpha}\left(cb+\frac{he}{2}\right)\left(\frac{h}{2}-\frac{2c}{3}\right) \\ & -td\left(bh+2cb+he+\frac{hd}{2}-cd\right)\left(\frac{h}{2}-c\right) \\ & -tk\left[(bh+2cb+he+hd-2cd-2kb-2kd-2ke)\left(\frac{h}{2}-c+\frac{k}{2}\right)+(b+e+d)k\left(\frac{h}{2}-c+\frac{k}{3}\right)\right] \end{aligned} \tag{11}$$

Do tiết diện Omega có trục $x$ là trục đối xứng, tâm cắt $A_o$ sẽ nằm hoàn toàn trên trục $x$ (thành phần $a_y = 0$). Bằng cách thay thế trực tiếp mô men quán tính $I_x$ ở (9) và mô men tĩnh quạt đường $I_{\omega_A x}$ từ (11) vào hệ thức chuyển trục, vị trí dời trục tâm cắt $a_x$ được xác định hoàn toàn theo kích thước hình học của tiết diện với tỉ số:

$$a_x = \frac{I_{\omega_A x}}{I_x} \tag{12}$$

Cuối cùng, mô men quán tính quạt $I_\omega$, đại lượng đặc trưng cho độ cứng chống vênh của toàn bộ tiết diện, được xác định bằng cách tự nhân biểu đồ tọa độ quạt với chính nó. Rút gọn chuỗi tích phân đại số, thu được công thức xác định mô men quán tính quạt cho tiết diện Omega như sau:

$$\begin{aligned} I_\omega = & 2t\left[\frac{a_x^2h^3}{24}+\frac{a_x^3h^2}{12}+\frac{(b-a_x)^3h^2}{12}\right] \\ & +2tf\left[\frac{1}{4}\left(bh-ha_x+ca_x+bc+\frac{eh}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\left(ca_x+bc+\frac{eh}{2}\right)^2\right] \\ & +2td\left[\left(ca_x+bc+\frac{eh}{2}+\frac{bh}{2}-\frac{ha_x}{2}+\frac{dh}{4}-\frac{dc}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{dh}{2}-dc\right)^2\right] \\ & +2tk\left[\frac{1}{4}(bh-ha_x+2ca_x+2cb+eh+dh-2cd-a_xk-bk-ek-dk)^2+\frac{1}{12}(a_xk+bk+ek+dk)^2\right] \end{aligned} \tag{13}$$

Như vậy, các công thức giải tích (12) và (13) đã cung cấp một giải pháp tường minh để xác định các đặc trưng quạt phức tạp của tiết diện Omega chỉ từ 7 biến số hình học cơ bản ($\mathbf{h}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{t}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\alpha}$). Việc thiết lập các công thức giải tích này không chỉ giải quyết trọn vẹn "nút thắt" trong quy trình ở Hình 2, mà còn tạo điều kiện thuận lợi để kỹ sư dễ dàng lập trình tự động hóa các bảng tính thiết kế. Để đánh giá mức độ chính xác cũng như độ tin cậy của các công thức đề xuất, một chương trình kiểm chứng số sẽ được trình bày chi tiết tại Mục 4.

## 4. Kiểm chứng độ tin cậy và ứng dụng tính toán

Mục này trình bày hai nội dung trọng tâm: (1) Kiểm chứng độ chính xác của các công thức giải tích đề xuất thông qua một cơ sở dữ liệu tham số quy mô lớn; (2) Minh họa quy trình áp dụng trực tiếp các đặc trưng hình học vừa tìm được vào bài toán phân tích lực tới hạn xoắn uốn ($N_{cr,FT}$) cho một cấu kiện cột thực tế, có đối chiếu với các phương pháp số.

