Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, ĐHXDHN, 2026, 20 (4V): 44–59

PHÂN TÍCH TẦN SỐ DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA VỎ NÓN CỤT KÍN LÀM BẰNG VẬT LIỆU CÓ CẤU TRÚC TPMS

Nguyễn Văn Lợi[a,*], Chu Thanh Bình[a]

[a]*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 22/7/2026, Sửa xong 03/9/2026, Chấp nhận đăng 03/9/2026

Tóm tắt

Trong bài báo này, lời giải bán giải tích được xây dựng để xác định tần số dao động riêng của vỏ nón cụt làm bằng vật liệu có cấu trúc bề mặt tối thiểu tuần hoàn ba chiều (Triply Periodic Minimal Surface – TPMS) chịu các điều kiện biên khác nhau. Mô hình và các phương trình chủ đạo của vỏ được xây dựng dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) và phương pháp Rayleigh–Ritz. Các thành phần chuyển vị được xấp xỉ bằng các hàm cơ sở trực giao theo tọa độ đường sinh, được xây dựng thông qua quy trình trực giao Gram–Schmidt chuẩn hóa. Độ chính xác của mô hình đề xuất được kiểm chứng thông qua việc so sánh với các kết quả đã được công bố. Phân tích tham số cho thấy các dạng cấu trúc TPMS, mật độ khối lượng tương đối, điều kiện biên và nửa góc đỉnh của vỏ nón đều có ảnh hưởng đáng kể đến tần số dao động riêng. Nghiên cứu này cung cấp một mô hình hiệu quả để dự đoán đặc tính dao động của vỏ nón cụt TPMS, qua đó hỗ trợ thiết kế và tối ưu hóa các kết cấu siêu nhẹ tương tự trong các lĩnh vực kỹ thuật hàng không vũ trụ, xây dựng và cơ khí.

Từ khoá: phân tích dao động riêng; vỏ nón cụt kín; vật liệu TPMS; phương pháp Rayleigh–Ritz; điều kiện biên khác nhau.

FREE VIBRATION ANALYSIS OF CLOSED TPMS TRUNCATED CONICAL SHELLS

Abstract

This paper presents a semi-analytical solution for determining the natural frequencies of closed truncated conical shells made of triply periodic minimal surface (TPMS)-based materials subjected to different boundary conditions. The shell model and its governing equations are developed based on the first-order shear deformation theory (FSDT) and the Rayleigh–Ritz method. The displacement components are approximated by orthogonal admissible functions defined along the meridional coordinate and generated using the Gram–Schmidt orthogonalization procedure. The accuracy of the proposed model is validated through comparisons with published results. Parametric studies reveal that TPMS architectures, relative density, boundary conditions and the semi-vertex angle of the cone have significant effects on the natural frequencies of the shell. The present study provides an efficient model for predicting the vibration characteristics of closed TPMS truncated conical shells, thereby supporting the design and optimization of similar lightweight structures for aerospace, civil, and mechanical engineering applications.

Keywords: free vibration; closed truncated conical shell; TPMS material; Rayleigh–Ritz method; different boundary conditions.

https://doi.org/10.31814/stce.huce2026-20(4V)-04 © 2026 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Những năm gần đây, vật liệu có cấu trúc bề mặt tối thiểu tuần hoàn ba chiều (TPMS) là đại diện cho một bước tiến nổi bật trong lĩnh vực vật liệu siêu nhẹ lấy cảm hứng từ tự nhiên, loại vật liệu này với đặc tính bề mặt có độ cong trung bình bằng không và liên kết lỗ xốp hoàn hảo [1]. Các dạng cấu trúc TPMS tiêu biểu như Primitive (P), Gyroid (G), và I-graph và WP-graph (IWP) cho thấy tỷ lệ độ bền trên trọng lượng cực kỳ ấn tượng, vượt trội so với các kết cấu dạng đặc chắc thông thường [1, 2]. Thông qua việc điều chỉnh tham số phương trình dạng ẩn và mật độ khối lượng tương đối, mô đun đàn hồi, mô đun đàn hồi trượt và cơ tính tổng thể của cấu trúc TPMS có thể được kiểm soát khá linh hoạt [1]. Vật liệu TPMS sở hữu khả năng hấp thụ năng lượng vượt trội, đồng thời có thể tối ưu hóa

*Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* loinv@huce.edu.vn (Lợi, N. V.)

tính dẫn nhiệt và cách âm [1]. Hơn thế nữa, nhờ vào sự phát triển mạnh mẽ của công nghệ in 3D hiện nay, các cấu trúc hình học phức tạp của TPMS có thể được chế tạo với độ chính xác cao từ nhiều loại vật liệu nền, mở ra kỷ nguyên mới cho các siêu vật liệu cơ học có khả năng tùy biến cao [1, 2].

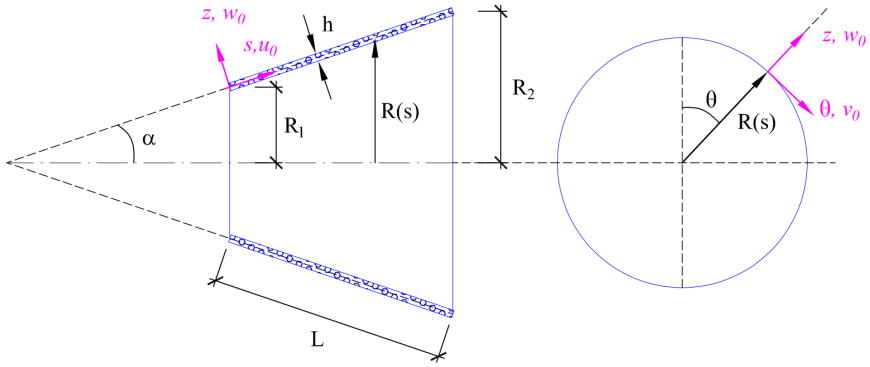
Các kết cấu vỏ nói chung và vỏ nón cụt nói riêng được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực kỹ thuật trọng điểm như hàng không vũ trụ, kỹ thuật hàng hải, cơ khí và xây dựng [3]. Trong kỹ thuật xây dựng, vỏ nón cụt là dạng kết cấu tròn xoay điển hình, xuất hiện phổ biến ở đáy/mái silo chứa vật liệu rời, phễu thu, tháp làm mát và các thiết bị chịu áp lực. Bên cạnh đó, nhờ đặc tính hình học biến thiên cùng khả năng chịu tải trọng và đáp ứng khí động học vượt trội, vỏ nón cụt thường là thành phần chịu lực cốt lõi trong vỏ tên lửa, cụm vòi phun, thân máy bay và tàu ngầm [3, 4]. Việc tích hợp mô hình TPMS vào kết cấu vỏ nón mở ra hướng thiết kế mới nhằm giảm thiểu tối đa trọng lượng nhưng vẫn đảm bảo độ bền và khả năng hấp thụ năng lượng. Mặc dù hiện nay kết cấu TPMS vỏ nón cụt chưa được ứng dụng nhiều trong thực tế, tuy nhiên tính khả thi trong thiết kế và chế tạo các dạng vỏ tương tự như vậy và phức tạp hơn đã được chứng minh thông qua công nghệ nóng chảy lớp bột bằng laser (LPBF) [5].

Cho đến nay, nghiên cứu về dao động và động lực học của kết cấu vỏ/vỏ nón cụt, đã thu hút sự chú ý sâu rộng của nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước. Đối với vật liệu có cơ tính biến thiên (functionally graded material – FGM), Setoodeh và cs. [6] đã tiên phong nghiên cứu dao động riêng và đáp ứng động lực học quá độ (transient) của vỏ nón cụt FGM chịu tác dụng của tải trọng va đập. Tiếp đó, Sofiyev đã sử dụng lý thuyết vỏ Donnell–von Karman và phương pháp Galerkin để phân tích dao động phi tuyến của vỏ nón cụt FGM [7]. Các bài toán về ổn định phi tuyến dưới tải trọng nén cũng được Deniz [8] giải quyết thành công. Nhằm xử lý các điều kiện biên phức tạp, Jin và cs. [9] đã xây dựng chuỗi Fourier hiệu chỉnh và phương pháp Rayleigh–Ritz, cho phép phân tích dao động riêng của vỏ nón cụt dưới các điều kiện biên bất kỳ. Trong khi đó, Zarei và cs. [10] đã mở rộng phạm vi và đối tượng sang các kết cấu phức tạp hơn như vỏ nón có gân gia cường xiên. Đặc biệt, đối với các vật liệu composite tiên tiến, Nejati và cs. [11] đã phân tích sự ảnh hưởng của quy luật và hàm lượng CNT (Carbon nanotube) đến tần số dao động riêng và ứng xử tĩnh của vỏ nón cụt chịu chuyển động quay bằng phương pháp cầu phương vi phân tổng quát (DQM).

