Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, ĐHXDHN, 2026, 20 (4V): 1–14

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA TẤM BẰNG VẬT LIỆU ÁP ĐIỆN CƠ TÍNH BIẾN THIÊN CÓ VI BỌT RỖNG THEO TIẾP CẬN BÁN GIẢI TÍCH DỰA TRÊN LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC NHẤT ĐƠN GIẢN

Chu Thanh Bình[a], Chiêm Đặng Tứ Quốc[a], Trần Minh Tú[a], Nguyễn Văn Long[a,*]

[a]*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, số 55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 19/7/2026, Sửa xong 03/9/2026, Chấp nhận đăng 03/9/2026

Tóm tắt

Bài báo sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản với bốn ẩn chuyển vị để phân tích dao động riêng của tấm chữ nhật bằng vật liệu áp điện, cơ tính biến thiên, có vi bọt rỗng (piezoelectric functionally graded plates with porosities – Piezo-FGPo) và đặt trên nền đàn hồi. Các tính chất hiệu dụng của vật liệu Piezo-FGPo được giả thiết biến thiên dọc chiều dày theo quy luật hàm lũy thừa hiệu chỉnh, trong đó ảnh hưởng của độ rỗng với hai dạng: phân bố đều và phân bố không đều đối xứng được xét đến. Các phương trình chuyển động của tấm Piezo-FGPo trên nền đàn hồi dưới tác dụng của trường cơ–điện được thiết lập theo phương pháp Ritz. Kết quả được so sánh với các công bố trên các nguồn tài liệu mở để kiểm chứng độ tin cậy của mô hình đề xuất. Tiếp theo, ảnh hưởng của điện thế áp đặt, chỉ số tỷ lệ thể tích các vật liệu thành phần, dạng phân bố và hệ số độ rỗng, cũng như các tham số hình học và điều kiện biên đến tần số dao động riêng của tấm Piezo-FGPo được khảo sát và thảo luận chi tiết. Mô hình và các kết quả thu được có tiềm năng ứng dụng trong thiết kế cảm biến, hệ thống thu hồi năng lượng, điều khiển dao động, cũng như giám sát sức khỏe kết cấu của các kết cấu thông minh.

Từ khoá: dao động riêng; vật liệu áp điện cơ tính biến thiên có vi bọt rỗng; lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản; phương pháp Ritz; nền đàn hồi.

FREE VIBRATION ANALYSIS OF PIEZOELECTRIC FUNCTIONALLY GRADED PLATES WITH POROSITIES USING SEMI-ANALYTICAL SOLUTION BASED ON SIMPLE FIRST-ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY

Abstract

This paper presents a semi-analytical solution based on the four-variable simple first-order shear deformation theory to analyze the free vibration of rectangular piezoelectric functionally graded material plates with porosities (Piezo-FGPo) resting on an elastic foundation. The effective material properties are assumed to vary continuously through the plate thickness according to a power-law distribution and are modified to account for the presence of porosities with two porosity distribution patterns, namely uniform and symmetric non-uniform distributions. The equations of motion of Piezo-FGPo plate under electromechanical coupling resting on an elastic foundation are derived by using Ritz solution. The obtained results are validated against those reported in previous publications to verify the reliability and accuracy of the proposed model. Consequently, the influence of the applied voltage, volume fraction index, porosity characteristics, geometric dimension, and boundary conditions on the natural frequency of Piezo-FGPo plate is investigated and discussed in detail. The results obtained from the proposed model provide valuable insights into sensor design, energy harvesting, active dynamic control, and structural health monitoring of smart structures.