### *4.1. Kiểm chứng công thức giải tích*

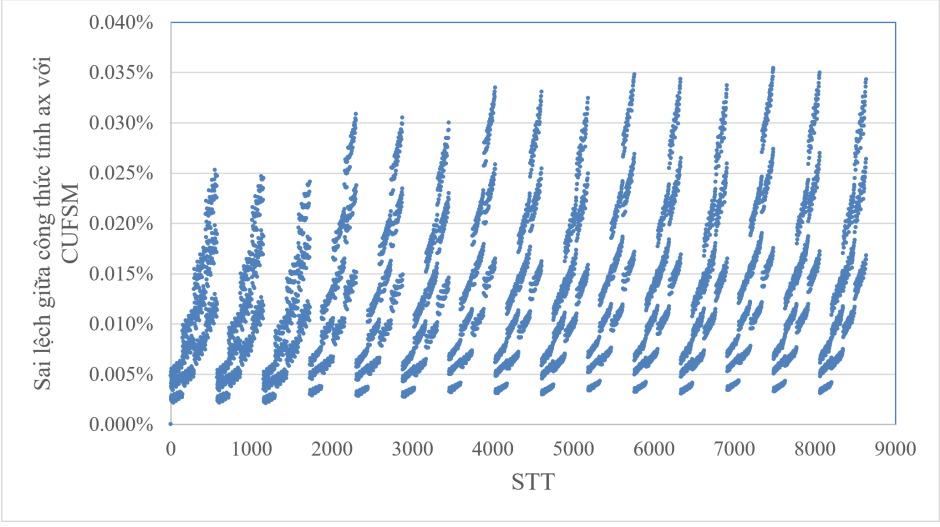
Để đánh giá độ tin cậy của các công thức (12) và (13), một quá trình khảo sát tham số đã được thiết lập với 8640 trường hợp kích thước tiết diện Omega khác nhau. Dải thông số khảo sát được lựa chọn bám sát thực tiễn sản xuất cấu kiện thép tạo hình nguội hiện nay, chi tiết được thể hiện tại Bảng 1.

Bảng 1. Kích thước hình học tiết diện Omega

| Thông số hình học tiết diện | Dải giá trị khảo sát |
|---|---|
| $h$ (mm) | [90; 100; 120] |
| $b$ (mm) | [40; 50; 60] |
| $c$ (mm) | [15; 20; 25; 30] |
| $d$ (mm) | [15; 20; 25; 30] |
| $t$ (mm) | [1,5; 2,0; 2,5; 3,0] |
| $k$ (mm) | [5; 10; 15] |
| $\alpha$ (°) | [15; 30; 45; 60; 75] |

Tất cả 8640 trường hợp này đều được mô hình hóa song song trên phần mềm dải hữu hạn chuyên dụng CUFSM [13] để trích xuất tọa độ tâm cắt $a_x$ và mô men quán tính quạt $I_\omega$, làm cơ sở dữ liệu chuẩn để đối chiếu với kết quả tính từ công thức giải tích.

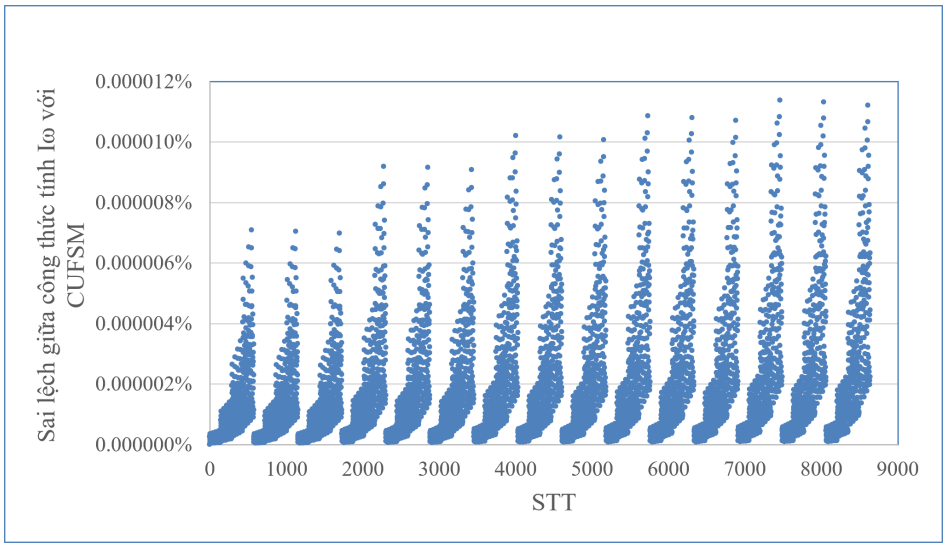
Kết quả đối chiếu hàng loạt (được biểu diễn dạng phân tán tại Hình 6 và Hình 7) cho thấy sự trùng khớp gần như tuyệt đối. Mức độ sai lệch lớn nhất trên toàn bộ 8640 trường hợp chỉ dừng lại ở mức 0,035% đối với vị trí tâm cắt $a_x$ và 0,0000114% đối với mô men quán tính quạt $I_\omega$.