Đối với kết cấu làm bằng vật liệu TPMS, gần đây các kết cấu tấm, panel vỏ, vỏ chỏm cầu thoải, vỏ cầu cụt kín và vỏ trụ tròn cũng đã và đang được tập trung nghiên cứu và phân tích. Chẳng hạn, Nguyen-Xuan và cs. [1] đã tiên phong trong việc phân tích dao động riêng, uốn tĩnh và ổn định của kết cấu tấm làm bằng vật liệu TPMS sử dụng phương pháp phân tích đẳng hình học (Isogeometric Analysis – IGA) kết hợp với lý thuyết tấm bậc cao năm ẩn số. Nguyen và cs. [12] đã trình bày nghiên cứu về dao động riêng và uốn tĩnh của kết cấu vỏ hai độ cong TPMS bằng phương pháp phân tích đẳng hình học dùng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Dùng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn ẩn chuyển vị, phương pháp IGA và lời giải Navier, Lê và cs. [13] đã phân tích đặc trưng dao động của kết cấu sandwich vỏ cong hai chiều trong đó có lõi là vật liệu TPMS và có tích hợp các lớp bề mặt từ điện–từ (magneto-electric) chịu tác dụng của tải trọng va đập vận tốc thấp. Dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và phi tuyến hình học von Kármán, Đặng Thùy Đông và cs. [14] đã trình bày lời giải dạng giải tích cho bài toán phân tích ổn định tĩnh phi tuyến của vỏ chỏm cầu thoải TPMS, trong đó cả tải trọng nhiệt, cơ và nền đàn hồi được xem xét và đánh giá. Dựa vào phương pháp IGA, Dương và cs. [15] đã phân tích dao động riêng của kết cấu vỏ cầu cụt kín vật liệu xốp TPMS có khả năng xoay với chiều dày thay đổi. Gần đây, với việc sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT, phương pháp Rayleigh–Ritz, Nguyễn [16] đã phân tích dao động riêng của vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu xốp có cấu trúc TPMS với các liên kết đàn hồi ở hai đầu vỏ. Qua phân tích tổng quan ở trên, ta có thể thấy rằng nghiên cứu về kết cấu vỏ nón cụt vật liệu TPMS gần như chưa được khai phá.

Trong việc giải quyết các bài toán về kết cấu, có nhiều phương pháp tính toán hiệu quả như phương pháp giải tích [17, 18], bán giải tích [19–23] và số [24–26]. Trong số đó, phương pháp bán giải tích Rayleigh–Ritz kết hợp với các đa thức trực giao được chuẩn hóa bằng quy trình Gram–Schmidt là một trong những phương pháp đóng vai trò cốt lõi [2, 27]. Mặc dù có những nhược điểm cố hữu của phương pháp bán giải tích, ví dụ như khó áp dụng cho các kết cấu kỳ dị; tuy vậy phương pháp này cũng có nhiều ưu điểm, đặc biệt là khả năng xử lý linh hoạt và mô tả chính xác các điều kiện biên khác nhau của kết cấu.

Qua phân tích ở trên, ta có thể thấy vật liệu TPMS đã được nghiên cứu và áp dụng cho các kết cấu dầm/tấm/vỏ trụ tròn, tuy vậy việc phân tích kết cấu vỏ nón cụt kín làm từ vật liệu TPMS với các điều kiện biên khác nhau vẫn còn bỏ ngỏ. Do vậy, nghiên cứu này tập trung vào việc phân tích dao động riêng của vỏ nón cụt kín TPMS. Đóng góp của nghiên cứu không chỉ cung cấp một công cụ bán giải tích tin cậy để tính toán tần số dao động riêng, mà còn làm rõ cơ chế ảnh hưởng của các cấu trúc TPMS, mật độ phân bố khối lượng, điều kiện biên và nửa góc ở đỉnh nón đến độ cứng của kết cấu. Điều này tạo nền tảng lý thuyết vững chắc cho việc thiết kế tối ưu các bộ phận kết cấu dạng vỏ nón cụt kín làm bằng vật liệu tiên tiến TPMS trong tương lai.



Hình 1. Các tham số và kích thước hình học vỏ nón cụt kín

2. Mô hình vật liệu, mối quan hệ động học và biểu thức năng lượng kết cấu vỏ

2.1. Mô hình vật liệu có cấu trúc bề mặt tối thiểu tuần hoàn ba chiều TPMS

Xét kết cấu vỏ nón cụt kín làm từ vật liệu có cấu trúc bề mặt tối thiểu tuần hoàn ba chiều TPMS, có các thông số hình học: bán kính đáy nhỏ R_1, bán kính đáy lớn R_2, chiều dài đường sinh L, chiều dày h (không đổi), và nửa góc ở đỉnh nón α, như thể hiện trên Hình 1. Hệ tọa độ (s, θ, z) được sử dụng, trong đó s là tọa độ dọc theo đường sinh, $s \in [0, L]$, θ là tọa độ góc theo phương vòng, $\theta \in [0, 2\pi]$, z là tọa độ vuông góc mặt trung bình vỏ, $z \in [-h/2, h/2]$. Bán kính vỏ nón tại tọa độ s là:

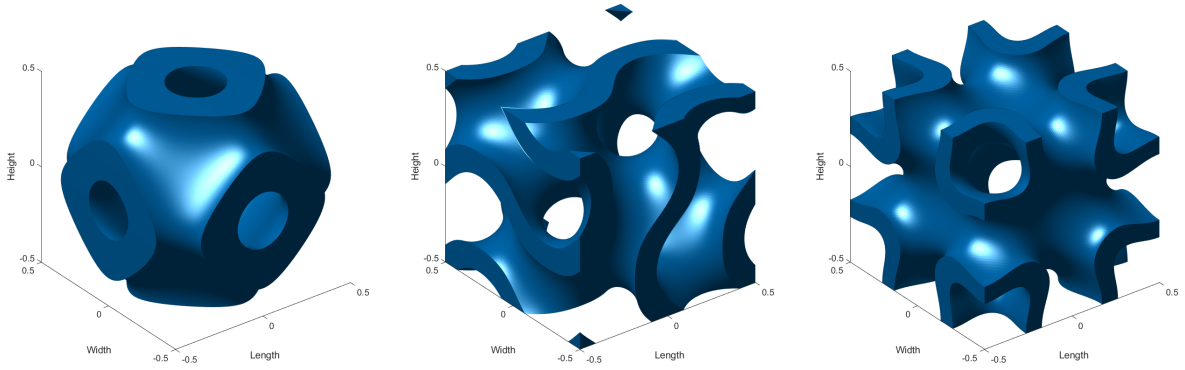
$$R(s) = R_1 + s \sin \alpha \tag{1}$$

Ba loại cấu trúc TPMS được xét là P (Primitive), G (Gyroid) và IWP, có hàm bề mặt được định nghĩa theo các tọa độ cục bộ [1, 16], và được minh họa như trên Hình 2. Trong nghiên cứu này, mật độ khối lượng tương đối ρ được giả thiết biến thiên theo chiều dày vỏ như sau:

$$\rho(z) = \rho_{\min} + (\rho_{\max} - \rho_{\min}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k ; \quad \text{nhóm A (bất đối xứng)} \tag{2}$$

$$\rho(z) = \rho_{\min} + (\rho_{\max} - \rho_{\min}) \left\{ 1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right\}^k; \quad \text{nhóm C (đối xứng)} \tag{3}$$

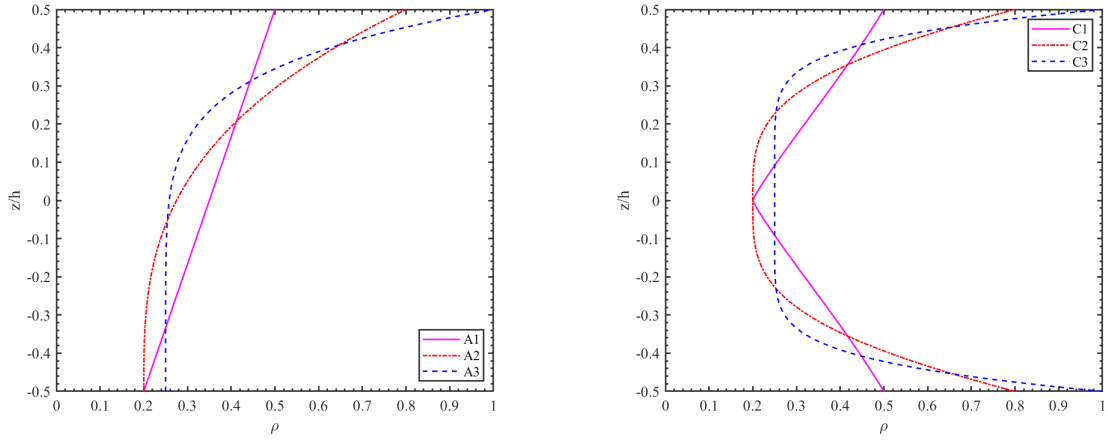
trong đó, $\rho_{\max}, \rho_{\min}$ là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của ρ; k là chỉ số hàm mũ. Cụ thể, ba quy luật phân bố ρ của nhóm A (A1, A2, A3) và ba quy luật phân bố của nhóm C (C1, C2, C3) như minh họa trên Hình 3, được nghiên cứu. Để thuận tiện, các tham số $(\rho_{\max}, \rho_{\min}, k)$ cho các quy luật này đã được liệt kê sẵn ở Bảng 1.