Keywords: free vibration; functionally graded piezoelectric porous material; simple first-order shear deformation theory; Ritz method; elastic foundation.

https://doi.org/10.31814/stce.huce2026-20(4V)-01 © 2026 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Đặt vấn đề

Vật liệu áp điện được ứng dụng rộng rãi trong các kết cấu thông minh nhờ khả năng chuyển đổi năng lượng cơ–điện thông qua hai hiệu ứng áp điện thuận và nghịch, cho phép chúng hoạt động đồng

*Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* longnv@huce.edu.vn (Long, N. V.)

thời với vai trò cảm biến và kích thích. Các thiết bị áp điện truyền thống thường được chế tạo dưới dạng kết cấu nhiều lớp, trong đó sự liên kết giữa các lớp vật liệu khác nhau hoặc giữa các lớp áp điện có hướng phân cực khác nhau có thể gây ra hiện tượng bong tách và tập trung ứng suất tại bề mặt tiếp giáp, làm suy giảm độ bền và độ tin cậy của kết cấu [1–5].

Nhằm khắc phục những hạn chế của kết cấu áp điện nhiều lớp truyền thống, khái niệm vật liệu có cơ tính biến thiên – FGM đã được mở rộng cho vật liệu áp điện, hình thành nên vật liệu áp điện có cơ tính biến thiên – Piezo-FGM. Với sự biến đổi liên tục của tỷ phần vật liệu thành phần và các đặc tính cơ–điện theo tọa độ không gian, Piezo-FGMs giúp giảm sự gián đoạn vật liệu, hạn chế tập trung ứng suất và nâng cao độ tin cậy của kết cấu áp điện. Vì vậy, ứng xử cơ học của các kết cấu thông minh sử dụng Piezo-FGMs đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu rộng rãi. Trong số đó, Su và cs. [6] đã phân tích các đặc trưng dao động điện–cơ bằng phương pháp Fourier-Ritz, theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT). Trong khi Li và cs. [7] sử dụng phương pháp Rayleigh-Ritz để nghiên cứu về điều khiển dao động chủ động của tấm Piezo-FGM trên cơ sở lý thuyết tấm cổ điển. Trên cơ sở FSDT, kết hợp phương pháp Ritz với phương pháp kích thích giả, Zhou và cs. [8] khảo sát đáp ứng ngẫu nhiên không dừng của tấm Piezo-FGM với các điều kiện biên tổng quát. Kumar và Harsha [9] sử dụng mô hình phần tử hữu hạn (PTHH) cùng với FSDT để phân tích đáp ứng động lực học của tấm Piezo-FGM có xét đến ảnh hưởng của tương tác cơ–nhiệt–điện. Zenkour và Aljadani [10] phân tích ổn định điện–cơ của tấm Piezo-FGM sử dụng dạng nghiệm Navier kết hợp lý thuyết tựa đàn hồi ba chiều (quasi-3D).

Tuy nhiên, trong quá trình chế tạo FGM và Piezo-FGM, sự xuất hiện của các vi lỗ rỗng (porosity – Po) do khuyết tật công nghệ là khó tránh khỏi. Các vi lỗ rỗng này làm thay đổi đáng kể các đặc tính cơ học và cơ–điện của FGPoM và Piezo-FGPoM so với vật liệu hoàn hảo (không có lỗ rỗng), dẫn đến sự suy giảm độ cứng, độ bền và khả năng chịu tải của kết cấu. Vì vậy, việc xem xét ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng và hệ số độ rỗng đến ứng xử của các kết cấu Piezo-FGPo trong những điều kiện làm việc khác nhau là hết sức cần thiết. Trên cơ sở đó, ảnh hưởng của độ rỗng đến ứng xử của các kết cấu Piezo-FGPo đã được quan tâm trong một số nghiên cứu gần đây. Chẳng hạn, Barati và cs. đã sử dụng tiếp cận giải tích khảo sát ứng xử ổn định [11], và dao động điện–cơ [12, 13] của tấm Piezo-FGPo với các điều kiện biên khác nhau, đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Theo hướng tiếp cận số, Nguyen và cs. [14] đã kết hợp phương pháp PTHH đẳng hình học với lý thuyết biến dạng cắt bậc cao – HSDT để phân tích dao động riêng của tấm Piezo-FGPo với các dạng hình học khác nhau. Đối với bài toán động lực học phi tuyến, Wang [15], Wang và Zu [16] đã phân tích dao động phi tuyến cơ–điện bằng phương pháp Galerkin, kết hợp với phương pháp Runge-Kutta bậc bốn, và phương pháp cân bằng điều hòa.