Hình 6. Sai lệch kết quả giữa công thức giải tích tính $a_x$ (vị trí tâm cắt) đề xuất với phần mềm CUFSM

Để trực quan hóa, xét một mặt cắt lấy từ danh mục sản phẩm kệ chứa hàng của Global Storage Solutions [18] (tương đương tiết diện P100) có kích thước: $100 \times 50 \times 25 \times 25 \times 2 \times 15 \times 60°$. Kết quả so sánh đơn lẻ được thể hiện tại Bảng 2.

Các mức sai số tiệm cận 0% này khẳng định rằng: Các công thức giải tích được thiết lập tại Mục 3 là hoàn toàn chính xác về mặt toán học và đủ độ tin cậy để thay thế các phần mềm mô phỏng số trong việc trích xuất đặc trưng hình học.




Hình 7. Sai lệch kết quả giữa công thức giải tích tính $I_\omega$ (Mô men quán tính quạt) đề xuất với phần mềm CUFSM

Bảng 2. So sánh đặc trưng quạt của mặt cắt P100

| Đặc trưng hình học | Công thức giải tích | CUFSM | Sai lệch (%) |
|---|---|---|---|
| Tâm cắt $a_x$ (mm) | 49,4826 | 49,4878 | 0,0104% |
| Mô men quán tính quạt $I_\omega$ (mm$^6$) | 2 977 469 020 | 2 977 468 995 | 0,0000009% |

### *4.2. Ứng dụng tính toán lực tới hạn xoắn uốn*

Để minh họa toàn bộ quy trình tại Hình 2, bài báo tiến hành tính toán lực tới hạn $N_{cr,FT}$ cho cấu kiện cột tiết diện P100 nêu trên. Giả thiết cột chịu nén đúng tâm, chiều dài hình học $L = 2000$ mm, điều kiện biên ở hai đầu là liên kết khớp và tự do vênh. Khi đó, các chiều dài tính toán $L_{ex} = L_{eT} = 2000$ mm. Các thông số vật liệu: $E = 205000$ MPa, $G = 78846$ MPa, $f_y = 235$ MPa.

Từ kích thước tiết diện 100 × 50 × 25 × 25 × 2 × 15 × 60 (đơn vị kích thước là mm, góc nghiêng tính bằng độ), các đặc trưng hình học cơ bản và đặc trưng quạt (tính theo công thức giải tích) được xác định như sau: $A = 675{,}5$ mm$^2$, $x_C = 36{,}52$ mm, $I_x = 962160$ mm$^4$, $I_y = 721037$ mm$^4$, $I_t = 900{,}6$ mm$^4$, $a_x = 49{,}48$ mm, $I_\omega = 2977469020$ mm$^6$, $i_x = 37{,}74$ mm, $i_y = 32{,}67$ mm.

Từ đó, xác định các thông số dẫn xuất:

$$x_0 = a_x + x_C = 49{,}48 + 36{,}52 = 86{,}0\,\text{mm}$$

$$i_0^2 = i_x^2 + i_y^2 + x_0^2 = 37{,}74^2 + 32{,}67^2 + 86^2 = 9887{,}8\,\text{mm}^2 \implies i_0 = 99{,}43\,\text{mm}$$

$$\beta = 1 - \left(\frac{x_0}{i_0}\right)^2 = 1 - \left(\frac{86}{99{,}43}\right)^2 = 0{,}252$$

Tiến hành tính toán các lực tới hạn thành phần và lực tới hạn tương tác:

Lực tới hạn uốn ($N_{cr,x}$):

$$N_{cr,x} = \frac{\pi^2 E I_x}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 \times 205000 \times 962160}{2000^2} = 486677{,}4\,\text{N} = 486{,}7\,\text{kN}$$

Lực tới hạn xoắn ($N_{cr,T}$):

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_0^2}\left(GI_t + \frac{\pi^2 EI_w}{L_{eT}^2}\right) = \frac{1}{9887,8}\left(78846 \times 900,6 + \frac{\pi^2 \times 205000 \times 2977469020}{2000^2}\right) = 159495,2\,\text{N} = 159,5\,\text{kN}$$

