Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, ĐHXDHN, 2026, 20 (4V): 166–179

DAO ĐỘNG TỰ DO VÀ ỔN ĐỊNH CỦA TẤM 2D-FGM CÓ LỖ RỖNG TRÊN NỀN ĐÀN HỒI PASTERNAK

Trần Hữu Quốc[a], Vũ Văn Thẩm[a,*], Hoàng Thu Phương[a]

[a]*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 31/7/2026, Sửa xong 26/8/2026, Chấp nhận đăng 28/8/2026

Tóm tắt

Bài báo trình bày mô hình bán giải tích phân tích dao động tự do và ổn định của tấm vật liệu có cơ tính biến thiên hai chiều (2D-FGM) có lỗ rỗng trên nền đàn hồi Pasternak. Mô hình kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn ẩn (HSDT-4) với phương pháp pb2-Ritz. Cơ tính vật liệu biến thiên theo quy luật hàm lũy thừa theo hai phương trong mặt phẳng, trong khi ảnh hưởng của lỗ rỗng được xét thông qua hai quy luật phân bố theo chiều dày. Độ chính xác của mô hình được kiểm chứng thông qua so sánh với các kết quả đã công bố cho cả bài toán dao động và ổn định. Các khảo sát làm rõ ảnh hưởng của hai chỉ số tỷ lệ thể tích theo hai phương trong mặt phẳng của vật liệu 2D-FGM, hệ số và quy luật phân bố lỗ rỗng, các tham số nền Pasternak, tỷ số hình học và điều kiện biên đến tần số dao động riêng và tải trọng tới hạn của tấm.

Từ khoá: tấm 2D-FGM; vật liệu có lỗ rỗng; nền đàn hồi Pasternak; dao động tự do; ổn định; HSDT-4; phương pháp pb2-Ritz.

FREE VIBRATION AND BUCKLING OF POROUS 2D-FGM PLATES RESTING ON PASTERNAK FOUNDATIONS

Abstract

This paper presents a semi-analytical model for the free vibration and buckling analysis of porous two-dimensional functionally graded material (2D-FGM) plates resting on Pasternak elastic foundations. The model combines a four-variable higher-order shear deformation theory (HSDT-4) with the pb2-Ritz method. The material properties vary according to power-law distributions along two in-plane directions, while the porosity effect is described by two thickness-wise distribution patterns. The accuracy of the model is verified by comparison with published results for both vibration and buckling problems. The parametric studies clarify the effects of the two in-plane volume-fraction indices characterizing the two-dimensional material gradation, the porosity coefficient and distribution pattern, Pasternak foundation parameters, geometric ratios, and boundary conditions on the natural frequency and critical buckling load of the plate.

Keywords: 2D-FGM plate; porous material; Pasternak foundation; free vibration; buckling; HSDT-4; pb2-Ritz method.

https://doi.org/10.31814/stce.huce2026-20(4V)-13 © 2026 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Materials – FGM) được phát triển nhằm tạo ra sự chuyển tiếp liên tục về thành phần và cơ tính vật liệu, qua đó hạn chế hiện tượng tập trung ứng suất thường xuất hiện tại bề mặt phân cách của composite lớp và nâng cao hiệu quả làm việc của kết cấu [1–3]. Nhờ những ưu điểm này, FGM ngày càng được ứng dụng rộng rãi trong nhiều dạng kết cấu, đặc biệt là kết cấu tấm.

Các nghiên cứu ban đầu chủ yếu xét tấm 1D-FGM. Javaheri và Eslami [1] nghiên cứu ổn định của tấm chịu nén bằng CLPT, Lanhe [2] phân tích ổn định nhiệt bằng FSDT. Zenkour [3] khảo sát dao động và ổn định của tấm sandwich FGM, trong khi Shariat và Eslami [4] xác định tải trọng tới hạn dưới tải cơ và nhiệt. Từ 1D-FGM, các nghiên cứu mở rộng sang vật liệu biến thiên theo hai phương (2D-FGM). Vinh và cs. [5] nghiên cứu uốn và ổn định của tấm có lỗ rỗng; Van Do và cs. [6] kết hợp TSDT với phần tử hữu hạn; Lieu và cs. [7] dùng phân tích đẳng hình học. Chen và cs. [8] khảo sát

*Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* thamvv@huce.edu.vn (Thẩm, V. V.)

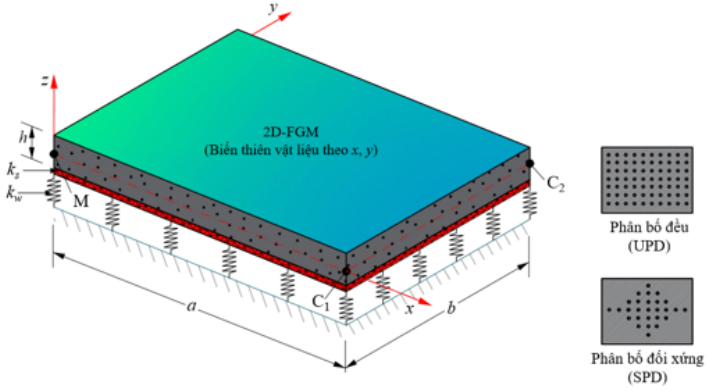
dao động cưỡng bức, còn Karami và cs. [9] phân tích dao động tự do bằng lý thuyết quasi-3D. Các kết quả cho thấy phân bố vật liệu và lỗ rỗng ảnh hưởng rõ đến ứng xử của tấm.

Trong thực tế, tấm FGM thường tương tác với môi trường đàn hồi; Winkler và Pasternak là hai mô hình nền phổ biến [10–12]. Nền Pasternak bổ sung tương tác cắt giữa các phần tử nền, và các tham số nền có thể làm thay đổi đáng kể độ võng, tần số dao động riêng và tải trọng tới hạn của tấm FGM [10–12]. Nhiều phương pháp đã được sử dụng cho các kết cấu FGM, gồm phương pháp phần tử hữu hạn, phân tích đẳng hình học, các lời giải giải tích và phương pháp Ritz [6, 7, 13–19]. Phương pháp pb2-Ritz kết hợp đa thức hai chiều với hàm biên nên xử lý linh hoạt nhiều điều kiện liên kết và đạt độ hội tụ tốt [15–17]. Kết hợp với HSDT-4, mô hình mô tả biến dạng cắt ngang không cần hệ số hiệu chỉnh và giảm số ẩn [15–17].

Các công bố gần đây đã xét tấm 2D-FGM có lỗ rỗng [5], tấm 2D-FGM không rỗng [7], tấm sandwich 2D-FGM ba pha có lỗ rỗng [13] và dầm sandwich FGM có lõi rỗng trên nền hai tham số [19]. Tuy nhiên, phân tích đồng thời dao động tự do và ổn định của tấm 2D-FGM ba pha có lỗ rỗng trên nền Pasternak bằng HSDT-4 kết hợp pb2-Ritz vẫn còn hạn chế. Vì vậy, bài báo xây dựng mô hình bán giải tích dựa trên HSDT-4 kết hợp pb2-Ritz để kiểm chứng và phân tích dao động tự do và ổn định của tấm 2D-FGM có lỗ rỗng trên nền Pasternak, qua đó khảo sát có hệ thống ảnh hưởng của hai chỉ số tỷ lệ thể tích theo hai phương trong mặt phẳng, hệ số và quy luật phân bố lỗ rỗng, các tham số nền, tỷ số hình học và điều kiện biên đến tần số dao động riêng và tải trọng tới hạn.