Mặc dù các nghiên cứu về tấm Piezo-FGM/Piezo-FGPo đã đạt được nhiều kết quả quan trọng, phần lớn các mô hình hiện nay vẫn chủ yếu xem xét kết cấu trong điều kiện lý tưởng và chưa phản ánh đầy đủ ảnh hưởng của môi trường làm việc thực tế. Trong nhiều ứng dụng như điều khiển dao động chủ động và kết cấu hàng không vũ trụ, các tấm Piezo-FGPo thường tương tác với các lớp nền đàn hồi, làm thay đổi đáng kể độ cứng hiệu dụng, đặc trưng dao động, ổn định và đáp ứng cơ điện của kết cấu. Do đó, việc đưa ảnh hưởng của nền đàn hồi vào mô hình phân tích nhằm mô tả sát hơn ứng xử thực tế của các kết cấu Piezo-FGPo. Theo hướng tiếp cận này, Harsha và Kumar [17] đã nghiên cứu ảnh hưởng đồng thời của độ rỗng và nền đàn hồi đến tần số dao động và ứng xử ổn định của tấm Piezo-FGPo chịu các điều kiện biên khác nhau. Mở rộng nghiên cứu trên, Kumar và cs. [18] tiếp tục khảo sát ảnh hưởng của nền đàn hồi với một, hai, và ba hệ số nền đến độ võng, ứng suất và tần số dao động riêng của tấm Piezo-FGPo có chiều dày thay đổi dưới tác dụng của tải trọng cơ–nhiệt. Ở một khía cạnh khác của bài toán động lực học, Li và cs. [19] phân tích sự truyền sóng trong tấm nano Piezo-FGPo đặt trên nền đàn nhớt visco-Pasternak. Với tấm sandwich lõi graphene và hai lớp bề

mặt là vật liệu đàn hồi–điện–từ có chứa các vi bọt rỗng trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak, Vũ Văn Thẩm [20] tiến hành xây dựng lời giải Navier để phân tích dao động tự do theo HSDT cải tiến với bốn ẩn chuyển vị.

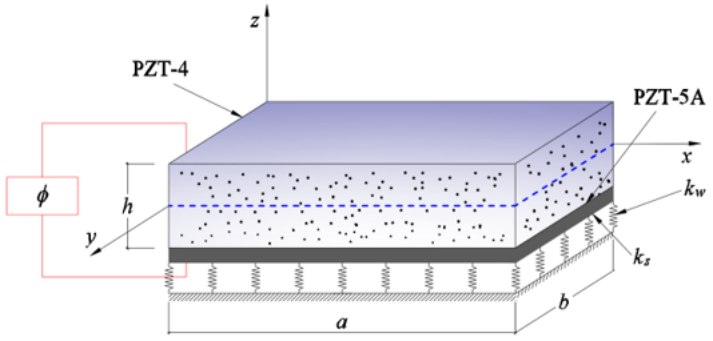
Các nghiên cứu trước đây cho thấy phân tích ứng xử tĩnh và động của tấm Piezo-FGM/Piezo-FGPo đang là một hướng nghiên cứu được quan tâm, với nhiều mô hình lý thuyết và phương pháp tính toán khác nhau. Trong đó, các lý thuyết HSDT có độ chính xác cao và áp dụng được cho cả tấm mỏng và tấm dày, nhưng thường dẫn đến số lượng ẩn chuyển vị lớn và chi phí tính toán cao. Ngược lại, FSDT có ưu điểm về tính đơn giản và hiệu quả tính toán, mặc dù cần sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt. Nhằm nâng cao hiệu quả tính toán, Thai và Choi [21] đã đề xuất lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản (S-FSDT) với bốn ẩn chuyển vị bằng cách phân tích độ võng thành các thành phần do biến dạng uốn và biến dạng cắt ngang. Lý thuyết này sau đó được mở rộng cho các kết cấu tấm FGM [22] và vỏ FGM [23].