(a) P ($\bar{\rho}$ = 0,35) (b) G ($\bar{\rho}$ = 0,35) (c) IWP ($\bar{\rho}$ = 0,35)

Hình 2. Ba dạng cấu trúc TPMS gồm P, G, và IWP

Các tính chất cơ học như mô đun đàn hồi $E(z)$, mô đun đàn hồi trượt $G(z)$, và hệ số Poisson $\nu(z)$ của mô hình vật liệu TPMS dạng P, G, và IWP được xác định thông qua mô hình hồi quy phi tuyến có ràng buộc [1]. Các đại lượng này phụ thuộc chủ yếu vào mật độ khối lượng tương đối $\rho(z)$ và các đại lượng như mô đun đàn hồi E_s và mô đun đàn hồi trượt G_s của vật liệu nền; để ngắn gọn và súc tích, các biểu thức chi tiết của chúng được kế thừa và trình bày nhất quán với các mô hình đã công bố trong [1, 2, 16]. Các tham số $E(z)$, $G(z)$, và $\nu(z)$ sẽ là nền tảng quan trọng để tính toán kết cấu vỏ nón cụt bằng vật liệu TPMS.



(a) Quy luật A1, A2, và A3 (b) Quy luật C1, C2, và C3 (đối xứng)

Hình 3. Các quy luật phân bố mật độ khối lượng tương đối theo chiều dày

Cũng cần lưu ý rằng ô đơn vị của cấu trúc TPMS được mô hình hóa là vật liệu đối xứng lập phương (cubic-symmetric material), với ma trận hệ số đàn hồi có dạng tương tự đẳng hướng [1], tuy

nhiên điểm khác biệt là mô đun đàn hồi trượt G không bằng hằng số Lamé $\mu = E/[2(1+\nu)]$, phản ánh tính dị hướng nội tại của cấu trúc TPMS. Ngoài ra, mô hình vật liệu đồng nhất hóa này có giá trị ở kích cỡ macro (kích cỡ thông thường) khi kích thước ô đơn vị TPMS nhỏ hơn đáng kể so với chiều dày vỏ (số lượng ô đơn vị đủ lớn).

Bảng 1. Các tham số $(\rho_{\max}, \rho_{\min}, k)$ cho sáu quy luật khác nhau của mật độ khối lượng tương đối với giá trị trung bình $\bar{\rho} = 0{,}35$ [1, 16]

Quy luật	$\rho_{\min}$	$\rho_{\max}$	k
A1	0,20	0,5	1,0
A2	0,20	0,8	3,0
A3	0,25	1,0	6,5
C1	0,20	0,5	0,561
C2	0,20	0,8	1,757
C3	0,25	1,0	3,943

2.2. Cơ sở lý thuyết

Theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, trường chuyển vị của vỏ nón được biểu diễn qua năm ẩn chuyển vị thuộc mặt trung hòa $(u_0, v_0, w_0, \varphi_s, \varphi_\theta)$ như sau [19, 28]:

$$u(s,\theta,z,t) = u_0(s,\theta,t) + z\varphi_s(s,\theta,t) \tag{4}$$

$$v(s,\theta,z,t) = v_0(s,\theta,t) + z\varphi_\theta(s,\theta,t) \tag{5}$$

$$w(s,\theta,z,t) = w_0(s,\theta,t) \tag{6}$$

trong đó u_0, v_0, w_0 chính là các chuyển vị tại mặt trung hòa theo phương đường sinh, phương vòng và phương pháp tuyến của vỏ nón; $\varphi_s, \varphi_\theta$ chính là các góc xoay của pháp tuyến trong các mặt phẳng (s,z) và (θ,z).

Các thành phần biến dạng của vỏ nón được xác định bởi biểu thức sau [19, 28]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{s\theta}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_s \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{s\theta} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{sz}^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_s^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial s} \\ \varepsilon_\theta^0 &= \frac{1}{R(s)}\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0 \sin\alpha}{R(s)} + \frac{w_0 \cos\alpha}{R(s)} \\ \gamma_{s\theta}^0 &= \frac{1}{R(s)}\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial s} - \frac{v_0 \sin\alpha}{R(s)} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \kappa_s &= \frac{\partial \varphi_s}{\partial s} \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{R(s)}\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\varphi_s \sin\alpha}{R(s)} \\ \kappa_{s\theta} &= \frac{1}{R(s)}\frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial s} - \frac{\varphi_\theta \sin\alpha}{R(s)} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\gamma_{\theta z}^{0} = \varphi_\theta + \frac{1}{R(s)}\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0 \cos\alpha}{R(s)}; \quad \gamma_{sz}^{0} = \varphi_s + \frac{\partial w_0}{\partial s} \tag{10}$$

Mối quan hệ ứng suất–biến dạng của kết cấu vỏ như sau:

$$\begin{bmatrix}\sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{s\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & 0 \\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z) & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta}\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{sz} \\ \sigma_{\theta z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44}(z) & 0 \\ 0 & Q_{55}(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_{sz} \\ \gamma_{\theta z}\end{bmatrix} \tag{12}$$

trong đó:

$$Q_{11}(z) = Q_{22}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}; \quad Q_{12}(z) = \frac{\nu E(z)}{1-\nu(z)^2} \tag{13}$$

$$Q_{66}(z) = Q_{44}(z) = Q_{55}(z) = G(z) \tag{14}$$

Bằng cách tích phân ứng suất theo toàn bộ chiều dày vỏ, ta thu được các thành phần nội lực như biểu thức dưới đây:

$$\begin{Bmatrix}N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta}\end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{s\theta}\end{Bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix}M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta}\end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{s\theta}\end{Bmatrix} z\, dz \tag{15}$$

$$\begin{Bmatrix}Q_s \\ Q_\theta\end{Bmatrix} = K_s\int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\sigma_{sz} \\ \sigma_{\theta z}\end{Bmatrix} dz \tag{16}$$

trong đó: K_s là hệ số hiệu chỉnh cắt, được lấy gần đúng là bằng 5/6, tương tự như cách tiếp cận trong các tài liệu [2, 12, 29].

Thế năng biến dạng đàn hồi của kết cấu vỏ nón cụt TPMS được cho bởi [30]:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\left(N_s\varepsilon_s^0 + N_\theta\varepsilon_\theta^0 + N_{s\theta}\gamma_{s\theta}^0 + M_s\kappa_s + M_\theta\kappa_\theta + M_{s\theta}\kappa_{s\theta} + Q_s\gamma_{sz}^0 + Q_\theta\gamma_{\theta z}^0\right)R(s)\,d\theta\,ds \tag{17}$$

Động năng của kết cấu vỏ nón cụt TPMS được xác định bởi [30]:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\left[I_0\left(\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2\right) + 2I_1\left(\dot{u}_0\dot{\varphi}_s + \dot{v}_0\dot{\varphi}_\theta\right) + I_2\left(\dot{\varphi}_s^2 + \dot{\varphi}_\theta^2\right)\right]R(s)\,d\theta\,ds \tag{18}$$

trong đó, các đại lượng quán tính khối lượng (I_0, I_1, I_2) được xác định bởi:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2}\rho(z)\rho_s(1, z, z^2)\,dz \tag{19}$$

ở đây ρ_s là khối lượng riêng của vật liệu nền. Có thể thấy rằng, đại lượng $I_1 = 0$ khi $\rho(z)$ đối xứng (các phân bố nhóm C) và $I_1 \neq 0$ khi $\rho(z)$ bất đối xứng (các phân bố nhóm A).