Lực tới hạn xoắn uốn đàn hồi ($N_{cr,FT}$):

$$\begin{aligned} N_{cr,FT} &= \frac{N_{cr,x}}{2\beta}\left[1 + \frac{N_{cr,T}}{N_{cr,x}} - \sqrt{\left(1 - \frac{N_{cr,T}}{N_{cr,x}}\right)^2 + 4\left(\frac{x_0}{i_0}\right)^2 \frac{N_{cr,T}}{N_{cr,x}}}\right] \\ &= \frac{486677,4}{2 \times 0,252}\left[1 + \frac{159495,2}{486677,4} - \sqrt{\left(1 - \frac{159495,2}{486677,4}\right)^2 + 4\left(\frac{86}{99,43}\right)^2 \frac{159495,2}{486677,4}}\right] \\ &= 126353\,\text{N} = 126,3\,\text{kN} \end{aligned}$$

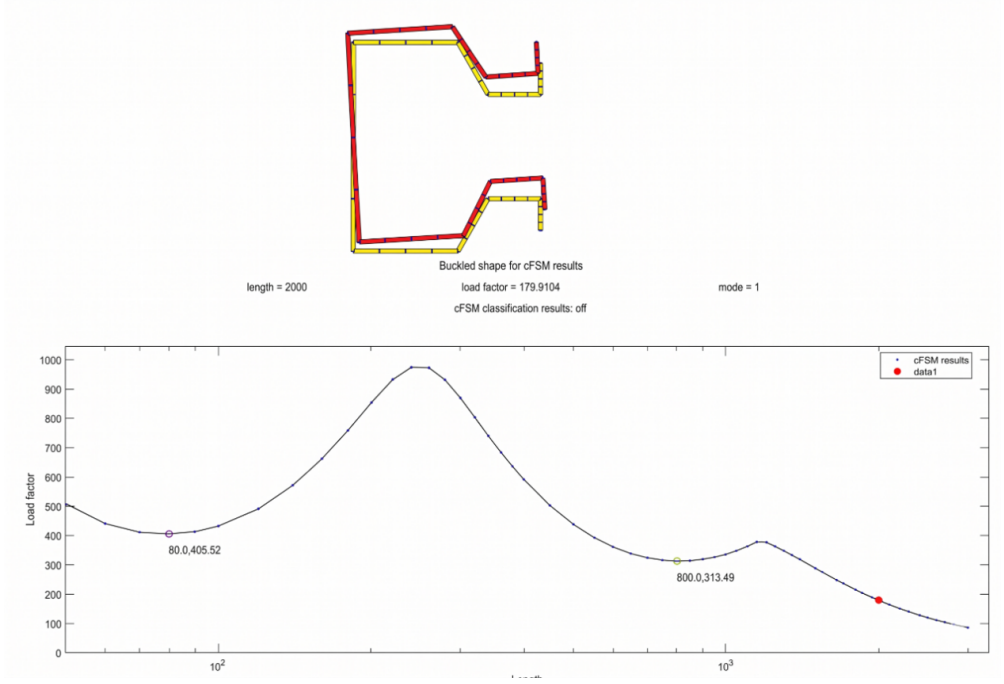
Đối chiếu với phương pháp phần tử hữu hạn:

Để so sánh, cột Omega trên được phân tích bằng hai phương pháp số phổ biến:

Phương pháp dải hữu hạn (CUFSM): Kết quả phân tích (Hình 8) cho thấy dạng mất ổn định xoắn uốn xảy ra tại nửa bước sóng $L = 2000$ mm với ứng suất tới hạn $\sigma_{cr} = 179,91\ \text{N/mm}^2$.

Lực tới hạn tương ứng: $N_{cr} = A.\sigma_{cr} = 675,5 \times 179,91 = 121529\,\text{N} = 121,5\,\text{kN}$.