Trong nghiên cứu này, phương pháp pb-2 Ritz dựa trên lý thuyết S-FSDT của Thai và Choi được phát triển để phân tích dao động tự do của tấm Piezo-FGPo đặt trên nền đàn hồi với các điều kiện biên khác nhau. Khác với phương pháp Navier bị giới hạn bởi một số điều kiện biên đặc biệt, phương pháp pb-2 Ritz sử dụng các hàm cơ sở đa thức hai chiều cho phép thỏa mãn chính xác điều kiện biên hình học, đồng thời đảm bảo tính hội tụ cao, hiệu quả tính toán và khả năng áp dụng linh hoạt cho các kết cấu tấm không đồng nhất vật liệu. Trong mô hình đề xuất, vật liệu Piezo-FGPo có tính chất biến thiên theo chiều dày được mô tả theo quy luật hàm lũy thừa với hai dạng phân bố độ rỗng phổ biến (đều và không đều đối xứng). Dựa trên nguyên lý Hamilton, phương trình chuyển động của tấm được thiết lập và tần số dao động tự do được xác định thông qua bài toán trị riêng. Kết quả nghiên cứu cung cấp cơ sở khoa học cho việc phân tích, thiết kế và tối ưu hóa các kết cấu thông minh sử dụng vật liệu áp điện.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Tấm áp điện với cơ tính biến thiên có vi bọt rỗng

Xét tấm chữ nhật làm từ vật liệu áp điện với cơ tính biến thiên chứa vi bọt rỗng (Piezo-FGPo) có kích thước các cạnh $a \times b$ và chiều dày h. Tấm được đặt trên nền đàn hồi Pasternak (Hình 1) với các hệ số độ cứng nền: k_w là hệ số độ cứng nền Winkler và k_s là hệ số độ cứng cắt.



Hình 1. Tấm Piezo-FGPo đặt trên nền đàn hồi Pasternak

Tấm Piezo-FGPo được cấu thành từ hai pha vật liệu là PZT-4 ở mặt trên và PZT-5A ở mặt dưới. Phân bố lỗ rỗng trong tấm thay đổi theo ba quy luật như sau [24]:

$$P(z) = (P_t - P_d)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p + P_d - (P_t + P_d)\frac{\psi(z)}{2} \tag{1}$$

trong đó: $P(z)$ là các thông số vật liệu của tấm Piezo-FGPo; chỉ số dưới t và d lần lượt là ký hiệu cho loại vật liệu ở mặt trên và mặt dưới của tấm, p là chỉ số tỷ lệ thể tích ($p \geq 0$); $\psi(z)$ là hàm thể hiện phân bố lỗ rỗng:

- Với tấm Piezo-FGPo có lỗ rỗng phân bố đều (Piezo-FGPo-1):

$$\psi = e_0 = \text{const} \tag{2}$$

trong đó e_0 là độ rỗng, hay tỷ phần thể tích lỗ rỗng ($0 \leq e_0 \ll 1$).

- Với tấm Piezo-FGPo có lỗ rỗng phân bố không đều đối xứng (Piezo-FGPo-2):

$$\psi = e_0\left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \tag{3}$$

- Với tấm Piezo-FGPo hoàn hảo khi không chứa các lỗ rỗng (Piezo-FGPo-3):

$$\psi = e_0 = 0 \tag{4}$$

Tấm Piezo-FGPo đặt trên nền đàn hồi Pasternak và chịu tác dụng của trường điện thế **E**. Hàm điện thế được giả định phân bố theo chiều dày của tấm và thỏa mãn điều kiện của phương trình Maxwell [25]:

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{2V_e}{h}z - \phi_0(x, y, t)\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{5}$$

trong đó: V_e là điện thế áp đặt; ϕ_0 là điện thế tại mặt trung bình của tấm.