3. Lời giải Rayleigh–Ritz

Với vỏ nón cụt kín, các thành phần chuyển vị được giả thiết dưới dạng chuỗi như sau:

$$u_0(s,\theta,t) = \sum_{i=1}^{M} A_i \psi_i^u(s)\cos(n\theta)e^{i\omega t} \tag{20}$$

$$v_0(s,\theta,t) = \sum_{j=1}^{M} B_j \psi_j^v(s)\sin(n\theta)e^{i\omega t} \tag{21}$$

$$w_0(s,\theta,t) = \sum_{k=1}^{M} C_k \psi_k^w(s)\cos(n\theta)e^{i\omega t} \tag{22}$$

$$\varphi_s(s,\theta,t) = \sum_{r=1}^{M} D_r \psi_r^\varphi(s)\cos(n\theta)e^{i\omega t} \tag{23}$$

$$\varphi_\theta(s,\theta,t) = \sum_{m=1}^{M} E_m \psi_m^\theta(s)\sin(n\theta)e^{i\omega t} \tag{24}$$

trong đó: n là số sóng theo phương vòng, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$, t là biến thời gian và ω là tần số dao động riêng của hệ. Bên cạnh đó, M là số số hạng của chuỗi. Các tham số A_i, B_j, C_k, D_r, E_m là các hệ số chưa biết cần xác định. Hàm $\psi_j^p(s)$ là các hàm đa thức cơ sở, với $p = (u, v, w, \varphi, \theta)$. Cách xây dựng các đa thức hàm cơ sở: (a) bước đầu tiên, ta đi xác định đa thức khởi đầu $\psi_1^p(s)$ thỏa mãn điều kiện biên động học tại hai đầu vỏ nón cụt ($s = 0$ và $s = L$), chi tiết các hàm này được liệt kê ở Bảng 2; (b) tiếp theo, các đa thức bậc cao hơn được xác định theo quy trình xây dựng đa thức trực chuẩn Gram–Schmidt như trong [2, 31].

Ta thế các thành phần chuyển vị, biểu thức (20)–(24), vào các biểu thức năng lượng của vỏ nón, ta thu được biểu thức động năng cực đại $\widetilde{T}_{\max}$ và thế năng cực đại $\widetilde{U}_{\max}$. Trên cơ sở đó, phiếm hàm Lagrangian của hệ được xác định như sau:

$$\widetilde{\Pi} = \widetilde{U}_{\max} - \widetilde{T}_{\max} \tag{25}$$

Thực hiện nguyên lý cực tiểu hóa năng lượng đối với các hệ số $(A_i, B_j, \ldots)$, theo cách:

$$\frac{\partial\widetilde{\Pi}}{\partial A_i} = \frac{\partial\widetilde{\Pi}}{\partial B_j} = \frac{\partial\widetilde{\Pi}}{\partial C_k} = \frac{\partial\widetilde{\Pi}}{\partial D_r} = \frac{\partial\widetilde{\Pi}}{\partial E_m} = 0; \quad (i,j,k,r,m) = 1,2,\ldots,M \tag{26}$$

Cuối cùng, ta thu được phương trình chuyển động của vỏ nón có dạng:

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{27}$$

trong đó $\mathbf{K}$ và $\mathbf{M}$ là các ma trận độ cứng và khối lượng tổng thể của hệ; và $\mathbf{Q} = \{A_1, A_2, \ldots, A_M, \ldots, E_1, E_2, \ldots, E_M\}^T$ là véc tơ hệ số của chuyển vị. Sau khi giải bài toán trị riêng (27), ta sẽ tìm được tần số dao động riêng ω và dạng dao động tương ứng của kết cấu vỏ nón.

Bảng 2. Các đa thức khởi đầu $\psi_1^p(s)$ theo quy trình xây dựng đa thức Gram–Schmidt

Điều kiện biên	Điều kiện biên động học	Đa thức khởi đầu $\psi_1^p(s)$
CC	$s=0$: $u=v=w=\varphi_s=\varphi_\theta=0$; $s=L$: $u=v=w=\varphi_s=\varphi_\theta=0$;	$\psi_1^{(u,v,w,\varphi,\theta)}=\dfrac{s}{L}\left(1-\dfrac{s}{L}\right)$
SS	$s=0$: $v=w=\varphi_\theta=0$; $s=L$: $v=w=\varphi_\theta=0$;	$\psi_1^u=\psi_1^\varphi=1$; $\psi_1^v=\psi_1^w=\psi_1^\theta=\dfrac{s}{L}\left(1-\dfrac{s}{L}\right)$
CS	$s=0$: $u=v=w=\varphi_s=\varphi_\theta=0$; $s=L$: $v=w=\varphi_\theta=0$;	$\psi_1^u=\psi_1^\varphi=\dfrac{s}{L}$; $\psi_1^v=\psi_1^w=\psi_1^\theta=\dfrac{s}{L}\left(1-\dfrac{s}{L}\right)$
SC	$s=0$: $v=w=\varphi_\theta=0$; $s=L$: $u=v=w=\varphi_s=\varphi_\theta=0$;	$\psi_1^u=\psi_1^\varphi=1-\dfrac{s}{L}$; $\psi_1^v=\psi_1^w=\psi_1^\theta=\dfrac{s}{L}\left(1-\dfrac{s}{L}\right)$
CF	$s=0$: $u=v=w=\varphi_s=\varphi_\theta=0$; $s=L$: $u,v,w,\varphi_s,\varphi_\theta\neq 0$;	$\psi_1^{(u,v,w,\varphi,\theta)}=\dfrac{s}{L}$
FC	$s=0$: $u,v,w,\varphi_s,\varphi_\theta\neq 0$; $s=L$: $u=v=w=\varphi_s=\varphi_\theta=0$;	$\psi_1^{(u,v,w,\varphi,\theta)}=1-\dfrac{s}{L}$

4. Kết quả số

Trong các phần kết quả số, để thuận tiện, tần số dao động riêng không thứ nguyên được sử dụng chung trong bài báo như sau:

$$\bar{\Omega}=\omega R_2\sqrt{\frac{(1-\nu_s^2)\rho_s}{E_s}} \tag{28}$$

Các phần kết quả số tiếp theo sẽ trình bày gồm hai phần chính: đánh giá sự hội tụ và kiểm chứng kết quả (mục 4.1), và khảo sát các tham số (mục 4.2).

Bảng 3. Khảo sát hội tụ của tần số dao động riêng $\bar{\Omega}$ của vỏ nón cụt kín vật liệu TPMS C3-P ($\alpha=45°$, $h/R_2=0{,}01$, $L\sin\alpha/R_2=0{,}25$)

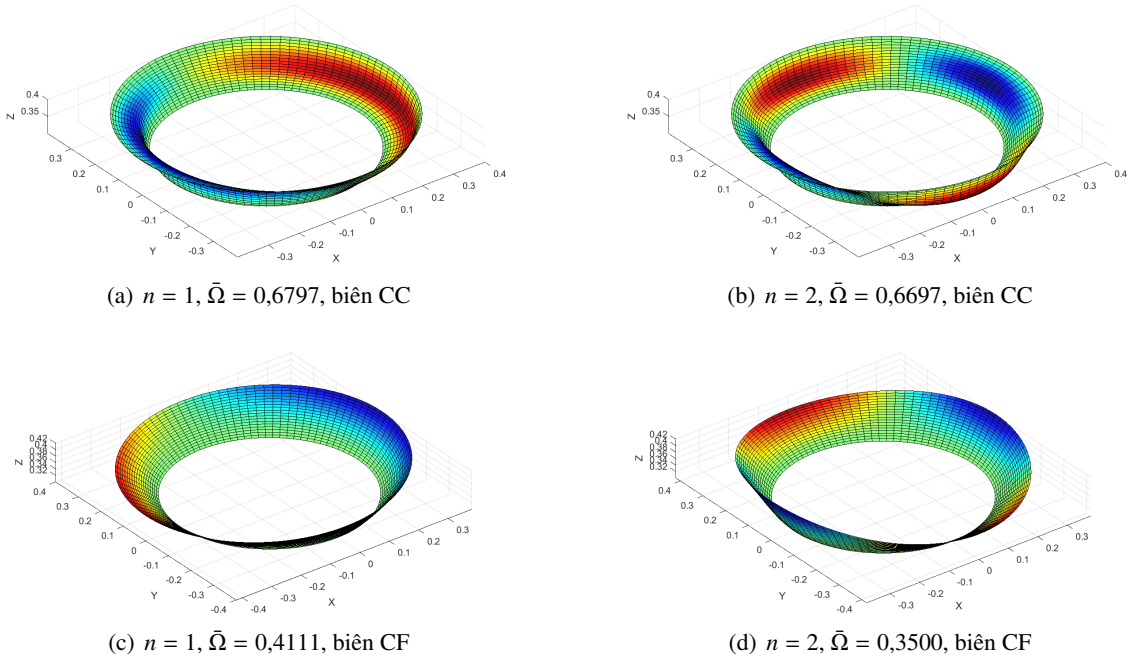
Điều kiện biên		M						
	n	2	4	6	8	10	12	14
CC	1	2,1482	0,6807	0,6797	0,6797	0,6797	0,6797	0,6797
	2	2,1430	0,6706	0,6697	0,6697	0,6697	0,6697	0,6697
	3	2,1365	0,6580	0,6573	0,6573	0,6573	0,6573	0,6573
	4	2,1308	0,6473	0,6469	0,6469	0,6469	0,6469	0,6469
	5	2,1270	0,6422	0,6419	0,6419	0,6419	0,6419	0,6419
CF	1	0,4164	0,4111	0,4111	0,4111	0,4111	0,4111	0,4111
	2	0,3630	0,3502	0,3500	0,3500	0,3500	0,3500	0,3500
	3	0,3135	0,2916	0,2912	0,2912	0,2912	0,2912	0,2912
	4	0,2775	0,2481	0,2475	0,2475	0,2475	0,2475	0,2475
	5	0,2564	0,2225	0,2219	0,2219	0,2218	0,2218	0,2218