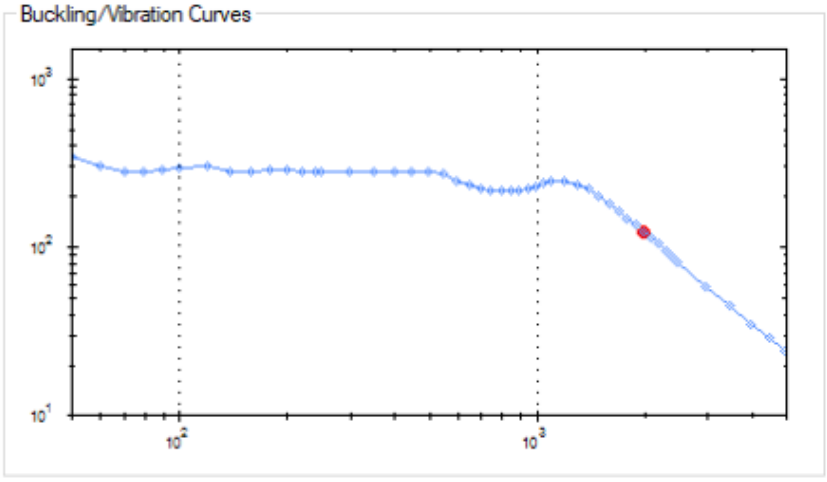
Phương pháp GBT (GBTUL): Kết quả phân tích thành phần mode (Hình 9) nhận được lực tới hạn mất ổn định tổng thể $N_{cr(GBTUL)} = 122,1$ kN.




Hình 8. Kết quả phân tích mất ổn định xoắn uốn của tiết diện Omega bằng phần mềm CUFSM

Lực tới hạn tính theo công thức giải tích Vlasov (126,3 kN) cao hơn kết quả của phần mềm CUFSM khoảng 3,8% và cao hơn GBTUL khoảng 3,3%. Sự chênh lệch này là hoàn toàn logic và phù hợp với bản chất cơ học. Nền tảng của công thức giải tích Vlasov dựa trên giả thiết "chu vi mặt cắt tuyệt đối cứng" (không biến dạng hình dáng khi chịu tải). Trong khi đó, các phương pháp số (CUFSM,

GBTUL) xét đến sự tương tác giữa mất ổn định tổng thể và các vi biến dạng cục bộ/méo tiết diện, làm giảm nhẹ độ cứng tổng thể của cấu kiện, dẫn đến kết quả lực tới hạn thu được nhỏ hơn. Do mức sai số này nằm an toàn dưới ngưỡng 5% cho phép trong kỹ thuật kết cấu, có thể khẳng định quy trình tính toán và bộ công thức đề xuất hoàn toàn đáp ứng độ tin cậy để đưa vào thực hành thiết kế, phục vụ việc kiểm tra khả năng chịu lực ($N_{b,Rd}$) theo các tiêu chuẩn EN 15512 hoặc EN 1993-1-3.




Results of the buckling analysis of the member with L=2000 (Mode 1)

Buckling Load: Pb = 122.10735

Modal participations (%) of the most important GBT modes:

P4=75.12 P2=21.32 P6=3.52 Other=0.05

Hình 9. Kết quả phân tích mất ổn định xoắn uốn của tiết diện Omega bằng phần mềm GBTUL

## 5. Kết luận

Nghiên cứu này đã giải quyết trọn vẹn "nút thắt" toán học trong quy trình phân tích ổn định xoắn uốn đối với cột thép thành mỏng tạo hình nguội tiết diện Omega. Từ các kết quả đạt được, bài báo rút ra những kết luận chính sau:

Đã thiết lập được các công thức giải tích cho tọa độ tâm cắt ($a_x$) và mô men quán tính quạt ($I_\omega$) áp dụng riêng cho cấu hình tiết diện Omega 9 đoạn thẳng có sườn dập nghiêng và mép gấp ngược.

Các công thức thể hiện độ chính xác gần như tuyệt đối (sai số lớn nhất dưới 0,035%) khi được kiểm chứng bằng phương pháp phần tử hữu hạn (CUFSM) trên một cơ sở dữ liệu tham số khổng lồ gồm 8640 trường hợp kích thước khác nhau.

Qua ví dụ tính toán thực tiễn, việc ứng dụng các công thức giải tích để dự báo lực tới hạn xoắn uốn ($N_{cr,FT}$) cho mức độ sai lệch nhỏ (dưới 4%) so với các phần mềm GBTUL và CUFSM. Nguyên nhân sai số được biện luận rõ ràng do sự khác biệt về giả thiết mặt cắt không bị biến dạng của lý thuyết Vlasov so với biến dạng méo cục bộ trong mô hình số.

Đóng góp thiết thực của bài báo là cung cấp một công cụ tính toán, cho phép các kỹ sư dễ dàng lập trình tự động hóa các bảng tính kiểm tra khả năng chịu lực ($N_{b,Rd}$) của cột thép thành mỏng tạo hình nguội theo tiêu chuẩn Eurocode mà không cần tốn thời gian dựng mô hình hay phụ thuộc vào các phần mềm mô phỏng chuyên dụng.