Trường điện thế được định nghĩa như sau:

$$\mathbf{E} = \{E_x(x, y, z, t); E_x(x, y, z, t); E_x(x, y, z, t)\}^T = \{-\partial\phi/\partial x; -\partial\phi/\partial y; -\partial\phi/\partial z\}^T \tag{6}$$

2.2. Trường chuyển vị

Theo S-FSDT, trường chuyển vị được viết dưới dạng [21]:

$$u = u_0(x, y, t) - z\frac{\partial w_b}{\partial x}; \quad v = v_0(x, y, t) - z\frac{\partial w_b}{\partial y}; \quad w = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \tag{7}$$

Rõ ràng, trường chuyển vị của S-FSDT chỉ chứa bốn ẩn, là các thành phần chuyển vị trên mặt trung bình u_0, v_0, w_b, w_s.

2.3. Trường biến dạng

Các thành phần biến dạng màng gồm:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{Bmatrix} + z\begin{Bmatrix}\kappa_x\\ \kappa_y\\ \kappa_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\partial u_0/\partial x\\ \partial v_0/\partial y\\ \partial u_0/\partial y + \partial v_0/\partial x\end{Bmatrix} - z\begin{Bmatrix}\partial^2 w_b/\partial x^2\\ \partial^2 w_b/\partial y^2\\ 2\partial^2 w_b/\partial x\partial y\end{Bmatrix} \tag{8}$$

Các thành phần biến dạng cắt ngang:

$$\begin{Bmatrix}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\gamma_{xz}^0\\ \gamma_{yz}^0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\partial w_s/\partial x\\ \partial w_s/\partial y\end{Bmatrix} \tag{9}$$

Mối quan hệ ứng suất–biến dạng của tấm Piezo-FGPo kể đến sự tương tác cơ–điện được biểu diễn như sau [26, 27]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 & 0 & 0\\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \bar{C}_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & \bar{e}_{31}\\ 0 & 0 & \bar{e}_{32}\\ 0 & \bar{e}_{24} & 0\\ \bar{e}_{15} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{Bmatrix}D_x\\ D_y\\ D_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \bar{e}_{15} & 0\\ 0 & 0 & \bar{e}_{24} & 0 & 0\\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{32} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\eta}_{11} & 0 & 0\\ 0 & \bar{\eta}_{22} & 0\\ 0 & 0 & \bar{\eta}_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix} \tag{11}$$

trong đó: $\bar{C}_{11}=c_{11}-\dfrac{c_{13}^2}{c_{33}}$; $\bar{C}_{22}=c_{22}-\dfrac{c_{23}^2}{c_{33}}$; $\bar{C}_{12}=c_{12}-\dfrac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}$; $\bar{C}_{44}=c_{44}$; $\bar{C}_{55}=c_{55}$; $\bar{C}_{66}=c_{66}$; $\bar{e}_{31}=e_{31}-\dfrac{c_{13}}{c_{33}}e_{33}$; $\bar{e}_{32}=e_{32}-\dfrac{c_{23}}{c_{33}}e_{33}$; $\bar{e}_{24}=e_{24}$; $\bar{e}_{15}=e_{15}$; $\bar{\eta}_{11}=\eta_{11}$; $\bar{\eta}_{22}=\eta_{22}$; $\bar{\eta}_{33}=\eta_{33}+\dfrac{e_{33}^2}{c_{33}}$; với c_{ij}, e_{ij} và η_{ij} lần lượt là các hằng số đàn hồi, hằng số áp điện và hằng số điện môi của vật liệu Piezo-FGPo; D_x, D_y, D_z là các thành phần chuyển dịch điện tích.