4.1. Đánh giá sự hội tụ và kiểm chứng kết quả

a. Đánh giá sự hội tụ của kết quả số

Trong phần này, trước khi thực hiện các khảo sát số, độ hội tụ của lời giải Rayleigh–Ritz được đánh giá thông qua việc tăng dần số số hạng M của chuỗi. Cụ thể, ta cho M tăng dần từ 2 lên đến 16, trong khi các tham số khác lại được giữ nguyên. Vỏ nón cụt kín sử dụng vật liệu có cấu trúc TPMS kiểu P (Primitive) với mật độ phân bố khối lượng dạng C3 của mật độ khối lượng tương đối, nửa góc ở đỉnh nón $\alpha = 45^\circ$, tỉ số $h/R_2 = 0{,}01$, tỷ số $L\sin\alpha/R_2 = 0{,}25$ và các điều kiện biên CC và CF được xét. Vật liệu nền sử dụng là đồng (Cu) với các tham số là $E_s = 130\,\text{GPa}$, $\nu_s = 0{,}34$, $\rho_s = 8960\,\text{kg/m}^3$. Kết quả tần số dao động riêng $\left(\bar{\Omega} = \omega R_2\sqrt{(1-\nu_s^2)\rho_s/E_s}\right)$ của năm mode dao động $(n = 1, 2, \ldots, 5)$ ứng với từng giá trị M được liệt kê trong Bảng 3. Kết quả cho thấy nghiệm hội tụ rõ ràng khi $M \geq 6$, với sự thay đổi giữa hai bước tăng M liên tiếp không đáng kể. Tuy nhiên để đảm bảo sự ổn định của kết quả, $M = 12$ được chọn thống nhất cho toàn bộ các khảo sát khác trong nghiên cứu này.

Để minh họa, một số dạng dao động của vỏ nón cụt kín TPMS C3-P tương ứng với các điều kiện biên CC và CF cho các trường hợp $n = 1$ và 2 (ứng với các kết quả tần số dao động ở Bảng 3, và $M = 12$) được thể hiện như trên Hình 4.



(a) $n = 1$, $\bar{\Omega} = 0{,}6797$, biên CC

(b) $n = 2$, $\bar{\Omega} = 0{,}6697$, biên CC

(c) $n = 1$, $\bar{\Omega} = 0{,}4111$, biên CF

(d) $n = 2$, $\bar{\Omega} = 0{,}3500$, biên CF

Hình 4. Một số dạng dao động của vỏ nón cụt kín TPMS C3-P

b. Kiểm chứng tần số dao động riêng của vỏ nón cụt với các điều kiện biên khác nhau

Để kiểm chứng độ tin cậy của mô hình, kết quả tần số dao động riêng không thứ nguyên $\bar{\Omega}$ của kết cấu vỏ nón cụt đẳng hướng được so sánh với kết quả công bố của Irie và cs. [32], kết quả so sánh được liệt kê ở Bảng 4. Trong đó, kết cấu vỏ nón cụt sử dụng vật liệu đẳng hướng, hệ số Poisson $\nu = 0{,}3$, kích thước hình học có tỉ số $h/R_2 = 0{,}01$, và các trường hợp nửa góc ở đỉnh nón $\alpha = 45^\circ$ và 60°, và tỷ số $p^* = L\sin\alpha/R_2 = 0{,}25$ và 0,5 được xét. Điều kiện biên ngàm–ngàm (CC) và gối tựa đơn (SS) ở hai đầu vỏ nón cụt được đánh giá và n trong dải $1 \leq n \leq 4$ được khảo sát. Kết quả ở Bảng 4 cho thấy sai khác giữa hai mô hình là không đáng kể ở hầu hết các dạng/mode dao động khác nhau và điều

kiện biên khác nhau. Sai khác ở hầu hết các trường hợp so sánh là nhỏ hơn 0,2% (sai số lớn nhất khi $n = 4$). Sai khác ở đây chủ yếu bắt nguồn từ sự khác biệt giữa lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) được sử dụng trong nghiên cứu này và lý thuyết vỏ mỏng cổ điển được dùng trong tài liệu [32] ở các tần số bậc cao.

Bảng 4. Các tần số dao động riêng, $\bar{\Omega} = \omega R_2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$, ứng với từng giá trị n, so sánh với kết quả của Irie và cs. [32]

Điều kiện biên và tham số p^*	n	Nửa góc ở đỉnh nón cụt α			
		$\alpha = 45°$		$\alpha = 60°$	
		Irie và cs. [32]	Bài báo	Irie và cs. [32]	Bài báo
SS, $p^* = 0{,}25$	1	0,5255	0,5252	0,4754	0,4748
	2	0,6879	0,6875	0,5722	0,5715
	3	0,6973	0,6968	0,6001	0,5993
	4	0,6664	0,6658	0,6054	0,6044
CC, $p^* = 0{,}5$	1	0,8120	0,8117	0,6316	0,6313
	2	0,6696	0,6694	0,5523	0,5520
	3	0,5430	0,5426	0,4785	0,4780
	4	0,4570	0,4563	0,4298	0,4290

c. Kiểm chứng tần số dao động riêng của vỏ nón cụt TPMS

Vì chưa có công bố nào về phân tích dao động kết cấu vỏ nón cụt làm bằng vật liệu có cấu trúc TPMS. Do vậy trong mục này, tần số dao động riêng của vỏ nón cụt TPMS (ở trường hợp suy biến gần đúng về kết cấu vỏ trụ tròn), được so sánh với tần số dao động riêng của vỏ trụ tròn TPMS của Nguyễn [16]. Kết quả so sánh được thể hiện ở Bảng 5. Cấu hình khảo sát: vật liệu kim loại có cấu trúc TPMS loại IWP với mật độ phân bố C3 ($\rho_{\min} = 0{,}25$; $\rho_{\max} = 1$; $k = 3{,}943$), vật liệu nền là Đồng ($E_s = 130\,\text{GPa}$, $\nu_s = 0{,}34$, $\rho_s = 8960\,\text{kg/m}^3$), biên tựa đơn (SS) hai đầu vỏ nón, $R_1 \approx R_2 = R$, $\alpha = 10^{-4}$ rad (rất bé), $L/R = 3$, $R = 1$, tần số không thứ nguyên $\bar{\Omega} = \omega R \sqrt{(1-\nu_s^2)\rho_s/E_s}$. Ta thấy, sai khác giữa kết quả tần số dao động riêng của hai mô hình là bé hơn 0,04% trên toàn bộ 20 tổ hợp

Bảng 5. So sánh tần số dao động riêng, $\bar{\Omega} = \omega R \sqrt{(1-\nu_s^2)\rho_s/E_s}$, tương ứng với các tỷ số h/R và n khác nhau

h/R	Nguồn	n				
		1	2	3	4	5
0,010	Nguyễn [16]	0,25886	0,12966	0,07452	0,06066	0,07310
	Bài báo	0,25893	0,12970	0,07455	0,06066	0,07312
0,020	Nguyễn [16]	0,25889	0,13075	0,08470	0,09519	0,13704
	Bài báo	0,25896	0,13079	0,08473	0,09522	0,13708
0,050	Nguyễn [16]	0,25913	0,13807	0,13540	0,21384	0,33018
	Bài báo	0,25920	0,13812	0,13545	0,21391	0,33029
0,100	Nguyễn [16]	0,25997	0,16082	0,23602	0,40457	0,62092
	Bài báo	0,26004	0,16087	0,23610	0,40470	0,62112

$(h/R, n)$, cho thấy sự phù hợp rất tốt và xác nhận độ tin cậy của mô hình khi vỏ nón cụt TPMS. Sai khác ở đây là do mô hình vỏ nón cụt TPMS với nửa góc ở đỉnh nón (α) rất bé thì vẫn không thể hoàn toàn đồng nhất với mô hình vỏ trụ tròn TPMS.