2. Mô hình và phương pháp phân tích

Xét tấm 2D-FGM kích thước $a \times b \times h$ đặt trên nền đàn hồi Pasternak như minh họa trên Hình 1. Hệ tọa độ Descartes (x, y, z) được thiết lập với mặt trung bình của tấm tại $z = 0$, hai mặt ngoài tương ứng với $z = h/2$ và $z = -h/2$. Nền Pasternak được đặc trưng bởi hệ số nền Winkler k_w và hệ số lớp cắt Pasternak k_s.



Hình 1. Mô hình tấm 2D-FGM có lỗ rỗng trên nền đàn hồi Pasternak và các quy luật phân bố lỗ rỗng

Tấm được cấu tạo từ ba pha vật liệu gồm kim loại M và hai loại gốm C_1, C_2, với tỷ phần thể tích biến thiên liên tục theo hai phương x và y. Ảnh hưởng của lỗ rỗng được xét theo chiều dày thông qua hai dạng phân bố: phân bố đều (UPD) và phân bố đối xứng (SPD), như thể hiện trên Hình 1.

Các tính chất cơ học của vật liệu nền chưa xét đến lỗ rỗng được xác định theo quy tắc hỗn hợp Voigt [20, 21]:

$$P_0(x, y) = P_{C_1} V_{C_1}(x, y) + P_{C_2} V_{C_2}(x, y) + P_M V_M(x, y) \tag{1}$$

trong đó P_0 biểu diễn tính chất vật liệu chưa xét đến ảnh hưởng của lỗ rỗng; trong nghiên cứu này, quy tắc hỗn hợp Voigt được sử dụng để xác định mô đun đàn hồi E_0, khối lượng riêng ρ_0 và hệ số Poisson ν_0 từ tỷ phần thể tích của các pha vật liệu; P_{C_1}, P_{C_2} và P_M lần lượt là các tính chất cơ học của

hai pha gồm C_1, C_2 và pha kim loại M. Tỷ phần thể tích của các pha vật liệu được giả thiết biến thiên theo quy luật hàm lũy thừa như sau [20, 21]:

$$V_{C_1}(x,y) = \left(\frac{x}{a}\right)^{p_x}\left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^{p_y}\right] \tag{2}$$

$$V_{C_2}(x,y) = \left(\frac{x}{a}\right)^{p_x}\left(\frac{y}{b}\right)^{p_y} \tag{3}$$

$$V_M(x,y) = 1-\left(\frac{x}{a}\right)^{p_x} \tag{4}$$

$$V_{C_1}(x,y) + V_{C_2}(x,y) + V_M(x,y) = 1 \tag{5}$$

trong đó p_x và p_y là các chỉ số tỷ lệ thể tích theo hai phương x và y. Với $p_x > 0$, tại cạnh $x = 0$ vật liệu hoàn toàn là kim loại M; tại góc $(x = a, y = 0)$ vật liệu hoàn toàn là gốm C_1 và tại góc $(x = a, y = b)$ vật liệu hoàn toàn là gốm C_2. Khi $p_x = 0$ hoặc $p_y = 0$ trong tính toán quy ước tương ứng $(x/a)^{p_x} = 1$ hoặc $(y/b)^{p_y} = 1$ trên toàn miền. Theo đó, $p_x = 0$ cho $V_M = 0$, còn $p_y = 0$ cho $V_{C1} = 0$.

Để xét ảnh hưởng của lỗ rỗng trong vật liệu, các tính chất cơ học hiệu dụng của tấm được hiệu chỉnh thông qua hệ số lỗ rỗng e_0.

Với phân bố đều (UPD), các tính chất cơ học hiệu dụng được xác định như sau:

$$P(x,y,z) = (1-e_0)P_0(x,y) \tag{6}$$

Với phân bố đối xứng (SPD), các tính chất cơ học hiệu dụng được xác định theo biểu thức:

$$P(x,y,z) = \left[1-e_0\left(1-\frac{2|z|}{h}\right)\right]P_0(x,y) \tag{7}$$

trong đó e_0 là hệ số lỗ rỗng; P và P_0 lần lượt là tính chất cơ học của vật liệu có và không xét đến ảnh hưởng của lỗ rỗng. Trong nghiên cứu này, các biểu thức (6) và (7) được áp dụng trực tiếp cho mô đun đàn hồi E và khối lượng riêng ρ. Hệ số Poisson không bị hiệu chỉnh bởi hệ số lỗ rỗng, $\nu = \nu_0$, còn mô đun trượt được xác định theo $G = E/[2(1+\nu)]$.

3. Quan hệ vật liệu và phương trình chủ đạo

3.1. Trường chuyển vị

Để xét đến ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang mà không cần sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt, nghiên cứu này áp dụng lý thuyết HSDT-4. Theo lý thuyết này, trường chuyển vị tại một điểm bất kỳ của tấm được biểu diễn thông qua các chuyển vị trên mặt trung bình và hai thành phần chuyển vị ngang do uốn và biến dạng cắt như sau [15–17]:

$$\begin{aligned} &u = u_0 - z\frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x}; \quad v = v_0 - z\frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y} \\ &w = w_b + w_s \end{aligned} \tag{8}$$

trong đó u_0 và v_0 là các thành phần chuyển vị trong mặt phẳng của mặt trung bình; w_b và w_s lần lượt là các thành phần chuyển vị ngang do biến dạng uốn và biến dạng cắt; $f(z)$ là hàm phân bố biến dạng cắt theo chiều dày, được xác định như sau [15–17]:

$$f(z) = z\left[-\frac{1}{8}+\frac{3}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]; \quad g(z) = 1-\frac{df(z)}{dz} \tag{9}$$

3.2. Quan hệ biến dạng – chuyển vị

Từ trường chuyển vị trong công thức (8), các thành phần biến dạng trong mặt phẳng và biến dạng cắt ngang được biểu diễn dưới dạng:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\kappa}_b + f(z)\boldsymbol{\kappa}_s; \quad \boldsymbol{\gamma} = g(z)\boldsymbol{\gamma}_s \tag{10}$$

trong đó:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\right\}^T; \quad \boldsymbol{\gamma} = \left\{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\right\}^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \left\{u_{0,x}, v_{0,y}, u_{0,y} + v_{0,x}\right\}^T; \quad \boldsymbol{\kappa}_b = -\left\{w_{b,xx}, w_{b,yy}, 2w_{b,xy}\right\}^T \\ \boldsymbol{\kappa}_s = -\left\{w_{s,xx}, w_{s,yy}, 2w_{s,xy}\right\}^T; \quad \boldsymbol{\gamma}_s = \left\{w_{s,x}, w_{s,y}\right\}^T\end{gathered} \tag{11}$$

Ở đây, dấu phẩy trong chỉ số dưới biểu thị đạo hàm riêng theo tọa độ tương ứng.

Quan hệ ứng suất – biến dạng của tấm được viết dưới dạng:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}; \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}_s\boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\sigma} = \left\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\right\}^T; \quad \boldsymbol{\tau} = \left\{\tau_{xz}, \tau_{yz}\right\}^T\end{gathered} \tag{12}$$

Các ma trận hệ số đàn hồi được xác định như sau:

$$\begin{gathered}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \\ Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(x,y,z)}{1-\nu^2}; \quad Q_{12} = \frac{\nu E(x,y,z)}{1-\nu^2}; \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(x,y,z)}{2(1+\nu)}\end{gathered} \tag{13}$$

trong đó, $E(x,y,z)$ là mô đun đàn hồi của vật liệu có xét đến ảnh hưởng của lỗ rỗng, được xác định theo các công thức (1), (6) và (7); hệ số Poisson ν được giả thiết không thay đổi khi xét ảnh hưởng của lỗ rỗng.