## Tuyên bố về việc sử dụng trí tuệ nhân tạo tạo sinh và các công nghệ hỗ trợ bởi AI

Trong quá trình chuẩn bị bản thảo, các tác giả đã sử dụng Gemini để soát lỗi chính tả. Các tác giả đã kiểm tra và chỉnh sửa nội dung và chịu hoàn toàn trách nhiệm về tính chính xác, tính nguyên bản và tính toàn vẹn của bài báo.

## Tài liệu tham khảo


[1] Cuong, B. H. (2021). Local buckling of thin-walled circular hollow section under uniform bending. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - HUCE*, 15(4):88–98.

[2] Vy, S. T. (2025). Numerical investigation on local buckling capacity of cold-formed steel compression members made of advanced high strength steels at elevated temperatures. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (JSTCE) - HUCE*, 19(3):28–37.

[3] Nguyen, T. T., Nguyen, Q. H., Le, T. D., Le, H. D. (2021). General non-uniform quadrilateral cross-sections for thin-walled FG sandwich beams. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - NUCE*, 15(2):90–100.

[4] BSI (2021). *BS EN 15512:2020: Steel static storage systems – Adjustable pallet racking systems – Principles for structural design*. British Standards Institution, London, UK.

[5] CEN (2006). *EN 1993-1-3: Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-3: General rules – Supplementary rules for cold-formed members and sheeting*. European Committee for Standardization, Brussels, Belgium.

[6] Quyền, V. L. (2023). Phân tích xoắn cản của thanh thành mỏng tiết diện hở. *Tạp chí Xây dựng*, (7):42–45.

[7] Tuyền, N. M., Cường, B. H. (2015). Tính toán các đặc trưng hình học của tiết diện thành mỏng kín chịu xoắn. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD) - ĐHXDHN*, 9(3):43–51.

[8] Tùng, V. S., Cường, B. H. (2017). Ảnh hưởng của dầm tiết diện chữ I tổ hợp hàn có cánh dạng hộp. *Tạp chí Khoa học Kiến trúc & Xây dựng*, 27:54–56.

[9] Tùng, V. S., Cường, B. H. (2018). Ổn định tổng thể của dầm thép với dạng tiết diện chữ I hai bụng tổ hợp hàn có hai trục đối xứng. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD) - ĐHXDHN*, 12(4):51–57.

[10] Vlasov, V. Z. (1961). *Thin-Walled Elastic Beams*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Israel.

[11] Cuong, B. H., Hoa, N. D., Khai, N. Q., Thuat, D. V., Gilbert, B. P. (2026). Calculation of geometric properties for storage rack column sections. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (JSTCE) - HUCE*, 20(4):35–50.

[12] Khải, N. Q., Hòa, N. Đ., Cường, B. H. (2026). Công thức đặc trưng quạt và ứng dụng trong phân tích ổn định cột thép thành mỏng sườn nghiêng góc bất kỳ. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (IBST)*, 2026 (2):14–24.

[13] Schafer, B. W., Ádány, S. (2006). Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: Conventional and constrained finite strip methods. *Proceedings of the 18th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, Orlando, Florida, USA, 39–54.

[14] Nguyen, V. V., Hancock, G. J., Pham, C. H. (2015). Development of the Thin-Wall-2 program for buckling analysis of thin-walled sections under generalised loading. *Proceedings of the 8th International Conference on Advances in Steel Structures (ICASS 2015)*, Lisbon, Portugal.

[15] Bebiano, R., Camotim, D., Gonçalves, R. (2018). GBTUL 2.0 – A second-generation code for the GBT-based buckling and vibration of thin-walled members. *Thin-Walled Structures*, 124:235–257.

[16] Xiang, C., Seaburg, P. A., Crain, R., Lou, A. C. J. (2002). On the computation of the cross-section properties of arbitrary thin-walled structures. *Proceedings of the 16th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, Orlando, Florida, USA.

[17] Cường, B. H. (2010). Tính toán các đặc trưng hình học của tiết diện thanh thành mỏng hở. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCNXD) - ĐHXDHN*, 4(2):16–28.

[18] Global Storage Solutions (2026). *Pallet Racking – P90 Standard Details*. Truy cập ngày 06/07/2026.