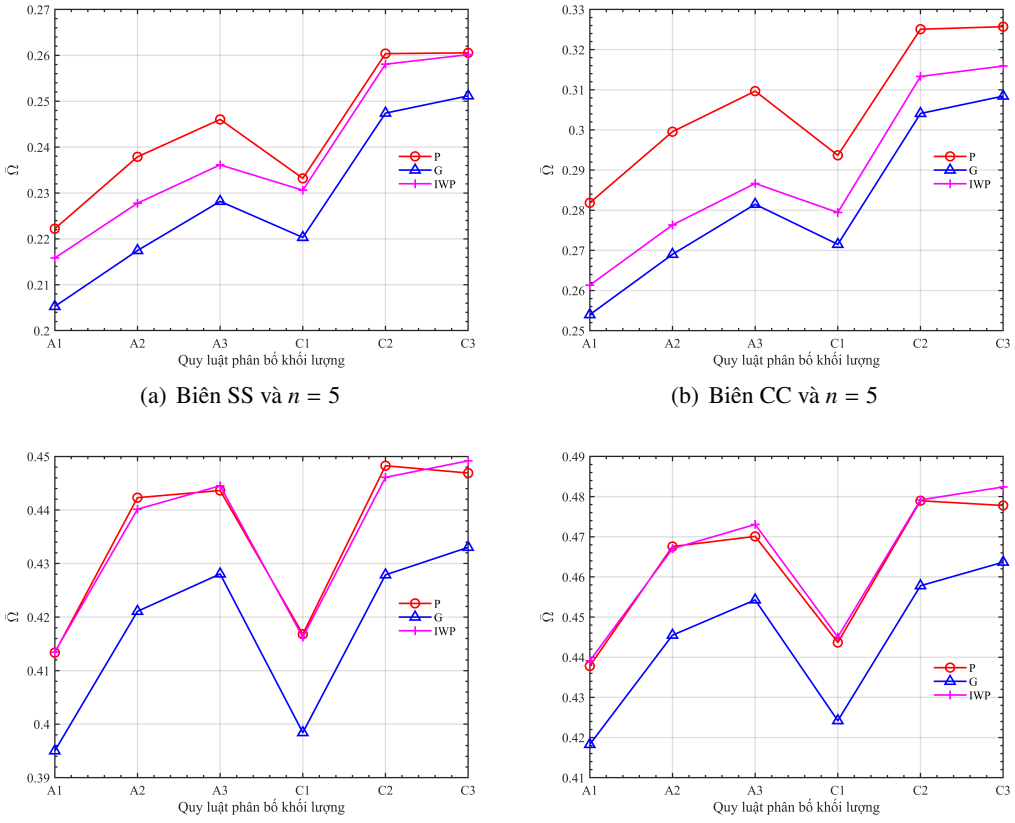
Như vậy, có thể thấy rằng mô hình lý thuyết và phương pháp giải cho vỏ nón cụt làm bằng TPMS được trình bày trong bài báo là có độ tin cậy cao. Trên cơ sở đó, lời giải và chương trình tính toán tương ứng lập trên nền Matlab sẽ được dùng để khảo sát các ảnh hưởng của các tham số đến tần số dao động riêng của vỏ nón cụt TPMS.

4.2. Khảo sát các tham số

Trong các khảo sát số dưới đây, mô hình vật liệu kim loại có cấu trúc bề mặt tối thiểu tuần hoàn ba chiều TPMS với vật liệu nền là Đồng (Cu) có các tham số vật liệu đầu vào là $E_s = 130\,\text{GPa}$, $\nu_s = 0{,}34$, $\rho_s = 8960\,\text{kg/m}^3$, được sử dụng trong phân tích và đánh giá. Trừ khi có các phát biểu khác, các tham số hình học vỏ nón sau đây được sử dụng trong các phân tích: $\alpha = 45°$, $h = 0{,}004\,\text{m}$, $h/R_2 = 0{,}01$, $R_1/R_2 = 0{,}5$ ($L = 0{,}28284\,\text{m}$).

a. Ảnh hưởng của cấu trúc vật liệu TPMS và quy luật phân bố khối lượng

Trong khảo sát này, ảnh hưởng cấu trúc vật liệu TPMS và quy luật phân bố khối lượng (mật độ khối lượng tương đối – liên quan đến độ xốp) đến tần số dao động riêng của vỏ nón cụt TPMS được trình bày trên Hình 5. Các tham số kích thước của vỏ nón cụt được giữ cố định như phát biểu ban đầu của phần khảo sát số (mục 4.2).



(a) Biên SS và $n = 5$ (b) Biên CC và $n = 5$

(c) Biên SS và $n = 2$ (d) Biên CC và $n = 2$

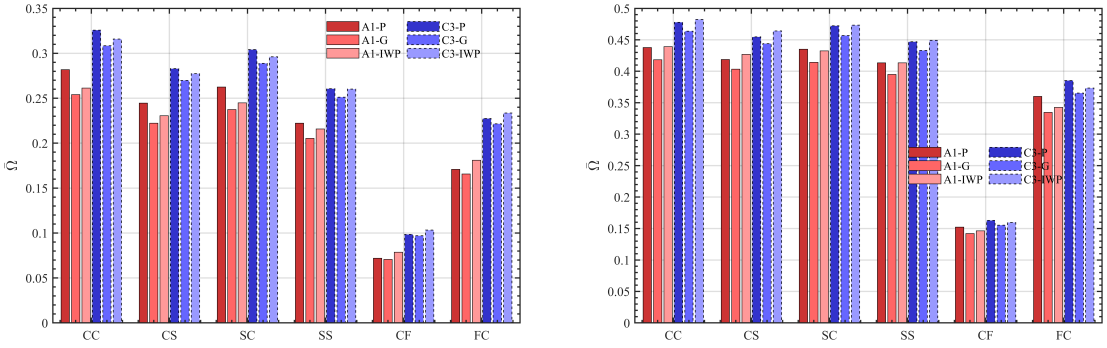
Hình 5. Tần số dao động riêng $\bar{\Omega}$ của kết cấu vỏ nón cụt vật liệu TPMS

Từ kết quả khảo sát và Hình 5, ta nhận thấy kết cấu vỏ nón TPMS với cấu trúc G là cho tần số dao động riêng thấp nhất (kém hiệu quả nhất), trong khi đó, mặc dù có phụ thuộc vào dạng mode dao động, tuy vậy vỏ nón TPMS với các cấu trúc P và IWP thay nhau dẫn đầu (các cấu trúc hiệu quả hơn). Điều này phản ánh độ cứng của vỏ TPMS với cấu trúc P, IWP ưu việt hơn trong việc bài toán dao động riêng so với cấu trúc G. Xu hướng khác nhau về tần số dao động riêng của vỏ nón cụt TPMS với các dạng cấu trúc P, G và IWP chủ yếu liên quan đến sự khác biệt về các tính chất cơ học hiệu dụng và cơ chế biến dạng của từng cấu trúc tại cùng mật độ tương đối, qua đó dẫn đến sự khác biệt về độ cứng kết cấu và tần số dao động riêng.

Ta cũng thấy kết cấu vỏ nón TPMS với quy luật phân bố khối lượng dạng đối xứng (nhóm C) thường cho tần số dao động riêng cao hơn so với dạng bất đối xứng (nhóm A) tương ứng, đặc biệt là mô hình phân bố khối lượng đối xứng phi tuyến C3 tỏ ra vượt trội hơn các trường hợp khảo sát, và theo sau khá sát nó là quy luật phân bố đối xứng phi tuyến C2, còn A1 là thấp nhất. Lý do ở đây là việc phân bố khối lượng dạng đối xứng phi tuyến nói chung và phân bố dạng C3 nói riêng đã đẩy phần lớn mật độ vật liệu đặc chắc ra xa bề mặt trung hòa, hình thành một phân bố cấu trúc hợp lý nhất (giống kết cấu sandwich). Ngược lại, phân bố bất đối xứng A1 (tuyến tính) thể hiện là cấu trúc phân bố khối lượng không hợp lý, và gây ra hiệu ứng làm mềm cấu trúc tổng thể của vỏ (tần số nhỏ nhất) trong các trường hợp khảo sát (Hình 5).

b. Ảnh hưởng của điều kiện biên

Trong phần này, ảnh hưởng của các điều kiện biên (bao gồm CC, CS, SC, SS, CF, FC) đến tần số dao động riêng của vỏ nón TPMS với mật độ khối lượng phân bố dạng A1 (với ba kiểu A1-P, A1-G, A1-IWP) và C3 (với ba kiểu C3-P, C3-G, C3-IWP) được trình bày như Hình 6. Các tham số kích thước của vỏ nón cụt được giữ cố định.