Các hợp lực ứng suất, mô men uốn, mô men bậc cao và hợp lực cắt ngang được định nghĩa như sau:

$$\begin{gathered}\mathbf{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} dz; \quad \mathbf{M}^b = \int_{-h/2}^{h/2} z\boldsymbol{\sigma} dz \\ \mathbf{M}^s = \int_{-h/2}^{h/2} f(z)\boldsymbol{\sigma} dz; \quad \mathbf{Q}^s = \int_{-h/2}^{h/2} g(z)\boldsymbol{\tau} dz\end{gathered} \tag{14}$$

với:

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}_b + \mathbf{B}^s\boldsymbol{\kappa}_s \\ \mathbf{M}^b &= \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}_b + \mathbf{D}^s\boldsymbol{\kappa}_s \\ \mathbf{M}^s &= \mathbf{B}^s\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{D}^s\boldsymbol{\kappa}_b + \mathbf{H}^s\boldsymbol{\kappa}_s \\ \mathbf{Q}^s &= \mathbf{A}^s\boldsymbol{\gamma}_s\end{aligned} \tag{15}$$

Các hệ số độ cứng trong công thức (15) được xác định bởi:

$$\begin{gathered}\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B^s_{ij}, D^s_{ij}, H^s_{ij}\right) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}\left(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)\right) dz \\ A^s_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} g^2(z) dz\end{gathered} \tag{16}$$

trong đó $i, j = 1, 2, 6$ đối với các ma trận A, B, D, B^s, D^s và H^s; $i, j = 4, 5$ đối với ma trận A^s.

3.3. Phiếm hàm năng lượng

Thế năng biến dạng của tấm được xác định theo biểu thức [22]:

$$U = \frac{1}{2}\int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left(\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\gamma}\right) dz dA \tag{17}$$

Sử dụng các nội lực tổng quát trong công thức (14), biểu thức (17) được viết lại dưới dạng:

$$U = \frac{1}{2}\int_A \left(\boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{N} + \boldsymbol{\kappa}_b^T \mathbf{M}^b + \boldsymbol{\kappa}_s^T \mathbf{M}^s + \boldsymbol{\gamma}_s^T \mathbf{Q}^s\right) dA \tag{18}$$

Thay các quan hệ trong công thức (15) vào công thức (18), thế năng biến dạng của tấm được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2}\int_A \Big[&\boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + 2\boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}_b + 2\boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{B}^s \boldsymbol{\kappa}_s \\ &+ \boldsymbol{\kappa}_b^T \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}_b + 2\boldsymbol{\kappa}_b^T \mathbf{D}^s \boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_s^T \mathbf{H}^s \boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\gamma}_s^T \mathbf{A}^s \boldsymbol{\gamma}_s \Big] dA \end{aligned} \tag{19}$$

Công của tải trọng nén trong mặt phẳng và phản lực của nền đàn hồi Pasternak được xác định theo biểu thức [22]:

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2}\int_A \Bigg[&N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \\ &- k_w w^2 - k_s \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)\Bigg] dA \end{aligned} \tag{20}$$

trong đó $w = w_b + w_s$ là chuyển vị ngang của tấm; N_x^0, N_y^0 và N_{xy}^0 là các tải trọng trong mặt phẳng; k_w và k_s lần lượt là hệ số nền Winkler và hệ số lớp cắt Pasternak của nền Pasternak. Các thành phần tải được biểu diễn dưới dạng $N_x^0 = \lambda\gamma_1 N_0$, $N_y^0 = \lambda\gamma_2 N_0$, $N_{xy}^0 = \lambda\gamma_3 N_0$, trong đó N_0 là tải trọng tham chiếu, γ_1, γ_2 và γ_3 là các hệ số tỷ lệ tải, còn λ là hệ số tải. Trong nghiên cứu này, các thành phần tải trọng không thay đổi độc lập mà được tăng đồng thời theo cùng hệ số tải λ; γ_1, γ_2 và γ_3 quy định tỷ lệ cố định giữa các thành phần tải.

Động năng của tấm được xác định như sau [22]:

$$T = \frac{1}{2}\int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x,y,z)\left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2\right) dz dA \tag{21}$$

Thay trường chuyển vị trong công thức (8) vào công thức (21), động năng được viết dưới dạng:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}\int_A \Big\{&I_0\left(\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_b^2 + 2\dot{w}_b\dot{w}_s + \dot{w}_s^2\right) \\ &-2I_1\left(\dot{u}_0\dot{w}_{b,x} + \dot{v}_0\dot{w}_{b,y}\right) - 2J_1\left(\dot{u}_0\dot{w}_{s,x} + \dot{v}_0\dot{w}_{s,y}\right) \\ &+I_2\left(\dot{w}_{b,x}^2 + \dot{w}_{b,y}^2\right) + 2J_2\left(\dot{w}_{b,x}\dot{w}_{s,x} + \dot{w}_{b,y}\dot{w}_{s,y}\right) + K_2\left(\dot{w}_{s,x}^2 + \dot{w}_{s,y}^2\right)\Big\} dA \end{aligned} \tag{22}$$

Các mô men quán tính khối lượng trong công thức (22) được xác định bởi:

$$\begin{aligned} I_n(x,y) &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x,y,z) z^n dz; \quad n = 0,1,2 \\ J_1(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x,y,z) f(z) dz; \quad &J_2(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x,y,z) z f(z) dz; \\ K_2(x,y) &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x,y,z) f^2(z) dz \end{aligned} \tag{23}$$

Hàm Lagrange của hệ được biểu diễn dưới dạng [22]:

$$\Pi = T - U + W \tag{24}$$

Hàm Lagrange trong công thức (24) được sử dụng để thiết lập hệ phương trình của bài toán bằng phương pháp pb2-Ritz.

3.4. Phương pháp pb2-Ritz

Để thuận tiện cho quá trình tính toán, hệ tọa độ không thứ nguyên (ξ, η) được thiết lập từ hệ tọa độ Descartes (x, y) như sau:

$$\xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{b}; \quad 0 \le \xi, \eta \le 1 \tag{25}$$

Theo phương pháp pb2-Ritz, các thành phần chuyển vị trên mặt trung bình của tấm được xấp xỉ bằng các đa thức hai biến kết hợp với các hàm biên như sau [23]:

$$\begin{aligned}
u_0(\xi,\eta) &= \sum_{p=0}^{M_R}\sum_{s=0}^{p} u_{ps}(\xi,\eta)d^u_{ps} = \sum_{j=1}^{M_R^*} u_j(\xi,\eta)d^u_j = \mathbf{U}^T\mathbf{d}^u \\
v_0(\xi,\eta) &= \sum_{p=0}^{M_R}\sum_{s=0}^{p} v_{ps}(\xi,\eta)d^v_{ps} = \sum_{j=1}^{M_R^*} v_j(\xi,\eta)d^v_j = \mathbf{V}^T\mathbf{d}^v \\
w_b(\xi,\eta) &= \sum_{p=0}^{M_R}\sum_{s=0}^{p} w_{bps}(\xi,\eta)d^b_{ps} = \sum_{j=1}^{M_R^*} w_{bj}(\xi,\eta)d^b_j = \mathbf{W}_b^T\mathbf{d}^b \\
w_s(\xi,\eta) &= \sum_{p=0}^{M_R}\sum_{s=0}^{p} w_{sps}(\xi,\eta)d^s_{ps} = \sum_{j=1}^{M_R^*} w_{sj}(\xi,\eta)d^s_j = \mathbf{W}_s^T\mathbf{d}^s
\end{aligned} \tag{26}$$