Hệ phương trình chuyển động của tấm Piezo-FGPo được thiết lập dựa trên nguyên lý Hamilton [28]:

$$0=\int_0^T(\delta U_s+\delta U_f+\delta U_e-\delta K)dt \tag{12}$$

trong đó: δU_s và δK là các biến phân của thế năng biến dạng và động năng trong tấm; δU_f là biến phân của thế năng biến dạng của nền đàn hồi; δU_e là biến phân thế năng do ứng suất ban đầu gây ra bởi điện thế áp ngoài.

Biến phân thế năng δU_s trong tấm Piezo-FGPo bao gồm thế năng do biến dạng cơ học (δU_{sm}) và thế năng do điện trường (δU_{se}) gây ra, được biểu diễn như sau [13]:

$$\begin{aligned}\delta U_s&=\delta U_{sm}+\delta U_{se}\\ &=\int_0^b\int_0^a\int_{-h/2}^{h/2}[\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_{xy}\delta\gamma_{xy}+\sigma_{xz}\delta\gamma_{xz}+\sigma_{yz}\delta\gamma_{yz}]dzdxdy\\ &\quad+\int_0^b\int_0^a\int_{-h/2}^{h/2}[-D_x\delta E_x-D_y\delta E_y-D_z\delta E_z]dzdxdy\end{aligned} \tag{13}$$

Dựa trên các quan hệ (6), (8)–(10), biến phân thế năng do biến dạng cơ học được xác định bởi:

$$\begin{aligned}\delta U_{sm} = \int_0^b \int_0^a \Bigg\{ & \left[A_{11}\frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{11}\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - B_{12}\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + N_x^e + A_{31}^e\phi_0\right]\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} \\ & + \left[B_{11}\frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{11}\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + M_x^e + B_{31}^e\phi_0\right]\left(-\frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2}\right) \\ & + \left[A_{12}\frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{12}\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - B_{22}\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + N_y^e + A_{32}^e\phi_0\right]\frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \\ & + \left[B_{12}\frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{12}\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - D_{22}\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + M_y^e + B_{32}^e\phi_0\right]\left(-\frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2}\right) \\ & + \left[A_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - 2B_{66}\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}\right]\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \left[A_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - 2B_{66}\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}\right]\frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \\ & + \left[B_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - 2D_{66}\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}\right]\left(-2\frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y}\right) \\ & + \left(A_{55}^s\frac{\partial w_s}{\partial x} - A_{15}^e\frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right)\frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + \left(A_{44}^s\frac{\partial w_s}{\partial y} - A_{24}^e\frac{\partial \phi_0}{\partial y}\right)\frac{\partial \delta w_s}{\partial y}\Bigg\} dxdy\end{aligned} \tag{14}$$

Các thành phần nội lực do điện gây ra $(N_x^e, N_y^e, M_x^e, M_y^e)$ và các hệ số độ cứng của tấm được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} & (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2)\bar{C}_{ij}dz, \quad ij = 11, 12, 22, 66 \\ & A_{ij}^s = k_c \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{ij}dz, \quad ij = 55, 44; \quad (A_{15}^e, A_{24}^e) = k_c \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{e}_{15}, \bar{e}_{24}) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz \\ & (A_{31}^e, B_{31}^e) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z)\left[\bar{e}_{31}\frac{\pi}{h}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right] dz; \quad (N_x^e, M_x^e) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z)\left[\bar{e}_{31}\frac{2V_e}{h}\right] dz \\ & (A_{32}^e, B_{32}^e) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z)\left[\bar{e}_{32}\frac{\pi}{h}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right] dz; \quad (N_y^e, M_y^e) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z)\left[\bar{e}_{32}\frac{2V_e}{h}\right] dz \end{aligned} \tag{15}$$