(a) $n = 5$ (b) $n = 2$

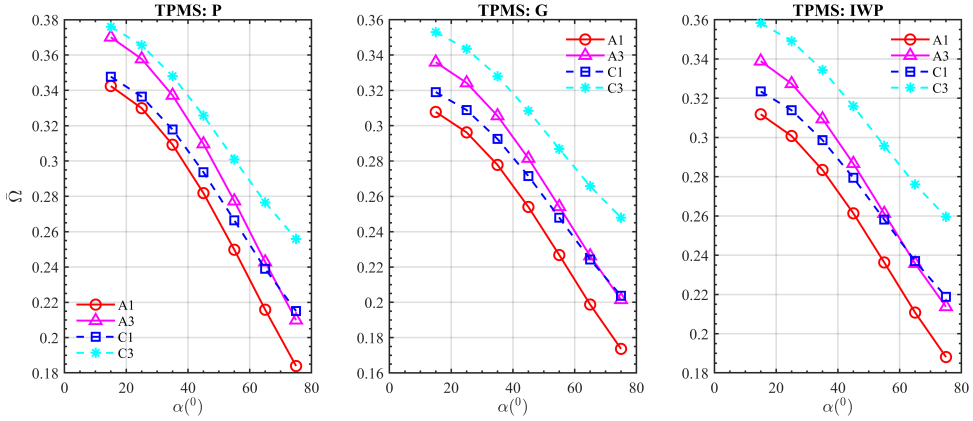
Hình 6. Tần số dao động riêng $\bar{\Omega}$ của kết cấu vỏ nón cụt TPMS với các điều kiện biên khác nhau (So sánh phân bố A1 và C3)

Từ kết quả khảo sát ta thấy rằng điều kiện biên ảnh hưởng đáng kể đến kết quả tần số dao động riêng của kết cấu. Kết cấu vỏ nón cụt TPMS với điều kiện biên CC cho tần số dao động cao nhất, điều kiện biên CF cho tần số dao động thấp nhất trong các trường hợp khảo sát. Đặc biệt, kết cấu vỏ TPMS với điều kiện biên SC và FC (ngàm tại đáy lớn) thường cho tần số dao động riêng cao hơn điều kiện biên CS và CF (ngàm tại đáy nhỏ). Như vậy, ngàm tại đáy lớn của vỏ nón sẽ tăng độ cứng tổng thể so với việc ngàm tại đáy nhỏ của kết cấu vỏ nón cụt TPMS.

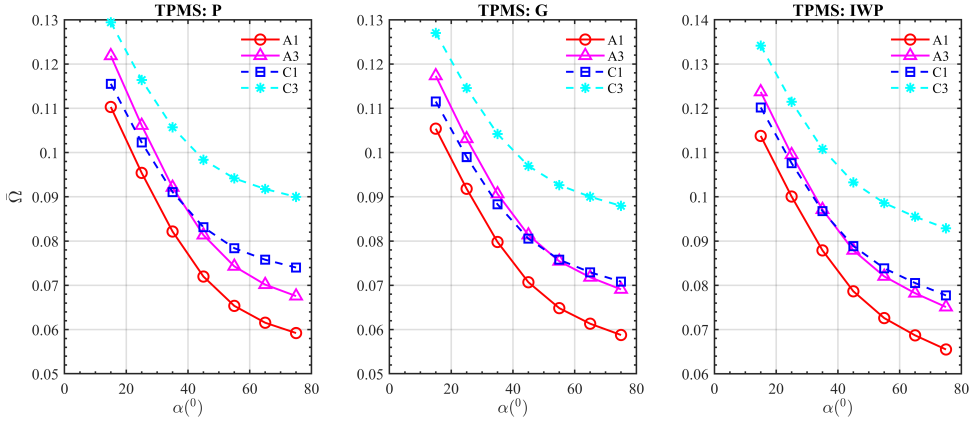
c. Ảnh hưởng của tham số góc α của vỏ nón

Trong phân tích này, ảnh hưởng tham số góc α đến tần số dao động riêng không thứ nguyên ($\bar{\Omega}$) của các vỏ nón TPMS được khảo sát. Khi khảo sát, góc α thay đổi trong khoảng 15° đến 75°, bán kính

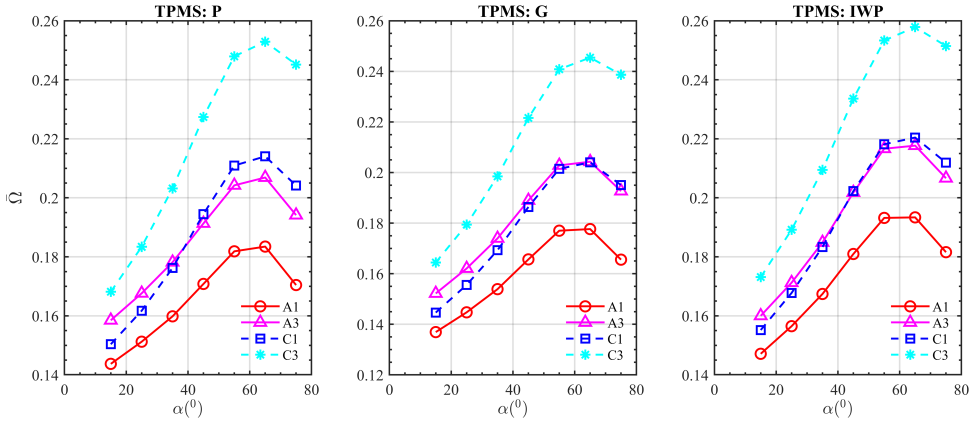
R_1 sẽ là tham số phụ thuộc. Các tham số hình học vỏ $R_2 = 0{,}4\,\text{m}$, $h = 0{,}004\,\text{m}$, và $L = 0{,}28284\,\text{m}$ được giữ cố định và α thay đổi, ta thấy rằng điều kiện hình học $R_1 = R_2 - L\sin\alpha > 0$ luôn được thỏa mãn trong toàn dải $\alpha = 15°$–$75°$, do đó các kết quả của tần số dao động của kết cấu với dải α như trên đều đảm bảo tính hợp lệ về mặt hình học vỏ.



(a) Biên CC và $n = 5$



(b) Biên CF và $n = 5$



(c) Biên FC và $n = 5$

Hình 7. Ảnh hưởng của góc (α) đến tần số dao động riêng $\bar{\Omega}$ của ba loại vỏ nón TPMS

Kết quả khảo sát cho thấy khi tăng góc α thì tần số dao động riêng của vỏ nón TPMS biên CC và CF giảm khá mạnh như thể hiện trên Hình 7(a) và (b); tuy nhiên, đối với vỏ nón TPMS biên FC (ngàm ở đáy lớn) thì tần số dao động riêng lại tăng đến giá trị cực trị sau đó giảm dần như thể hiện trên Hình 7(c). Rõ ràng cách bố trí điều kiện biên và góc α ảnh hưởng mạnh đến tần số dao động riêng của kết cấu và xuất hiện điểm tối ưu của góc α cần lưu ý. Ngoài ra, như dự đoán, các cấu trúc P và IWP vẫn hiệu quả hơn cấu trúc G, phân bố khối lượng dạng C3 vẫn cho tần số dao động riêng cao hơn ở hầu hết các trường hợp.

5. Kết luận

Nghiên cứu này đã phân tích dao động riêng của vỏ nón cụt kín làm bằng vật liệu có bề mặt tối thiểu tuần hoàn ba chiều TPMS; ba cấu trúc G, P, IWP và một số quy luật phân bố của mật độ khối lượng tương đối được xét. Trong đó, phương trình chủ đạo của bài toán được thiết lập dựa vào lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và phương pháp Rayleigh–Ritz. Nghiên cứu đã rút ra một số kết luận đáng chú ý sau:

- Kết cấu TPMS với cấu trúc dạng P và IWP của vỏ nón có tần số dao động riêng cao nhất, trong khi cấu trúc dạng G thường cho tần số dao động riêng thấp nhất.