M_R là bậc của đa thức Ritz; $p = 0, 1, ..., M_R$ và $s = 0, 1, ..., p$. Chỉ số j và tổng số số hạng trong mỗi khai triển được xác định theo các biểu thức:

$$j = \frac{(p+1)(p+2)}{2} - p + s \tag{27}$$

$$M_R^* = \frac{(M_R+1)(M_R+2)}{2} \tag{28}$$

Các hàm xấp xỉ trong công thức (26) được xây dựng bằng cách kết hợp đa thức hai biến với các hàm biên, có dạng:

$$\begin{aligned}
u_j(\xi,\eta) &= B_u(\xi,\eta)\xi^{p-s}\eta^s; \quad v_j(\xi,\eta) = B_v(\xi,\eta)\xi^{p-s}\eta^s; \\
w_{bj}(\xi,\eta) &= B_w(\xi,\eta)\xi^{p-s}\eta^s; \quad w_{sj}(\xi,\eta) = B_w(\xi,\eta)\xi^{p-s}\eta^s
\end{aligned} \tag{29}$$

trong đó B_u, B_v và B_w là các hàm biên, được xây dựng để các hàm xấp xỉ tự động thỏa mãn các điều kiện biên hình học của tấm. Các hàm này được xác định như sau:

$$\begin{aligned}
B_u(\xi,\eta) = \eta^{\mu_1}(1-\xi)^{\mu_2}(1-\eta)^{\mu_3}\xi^{\mu_4}; \quad B_v(\xi,\eta) = \eta^{\mu_5}(1-\xi)^{\mu_6}(1-\eta)^{\mu_7}\xi^{\mu_8}; \\
B_w(\xi,\eta) = \eta^{\mu_9}(1-\xi)^{\mu_{10}}(1-\eta)^{\mu_{11}}\xi^{\mu_{12}}
\end{aligned} \tag{30}$$

trong đó các số mũ μ_i được lựa chọn theo loại điều kiện biên tại từng cạnh. Chẳng hạn, đối với cạnh $x = 0$, nếu cạnh ngàm (C) thì số mũ của các chuyển vị trong mặt phẳng bằng 1, còn chuyển vị ngang bằng 2; nếu cạnh tựa đơn (S) thì các số mũ tương ứng lần lượt bằng 0 và 1; đối với cạnh tự do (F), tất cả các số mũ đều bằng 0. Các cạnh còn lại được xác định tương tự.

Trong mỗi hàm biên, bốn số mũ được sắp theo thứ tự các cạnh $y = 0$, $x = a$, $y = b$ và $x = 0$; cụ thể, $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ ứng với B_u, $(\mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8)$ ứng với B_v và $(\mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{12})$ ứng với B_w. Trong ví dụ kiểm chứng ở Bảng 3, điều kiện SFSF được quy ước với hai cạnh $x = 0$ và $x = a$ tựa đơn, còn hai cạnh $y = 0$ và $y = b$ tự do.

Thay các biểu thức xấp xỉ trong công thức (26) vào hàm Lagrange (24) và áp dụng phương trình Lagrange đối với véc tơ các hệ số Ritz, ta có:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\mathbf{d}}}\right) - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{0} \tag{31}$$

trong đó $\mathbf{d}$ là véc tơ chứa các hệ số chưa biết của phép xấp xỉ Ritz, được viết dưới dạng:

$$\mathbf{d} = \left\{\mathbf{d}^u, \mathbf{d}^v, \mathbf{d}^b, \mathbf{d}^s\right\}^T \tag{32}$$

Sau khi thay các hàm xấp xỉ Ritz vào các biểu thức năng lượng, công của tải trọng và nền trong công thức (20) được tách dưới dạng $W = \lambda W_g - U_f$, trong đó W_g là công tương ứng với hệ tải trọng tham chiếu và U_f là thế năng biến dạng của nền đàn hồi. Khi đó, các ma trận của hệ được xác định thông qua các dạng toàn phương:

$$U + U_f = \frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{K}\mathbf{d}; \quad T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{d}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{d}}; \quad W_g = \frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{K}_g\mathbf{d} \tag{33}$$

Tương ứng, các phần tử ma trận được xác định bởi:

$$K_{ij} = \frac{\partial^2(U + U_f)}{\partial d_i \partial d_j}; \quad M_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{d}_i \partial \dot{d}_j}; \quad (K_g)_{ij} = \frac{\partial^2 W_g}{\partial d_i \partial d_j} \tag{34}$$

trong đó d_i là phần tử thứ i của véc tơ hệ số Ritz $\mathbf{d}$. Các phần tử của $\mathbf{K}, \mathbf{M}$ và $\mathbf{K}_g$ được xác định từ các tích phân trên miền tấm của các hàm Ritz và các đạo hàm tương ứng thông qua các biểu thức năng lượng nêu trên.

Từ các biểu thức trên, phương trình dao động tự do được thiết lập dưới dạng:

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right)\mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{35}$$

trong đó $\mathbf{K}$ và $\mathbf{M}$ lần lượt là ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của kết cấu.

Điều kiện để hệ phương trình (35) có nghiệm khác không được xác định bởi:

$$\det\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right) = 0 \tag{36}$$

Đối với bài toán ổn định, khi xét tải trọng nén trong mặt phẳng, hệ phương trình cân bằng có dạng:

$$\left(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{K}_g\right)\mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{37}$$

trong đó $\mathbf{K}_g$ là ma trận độ cứng hình học ứng với tải trọng tham chiếu N_0 và các hệ số tỷ lệ tải $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; λ là hệ số tải.

Điều kiện xác định tải trọng tới hạn được viết như sau:

$$\det\left(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{K}_g\right) = 0 \tag{38}$$

Giá trị riêng dương nhỏ nhất λ_{cr} là hệ số tải tới hạn, từ đó tải trọng tới hạn được xác định bởi $N_{cr} = \lambda_{cr} N_0$.

4. Kiểm chứng mô hình và kết quả tính

Chương trình MATLAB được xây dựng từ mô hình trên. Các ví dụ kiểm chứng dùng thông số và cách chuẩn hóa của tài liệu gốc; ở Mục 4.2 chỉ tham số đang xét được thay đổi. Các đại lượng không thứ nguyên được xác định như sau:

$$\overline{\omega} = \omega \frac{a^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_M}{E_M}}; \quad \overline{N}_{cr} = \frac{N_{cr}a^2}{E_M h^3}; \quad \overline{k}_w = \frac{k_w a^4}{E_M h^3}; \quad \overline{k}_s = \frac{k_s a^2}{E_M h^3} \tag{39}$$

4.1. Các ví dụ kiểm chứng

Ở Bảng 1 và Bảng 2, mô hình ba pha được quy về hai pha bằng cách gán C_1 và M cùng tính chất SUS304, còn C_2 là Si_3N_4. Khi đó, $V_{Si_3N_4} = V_{C2} = (\frac{x}{a})^{p_x}(\frac{y}{b})^{p_y}$ và $V_{SUS304} = V_{C_1} + V_M = 1 - V_{Si_3N_4}$. Tính chất vật liệu lấy theo [24]; không xét lỗ rỗng và nền đàn hồi.

a. Khảo sát hội tụ

Khảo sát hội tụ dùng tấm vuông có $b/a = 1$, $a/h = 20$, $p_x = p_y = 1$ với hai điều kiện biên SSSS và CCCC. Bậc Ritz M_R thay đổi từ 1 đến 10; số hệ số của mỗi biến là $m = (M_R + 1)(M_R + 2)/2$ và tổng số bậc tự do là $4m$. Bảng 1 cho thấy nghiệm hội tụ nhanh; với SSSS gần như hội tụ từ $M_R = 6$, còn với CCCC sai khác tại $M_R = 6$ nhỏ hơn 0,05%. Do đó, $M_R = 10$ được chọn cho các khảo sát tiếp theo (66 hệ số cho mỗi biến, tổng cộng 264 bậc tự do N_{DOF}). Hai cột phần trăm trong Bảng 1 biểu thị mức thay đổi so với bậc Ritz liền trước.

Bảng 1. Khảo sát hội tụ của tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ cơ bản không thứ nguyên của tấm 2D-FGM

M_R	m	N_{DOF}	$\bar{\omega}$ (SSSS)	Δ (%)	$\bar{\omega}$ CCCC	Δ (%)
1	3	12	1,042388	–	1,769137	–
2	6	24	0,986401	5,675910	1,765953	0,180300
4	15	60	0,983779	0,020776	1,764065	0,098443
6	28	112	0,983750	0,000110	1,763311	0,040964
8	45	180	0,983749	0,000000	1,762936	0,020642
10	66	264	0,983749	0,000000	1,762732	0,011291

b. Kiểm chứng mô hình dao động tự do

Kiểm chứng dao động tự do dùng tấm vuông có $b/a = 1$, $a/h = 20$, biên SSSS và các tổ hợp p_x và p_y, so sánh với kết quả phần tử hữu hạn của Tran và cs. [24]. Bảng 2 cho sai số lớn nhất 0,3210%, xác nhận độ chính xác của mô hình.

Bảng 2. So sánh tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm 2D-FGM

p_y	Nguồn	$p_x = 0$	$p_x = 0{,}5$	$p_x = 1$	$p_x = 2$	$p_x = 10$
0	Tran và cs. [24]	1,9893	1,3896	1,1794	1,0151	0,8611
	Bài báo	1,9832	1,3852	1,1756	1,0119	0,8586
1	Tran và cs. [24]	1,1794	1,0533	0,9868	0,9220	0,8484
	Bài báo	1,1756	1,0501	0,9837	0,9192	0,8459
10	Tran và cs. [24]	0,8611	0,8525	0,8484	0,8445	0,8383
	Bài báo	0,8586	0,8500	0,8459	0,8420	0,8358

c. Kiểm chứng bài toán ổn định

Kiểm chứng ổn định dùng tấm 1D-FGM Al/Al_2O_3 không lỗ rỗng và không nền đàn hồi. Quy luật hai phương x và y được đưa về $E(z) = E_{Al} + (E_{Al_2O_3} - E_{Al})(z/h + 1/2)^{p_z}$, với E_{Al} = 70 GPa, $E_{Al_2O_3}$ = 380 GPa và ν = 0,30. Tấm có $a = b$ = 1 m, a/h = 100, chịu nén với $(\gamma_1, \gamma_2) = (1,0), (0,1), (1,1)$, $\gamma_3 = 0$. Hai điều kiện biên SSSS, SFSF được xét với $p_z = 0, 1, 2$. Bảng 3 cho kết quả rất gần Li và cs. [25], sai số lớn nhất 0,4033%, tiếp tục xác nhận độ chính xác của HSDT-4/pb2-Ritz cho bài toán ổn định.

Bảng 3. So sánh tải trọng tới hạn N_{cr} (MN/m) của tấm 1D-FGM

Điều kiện biên	p_z	Nguồn	$(\gamma_1, \gamma_2) = (1,0)$	$(\gamma_1, \gamma_2) = (0,1)$	$(\gamma_1, \gamma_2) = (1,1)$
SSSS	0	Li và cs. [25]	1,3731	1,3731	0,6866
		Bài báo	1,3730	1,3730	0,6865
	1	Li và cs. [25]	0,6845	0,6845	0,3423
		Bài báo	0,6844	0,6844	0,3422
	2	Li và cs. [25]	0,5341	0,5341	0,2665
		Bài báo	0,5341	0,5341	0,2670
SFSF	0	Li và cs. [25]	0,6986	0,3271	0,3201
		Bài báo	0,7014	0,3270	0,3201
	1	Li và cs. [25]	0,3485	0,1630	0,1594
		Bài báo	0,3496	0,1630	0,1596
	2	Li và cs. [25]	0,2719	0,1272	0,1245
		Bài báo	0,2728	0,1272	0,1245

4.2. Kết quả và thảo luận

Trong Mục 4.2, bộ thông số cơ sở gồm tấm vuông có $a/b = 1$ và $a/h = 20$; vật liệu Al_2O_3 (C1), ZrO_2 (C2) và Al (M), với dữ liệu theo Duong và cs. [13], gồm Al_2O_3 có E = 380 GPa, ν = 0,30 và ρ = 3800 kg/m^3; ZrO_2 có E = 200 GPa, ν = 0,30 và ρ = 5700 kg/m^3; Al có E = 70 GPa, ν = 0,30 và ρ = 2707 kg/m^3. Chọn $p_x = p_y = 1$, hệ số lỗ rỗng e_0 = 0,1 theo SPD; biên SSSS; nền Pasternak $\bar{k}_w$ = 50 và $\bar{k}_s$ = 5; bậc Ritz M_R = 10. Bài toán ổn định xét nén hai phương bằng nhau với $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$ và $\gamma_3 = 0$. Trong từng khảo sát, chỉ tham số đang xét được thay đổi.

a. Ảnh hưởng của các chỉ số tỷ lệ thể tích p_x và p_y

Ảnh hưởng của các chỉ số tỷ lệ thể tích p_x và p_y đến tần số cơ bản và tải trọng tới hạn được trình bày trong Bảng 4; hai chỉ số thay đổi từ 0 đến 10, các tham số còn lại giữ theo bộ cơ sở.

Bảng 4. Ảnh hưởng của các chỉ số vật liệu p_x và p_y đến tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ và tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}_{cr}$