- Nhìn chung kết cấu TPMS với quy luật phân bố mật độ khối lượng C3 (lõi xốp nhẹ và tiến dần về hai lớp bề mặt đặc chắc – tương tự cấu trúc sandwich) thường cung cấp độ cứng vượt trội nhất trong các trường hợp được khảo sát.

- Với vỏ nón đang xét, việc ngàm kết cấu tại đáy lớn (các biên FC, SC) mang lại độ cứng tổng thể lớn hơn nhiều so với việc ngàm tại đáy nhỏ (các biên CF, CS).

- Dạng hình học vỏ như nửa góc ở đỉnh nón cụt (α) ảnh hưởng mạnh đến tần số dao động riêng, đặc biệt cách bố trí điều kiện biên (ngàm ở đáy lớn) làm thay đổi quy luật biến thiên chung và xuất hiện điểm tối ưu của góc α cần lưu ý.

Tuyên bố về việc sử dụng trí tuệ nhân tạo tạo sinh và các công nghệ hỗ trợ bởi AI

Trong quá trình chuẩn bị bản thảo, các tác giả đã sử dụng ChatGPT (OpenAI) nhằm rà soát chính tả. Các tác giả đã kiểm tra và chỉnh sửa nội dung và chịu hoàn toàn trách nhiệm về tính chính xác, tính nguyên bản và tính toàn vẹn của bài báo.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyen-Xuan, H., Tran, K. Q., Thai, C. H., Lee, J. (2023). Modelling of functionally graded triply periodic minimal surface (FG-TPMS) plates. *Composite Structures*, 315:116981.

[2] Nguyen, V. L., Rungamornrat, J. (2025). Free vibration analysis of rotating functionally graded triply periodic minimal surface cylindrical shells. *Materials and Emerging Technologies for Sustainability*, 1 (3):2550013.

[3] Gu, D., Wu, S., Xu, Z., Tian, Y., Xie, S., Qi, Z., Zhang, G., Zheng, L., Zhu, B., Pan, B., Wen, B. (2025). A vibration analysis model for carbon nanotube reinforced composite conical shells. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 54(1):2579737.

[4] Zheng, D. (2025). Vibration characteristic analysis of thin-walled conical shells with arbitrary thickness variation and general boundary condition. *Thin-Walled Structures*, 212:113160.

[5] Fu, J., Ding, J., Zhang, L., Qu, S., Song, X., Fu, M. (2023). Development of conformal shell lattices via laser powder bed fusion and unraveling their mechanical responses via modeling and experiments. *Additive Manufacturing*, 62:103406.

[6] Setoodeh, A. R., Tahani, M., Selahi, E. (2012). Transient dynamic and free vibration analysis of functionally graded truncated conical shells with non-uniform thickness subjected to mechanical shock loading. *Composites Part B: Engineering*, 43(5):2161–2171.

[7] Sofiyev, A. H. (2012). The non-linear vibration of FGM truncated conical shells. *Composite Structures*, 94(7):2237–2245.

[8] Deniz, A. (2013). Non-linear stability analysis of truncated conical shell with functionally graded composite coatings in the finite deflection. *Composites Part B: Engineering*, 51:318–326.
[9] Jin, G., Ma, X., Shi, S., Ye, T., Liu, Z. (2014). A modified Fourier series solution for vibration analysis of truncated conical shells with general boundary conditions. *Applied Acoustics*, 85:82–96.
[10] Zarei, M., Rahimi, G. H., Hemmatnezhad, M. (2020). Free vibrational characteristics of grid-stiffened truncated composite conical shells. *Aerospace Science and Technology*, 99:105717.
[11] Nejati, M., Asanjarani, A., Dimitri, R., Tornabene, F. (2017). Static and free vibration analysis of functionally graded conical shells reinforced by carbon nanotubes. *International Journal of Mechanical Sciences*, 130:383–398.
[12] Nguyen, T. N., Wattanasakulpong, N., Nguyen, N. P., Fakharian, P., Eiadtrong, S. (2024). Isogeometric analysis of functionally graded triply periodic minimal surface shells. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 32(21):5447–5460.
[13] Hoai, L., Tu, P. H., Tran, V. K., Hue, N. T. (2025). An isogeometric approach for vibration characteristics analysis of functionally graded triply periodic minimal sandwich curved-doubly shell integrated with magneto-electro surface layers subjected to low-velocity impact load. *Defence Technology*, 50:101–125.
[14] Dong, D. T., Minh, T. Q., Tu, B. T., Tran, K. Q., Nguyen-Xuan, H. (2024). Nonlinear thermo-mechanical static stability analysis of FG-TPMS shallow spherical shells. *Thin-Walled Structures*, 205:112343.
[15] Duong, T. V., Nguyen, K. D., Tran, K. Q. (2025). Natural vibrations of variable-thickness truncated spherical shells with functionally graded bio-inspired anisotropic TPMS materials using 3D NURBS-based discretization method. *Materials and Emerging Technologies for Sustainability*, 1(4):2550016.
[16] Nguyen, V. L. (2026). Free vibration of functionally graded triply periodic minimal surface cylindrical shells with elastic boundary constraints. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 50(3):755–776.
[17] Pham, H.-A., Tran, H.-Q., Tran, M.-T., Nguyen, V.-L., Huong, Q.-T. (2022). Free vibration analysis and optimization of doubly-curved stiffened sandwich shells with functionally graded skins and auxetic honeycomb core layer. *Thin-Walled Structures*, 179:109571.
[18] Dung, D. V., Anh, L. T. N., Hoa, L. K. (2016). Analytical investigation on the free vibration behavior of rotating FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal eccentric stiffeners. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 25(1):32–46.
[19] Tornabene, F. (2009). Free vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(37–40):2911–2935.
[20] Su, Z., Jin, G., Shi, S., Ye, T., Jia, X. (2014). A unified solution for vibration analysis of functionally graded cylindrical, conical shells and annular plates with general boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 80:62–80.
[21] Shakouri, M. (2019). Free vibration analysis of functionally graded rotating conical shells in thermal environment. *Composites Part B: Engineering*, 163:574–584.
[22] Rungamornrat, J., Nguyen, V.-L., Tran, M.-T. (2025). Static bending and buckling analyses of GPL-FGM microplates placed on Winkler-Pasternak elastic foundation. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (JSTCE) - HUCE*, 19(4):29–45.
[23] Binh, C. T. (2025). Buckling analysis of GPL-reinforced FGM microplates using Pb-2 Ritz functions. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (JSTCE) - HUCE*, 19(2):119–132.
[24] Nguyen-Thanh, N., Valizadeh, N., Nguyen, M., Nguyen-Xuan, H., Zhuang, X., Areias, P., Zi, G., Bazilevs, Y., De Lorenzis, L., Rabczuk, T. (2015). An extended isogeometric thin shell analysis based on Kirchhoff–Love theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 284:265–291.
[25] Cuong-Le, T., Nguyen, K. D., Nguyen-Trong, N., Khatir, S., Nguyen-Xuan, H., Abdel-Wahab, M. (2021). A three-dimensional solution for free vibration and buckling of annular plate, conical, cylinder and cylindrical shell of FG porous-cellular materials using IGA. *Composite Structures*, 259:113216.
[26] Quoc, T. H., Tu, T. M., Tham, V. V. (2021). Free vibration and dynamic response of sandwich composite plates with auxetic honeycomb core. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - HUCE*, 15(4):1–14.

[27] Kiani, Y. (2017). Free vibration of FG-CNT reinforced composite spherical shell panels using Gram-Schmidt shape functions. *Composite Structures*, 159:368–381.

[28] Vescovini, R., Fantuzzi, N. (2023). Free vibrations of conical shells via Ritz method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 241:107925.

[29] Do, N. T., Tran, K. Q., Nguyen-Xuan, H., Luong, V. H. (2026). Dynamic behavior of FG-TPMS plates on a viscoelastic foundation subjected to moving loads using moving element method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 26(10):2650071.

[30] Lu, L., Gao, C., Xu, J., Li, H., Zheng, J. (2024). Dynamic analysis of stepped functionally graded conical shells with general boundary restraints using Jacobi polynomials-Ritz method. *Thin-Walled Structures*, 204:112304.

[31] Nguyen, V.-L., Tran, M.-T., Limkatanyu, S., Mohammad-Sedighi, H., Rungamornrat, J. (2022). Reddy's third-order shear deformation shell theory for free vibration analysis of rotating stiffened advanced nanocomposite toroidal shell segments in thermal environments. *Acta Mechanica*, 233(11):4659–4684.

[32] Irie, T., Yamada, G., Tanaka, K. (1984). Natural frequencies of truncated conical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 92(3):447–453.