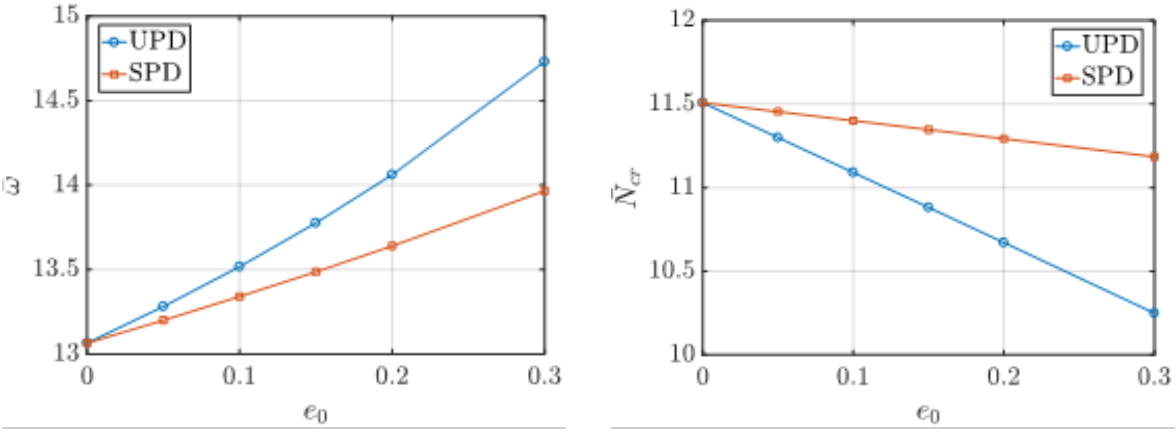
p_y	Đại lượng	$p_x = 0$	$p_x = 0,5$	$p_x = 1$	$p_x = 2$	$p_x = 5$	$p_x = 10$
0	$\bar{\omega}$	11,0668	11,5635	12,0313	12,7305	13,5981	13,8625
	$\bar{N}_{cr}$	12,4956	11,3098	10,6132	9,9828	9,5528	9,4242
0,5	$\bar{\omega}$	12,2841	12,5450	12,8410	13,3021	13,8355	13,9569
	$\bar{N}_{cr}$	13,8267	12,1349	11,1256	10,2235	9,6381	9,4728
1	$\bar{\omega}$	13,0664	13,1680	13,3406	13,6334	13,9565	13,9998

p_y	Đại lượng	$p_x = 0$	$p_x = 0{,}5$	$p_x = 1$	$p_x = 2$	$p_x = 5$	$p_x = 10$
2	$\bar{N}_{cr}$	14,5450	12,5857	11,4007	10,3426	9,6729	9,4906
	$\bar{\omega}$	14,0404	13,9246	13,9295	14,0034	14,0803	14,0409
5	$\bar{N}_{cr}$	15,3580	13,0961	11,7072	10,4678	9,7050	9,5057
	$\bar{\omega}$	15,1506	14,7534	14,5517	14,3751	14,2003	14,0818
10	$\bar{N}_{cr}$	16,2490	13,6471	12,0321	10,5969	9,7383	9,5217
	$\bar{\omega}$	15,5559	15,0459	14,7677	14,5044	14,2475	14,1018
	$\bar{N}_{cr}$	16,6209	13,8683	12,1612	10,6514	9,7562	9,5318

Bảng 4 cho thấy các chỉ số p_x và p_y ảnh hưởng rõ đến dao động và ổn định. Tần số tăng theo p_y; tại $p_x = 0$, $\bar{\omega}$ tăng từ 11,0668 lên 15,5559 (40,6%) khi p_y tăng từ 0 đến 10. Ảnh hưởng của p_x phụ thuộc p_y: với $p_y \leq 1$, tần số tăng theo p_x; còn khi $p_y \geq 5$, tần số giảm theo p_x. Tải trọng tới hạn giảm theo p_x nhưng tăng theo p_y. Tại $p_y = 1$, $\bar{N}_{cr}$ giảm khoảng 34,8% khi p_x tăng từ 0 đến 10; tại $p_x = 0$, $\bar{N}_{cr}$ tăng khoảng 33,0% khi p_y tăng từ 0 đến 10; vì vậy p_y cải thiện ổn định, còn p_x làm giảm tải trọng tới hạn.

b. Ảnh hưởng của lỗ rỗng

Hình 2 trình bày ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng e_0 và quy luật phân bố; khi e_0 tăng, tần số tăng còn tải trọng tới hạn giảm. Với UPD, e_0 tăng, $\bar{\omega}$ tăng từ 13,0652 tại $e_0 = 0$ lên 14,7303 tại $e_0 = 0{,}3$ (tăng 12,74%); với SPD, $\bar{\omega}$ chỉ tăng 6,90%. Với UPD, mô đun đàn hồi và khối lượng riêng cùng giảm theo (1 - e_0); trong khi nền giữ nguyên, nên đóng góp tương đối của nền làm tần số tăng. SPD bảo toàn tốt hơn vật liệu gần hai bề mặt nên biến thiên nhỏ hơn, phù hợp xu hướng ghi nhận bởi Ebrahimi và cs. [26].



(a) Tần số dao động riêng $\bar{\omega}$

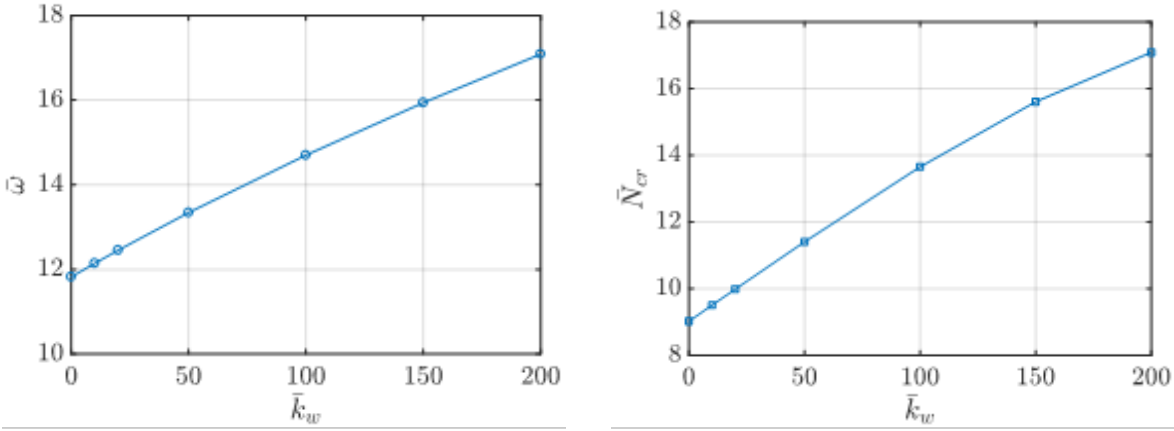
(b) Tải trọng tới hạn $\bar{N}_{cr}$

Hình 2. Ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng e_0 và quy luật phân bố lỗ rỗng

Tải trọng tới hạn giảm khi e_0 tăng. Với UPD, $\bar{N}_{cr}$ giảm từ 11,5081 xuống 10,2493 khi e_0 tăng từ 0 đến 0,3 (giảm 10,94%); với SPD chỉ giảm 2,81%. SPD bảo toàn tốt hơn vật liệu xa mặt trung hòa nên duy trì độ cứng uốn tốt hơn.

c. Ảnh hưởng của nền đàn hồi Pasternak

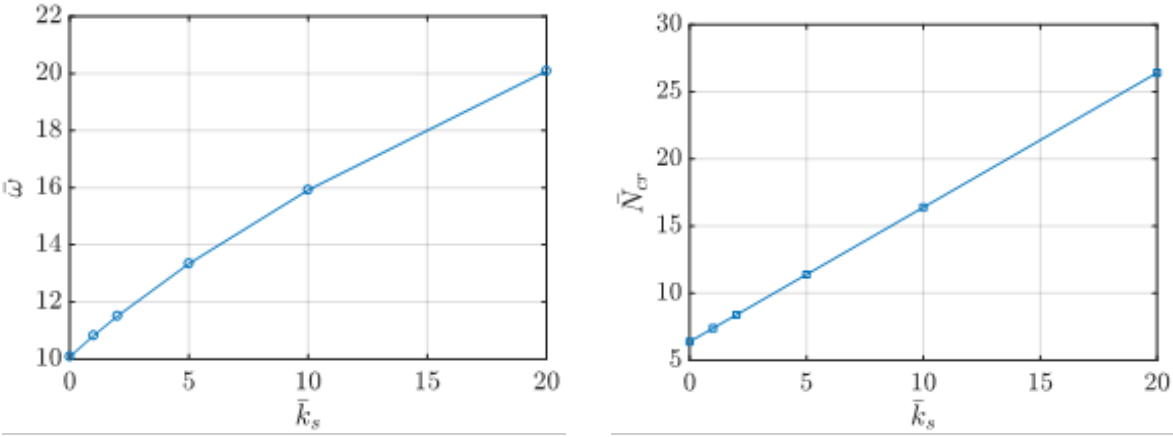
Hình 3 khảo sát hệ số nền Winkler $\bar{k}_w$; khi $\bar{k}_w$ tăng từ 0 lên 200 với $\bar{k}_s = 5$, tần số tăng 44,52% và tải trọng tới hạn tăng 89,48%; nền Winkler ảnh hưởng mạnh hơn đến ổn định.



(a) Tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ (b) Tải trọng tới hạn $\bar{N}_{cr}$

Hình 3. Ảnh hưởng của hệ số nền Winkler $\bar{k}_w$

Hình 4 cho thấy khi $\bar{k}_s$ tăng từ 0 lên 20 ($\bar{k}_w = 50$), tần số tăng 99,13% và tải trọng tới hạn tăng 312,46%, cho thấy hiệu ứng gia cứng rõ của lớp cắt Pasternak.



(a) Tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ (b) Tải trọng tới hạn $\bar{N}_{cr}$

Hình 4. Ảnh hưởng của hệ số lớp cắt Pasternak $\bar{k}_s$

d. Ảnh hưởng của điều kiện biên

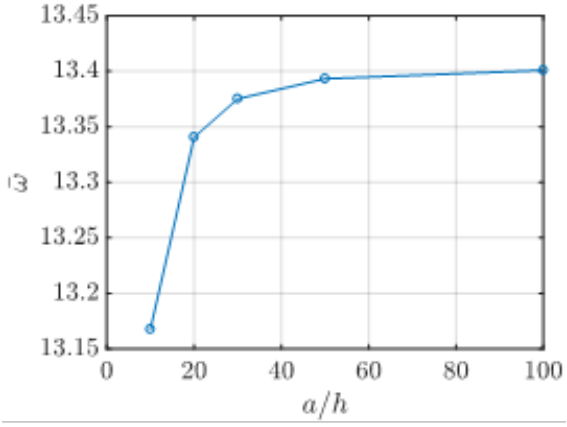
Bảng 5 cho thấy khi chuyển từ SSSS sang CCCC, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ và $\bar{\omega}_3$ tăng khoảng 36,17%; 31,33% và 31,67%; tải trọng tới hạn tăng 50,06%. Liên kết biên chặt hơn làm tăng độ cứng của tấm và nâng cao khả năng ổn định.

Bảng 5. Ảnh hưởng của điều kiện biên đến ba tần số dao động riêng đầu tiên và tải trọng tới hạn

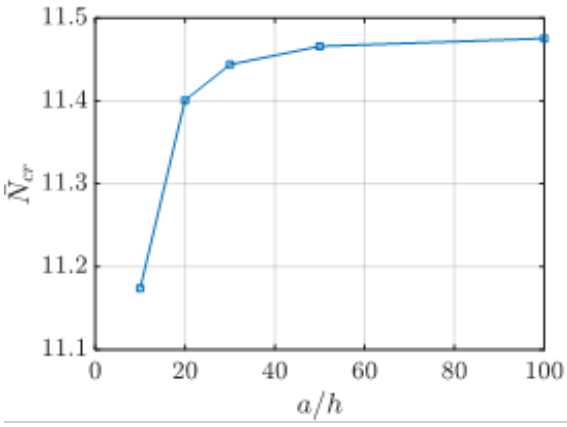
Điều kiện biên	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{N}_{cr}$
SSSS	13,3406	24,5634	25,0177	11,4007
CCCC	18,1653	32,2587	32,9399	17,1079

e. Ảnh hưởng của tỷ số kích thước

Hình 5 trình bày ảnh hưởng của tỷ số kích thước với a/h = 10, 20, 30, 50, 100. Khi a/h tăng từ 10 lên 100, tần số và tải trọng tới hạn tăng lần lượt 1,77% và 2,70%. Biến dạng cắt giảm khi tấm mỏng hơn (a/h nhỏ) và tiến tới hội tụ khi a/h lớn; tải trọng tới hạn nhạy hơn với tỷ số kích thước so với tần số cơ bản.



(a) Tần số dao động riêng $\bar{\omega}$

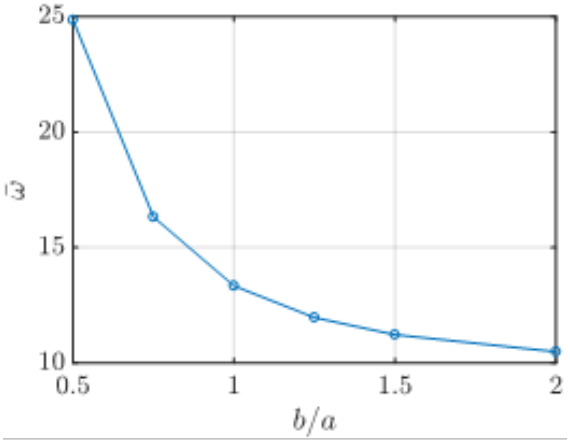


(b) Tải trọng tới hạn $\bar{N}_{cr}$

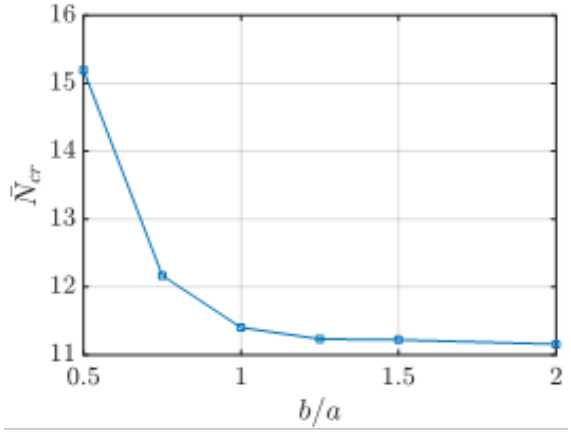
Hình 5. Ảnh hưởng của tỷ số kích thước a/h

f. Ảnh hưởng của tỷ số cạnh

Hình 6 khảo sát tỷ số cạnh b/a = 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,5; 2. Khi b/a tăng từ 0,5 đến 2, tần số và tải trọng tới hạn giảm lần lượt 57,8% và 26,6%; dao động nhạy hơn ổn định.



(a) Tần số dao động riêng $\bar{\omega}$



(b) Tải trọng tới hạn $\bar{N}_{cr}$

Hình 6. Ảnh hưởng của tỷ số cạnh b/a

5. Kết luận

Mô hình bán giải tích dựa trên lý thuyết HSDT-4 kết hợp phương pháp pb2-Ritz đã được xây dựng để phân tích dao động tự do và ổn định của tấm 2D-FGM có lỗ rỗng trên nền đàn hồi Pasternak. Độ chính xác của mô hình được đánh giá thông qua khảo sát hội tụ và so sánh với các kết quả đã công bố

cho cả bài toán dao động và ổn định. Trên cơ sở các khảo sát tham số, một số kết luận chính được rút ra như sau:

- Hai chỉ số tỷ lệ thể tích theo hai phương trong mặt phẳng ảnh hưởng rõ rệt đến ứng xử của tấm. Khi p_y tăng, tần số dao động riêng và tải trọng tới hạn đều tăng; trong khi p_x làm giảm tải trọng tới hạn, ảnh hưởng đến tần số phụ thuộc vào giá trị của p_y.

- Hệ số và quy luật phân bố lỗ rỗng tác động khác nhau đến đặc trưng dao động và ổn định. Trong phạm vi khảo sát, khi hệ số lỗ rỗng tăng, tần số dao động riêng cơ bản tăng nhưng tải trọng tới hạn giảm; phân bố đều UPD gây ảnh hưởng rõ hơn so với phân bố đối xứng SPD.

- Sự gia tăng các tham số nền Pasternak làm tăng cả tần số dao động riêng cơ bản và tải trọng tới hạn, cho thấy vai trò của nền đàn hồi trong việc nâng cao độ cứng tổng thể và khả năng ổn định của tấm.

- Điều kiện biên có ảnh hưởng đáng kể đến cả hai đặc trưng cơ học. Tấm CCCC cho tần số dao động riêng cơ bản và tải trọng tới hạn lớn hơn rõ rệt so với tấm SSSS do mức độ hạn chế chuyển vị và độ cứng biên cao hơn.

- Khi tỷ số kích thước a/h tăng, ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang giảm dần; tần số dao động riêng cơ bản và tải trọng tới hạn tăng nhẹ và tiến tới giá trị hội tụ khi tấm trở nên mỏng hơn.

- Khi tỷ số cạnh b/a tăng, cả tần số dao động riêng cơ bản và tải trọng tới hạn đều giảm. Trong phạm vi khảo sát, đặc trưng dao động thể hiện độ nhạy với tỷ số cạnh lớn hơn so với đặc trưng ổn định.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo trong đề tài mã số B2025-XDA-06.

Tuyên bố về việc sử dụng trí tuệ nhân tạo tạo sinh và công nghệ hỗ trợ bởi AI

Các tác giả xác nhận không sử dụng bất kỳ công cụ trí tuệ nhân tạo tạo sinh hoặc công nghệ hỗ trợ bởi AI nào trong quá trình chuẩn bị và hoàn thiện bản thảo.

Tài liệu tham khảo

[1] Javaheri, R., Eslami, M. R. (2002). Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 82(4):277–283.

[2] Lanhe, W. (2004). Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate. *Composite Structures*, 64(2):211–218.

[3] Zenkour, A. M. (2005). A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2—buckling and free vibration. *International Journal of Solids and Structures*, 42(18–19):5243–5258.

[4] Shariat, B. S., Eslami, M. R. (2007). Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads. *Composite Structures*, 78(3):433–439.

[5] Van Vinh, P., Van Chinh, N., Tounsi, A. (2022). Static bending and buckling analysis of bi-directional functionally graded porous plates using an improved first-order shear deformation theory and FEM. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 96:104743.

[6] Van Do, T., Nguyen, D. K., Luong, V. H., Lieu, Q. X., Lee, J. (2017). Analysis of bi-directional functionally graded plates by FEM and a new third-order shear deformation plate theory. *Thin-Walled Structures*, 119:687–699.

[7] Lieu, Q. X., Lee, D., Kang, J., Lee, J. (2018). NURBS-based modeling and analysis for free vibration and buckling problems of in-plane bi-directional functionally graded plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(12):1064–1080.

[8] Chen, X., Chen, L., Huang, S., Li, M., Li, X. (2021). Nonlinear forced vibration of in-plane bi-directional functionally graded materials rectangular plate with global and localized geometrical imperfections. *Applied Mathematical Modelling*, 93:443–466.

[9] Karami, B., Ghayesh, M. H., Fantuzzi, N., Żur, K. K. (2025). Free vibrations of higher-order quasi-3D viscoelastic bi-directional functionally graded plates. *Composite Structures*, 359:118972.

[10] Mantari, J., Granados, E., Hinostroza, M., Guedes Soares, C. (2014). Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT. *Composite Structures*, 118: 455–471.

[11] Harsha, A., Kumar, P. (2022). Thermoelectric elastic analysis of bi-directional three-layer functionally graded porous piezoelectric (FGPP) plate resting on elastic foundation. *Forces in Mechanics*, 8:100112.

[12] Mohammadimehr, M., Rostami, R., Arefi, M. (2016). Electro-elastic analysis of a sandwich thick plate considering FG core and composite piezoelectric layers on Pasternak foundation using TSDT. *Steel and Composite Structures*, 20(3):513–543.

[13] Duong, T.-H., Nguyen, V.-L., Tran, H.-Q., Vu, V.-T., Tran, M.-T. (2025). Bending and vibration analysis of three-phase bi-directional functionally graded porous sandwich plates. *Archive of Applied Mechanics*, 95(10):240.

[14] Kahya, V., Turan, M. (2017). Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 109:108–115.

[15] Tran, H. Q., Vu, V. T., Tran, M. T. (2023). Free vibration analysis of piezoelectric functionally graded porous plates with graphene platelets reinforcement by pb-2 Ritz method. *Composite Structures*, 305: 116535.

[16] Vu, V. T., Tran, H. Q. (2024). Free vibration characteristics of stiffened sandwich plates with auxetic core and functionally graded piezoelectric face sheet. *Acta Mechanica*, 235(6):4029–4056.

[17] Vu, V. T., Tran, H. Q. (2025). Thermo-electro-magneto-mechanical vibration analysis of sandwich plates with graphene oxide powder reinforced composite core and magneto-electro-elastic face sheets resting on Kerr foundation. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 21(6):1609–1641.

[18] Thẩm, V. V. (2026). Ảnh hưởng của nhiệt độ, độ ẩm và từ trường đến đặc trưng dao động của tấm nano FGM. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCNXD) - ĐHXDHN*, 20(1V):50–68.

[19] Mohamed, I., Kahya, V., Şimşek, S. (2024). Ritz-type quasi-3D solution for free vibration and buckling of functionally graded sandwich beams with porous core resting on a two-parameter elastic foundation. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 50(16):13343–13367.

[20] Nguyen, D. K., Nguyen, Q. H., Tran, T. T., Bui, V. T. (2017). Vibration of bi-dimensional functionally graded Timoshenko beams excited by a moving load. *Acta Mechanica*, 228(1):141–155.

[21] Nemat-Alla, M., Ahmed, K. I., Hassab-Allah, I. (2009). Elastic–plastic analysis of two-dimensional functionally graded materials under thermal loading. *International Journal of Solids and Structures*, 46(14–15):2774–2786.

[22] Reddy, J. N. (2006). *Theory and analysis of elastic plates and shells*. 2nd edition, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA.

[23] Wu, L. H., Lu, Y. (2011). Free vibration analysis of rectangular plates with internal columns and uniform elastic edge supports by pb-2 Ritz method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(7):494–504.

[24] Tran, T. T., Truong, H. T. H., Le, P. B. (2026). Study on the nonlinear vibration of tri-directional functionally graded sandwich plates partially supported by Pasternak foundation subjected to blast loading. *Defence Technology*, 56:96–109.

[25] Li, S., Zheng, S., Chen, D. (2020). Porosity-dependent isogeometric analysis of bi-directional functionally graded plates. *Thin-Walled Structures*, 156:106999.

[26] Ebrahimi, F., Jafari, A., Barati, M. R. (2017). Vibration analysis of magneto-electro-elastic heterogeneous porous material plates resting on elastic foundations. *Thin-Walled Structures*, 119:33–46.