trong đó hệ số hiệu chỉnh cắt k_c được lấy bằng 5/6 trong nghiên cứu này. Lưu ý rằng, với việc áp dụng S-FSDT, các biến dạng cắt ngang γ_{xz}, γ_{yz} không đổi theo chiều dày tấm. Điều này không chỉ làm ảnh hưởng đến tính toán ứng suất mà còn ảnh hưởng lên chuyển dịch điện tích. Để đảm bảo độ chính xác của nghiệm bán giải tích, hệ số hiệu chỉnh cắt cần được áp dụng đồng thời cho cả độ cứng cắt cơ học (A_{55}^s, A_{44}^s) và cho các hệ số ghép nối cơ–điện (A_{15}^e, A_{24}^e).

Sử dụng các quan hệ (6), (8)–(9), (11), biến phân thế năng do điện trường được xác định bởi:

$$\begin{aligned}\delta U_{se} = \int_0^b \int_0^a \Bigg\{ & -A_{15}^e\frac{\partial w_s}{\partial x}\frac{\partial \delta\phi_0}{\partial x} - A_{11}^e\frac{\partial \phi_0}{\partial x}\frac{\partial \delta\phi_0}{\partial x} - A_{24}^e\frac{\partial w_s}{\partial y}\frac{\partial \delta\phi_0}{\partial y} \\ & - A_{22}^e\frac{\partial \phi_0}{\partial y}\frac{\partial \delta\phi_0}{\partial y} - A_{33a}^e\delta\phi_0 + A_{31}^e\frac{\partial u_0}{\partial x}\delta\phi_0 - B_{31}^e\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\delta\phi_0 \\ & + A_{32}^e\frac{\partial v_0}{\partial y}\delta\phi_0 - B_{32}^e\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\delta\phi_0 - A_{33}^e\phi_0\delta\phi_0\Bigg\} dxdy\end{aligned} \tag{16}$$

với:

$$(A^e_{11}, A^e_{22}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{\eta}_{11}, \bar{\eta}_{22}) \cos^2\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz; \quad A^e_{33a} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\eta}_{33} \frac{2V_e}{h} \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz$$
$$A^e_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\eta}_{33} \left(\frac{\pi}{h} \sin\frac{\pi z}{h}\right)^2 dz$$

Biến phân thế năng của nền đàn hồi Pasternak được định nghĩa như sau [29]:

$$\delta U_f = \int_0^b \int_0^a \left[k_w w \delta w + k_s \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + k_s \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] dxdy \tag{17}$$

Biến phân thế năng do ứng suất ban đầu trong tấm Piezo-FGPo:

$$\delta U_e = \int_0^b \int_0^a \left[N^e_x \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + N^e_y \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] dxdy \tag{18}$$

Biến phân động năng của tấm Piezo-FGPo được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_0^b \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} [\rho(z)(\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w})] dz dx dy \\ &= -\int_0^b \int_0^a \Big\{ I_0 \ddot{u}_0 \delta u_0 + I_0 \ddot{v}_0 \delta v_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \delta u_0 - I_1 \ddot{u}_0 \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \delta v_0 \\ &\quad - I_1 \ddot{v}_0 \frac{\partial \delta w_b}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta w_b}{\partial y} + I_0 \ddot{w}_b \delta w_b + I_0 \ddot{w}_s \delta w_b + I_0 \ddot{w}_b \delta w_s + I_0 \ddot{w}_s \delta w_s \Big\} dx dy \end{aligned} \tag{19}$$

trong đó dấu chấm nằm ở trên các biến biểu thị các đạo hàm theo thời gian t của chúng. Các thành phần mô men quán tính khối lượng được xác định như sau:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, z^2) dz \tag{20}$$

3. Lời giải Ritz

Trong phần này, phương pháp Ritz được sử dụng để thiết lập hệ phương trình chuyển động cho tấm Piezo-FGPo tựa trên nền đàn hồi Pasternak. Để thuận tiện, hệ tọa độ không thứ nguyên (ξ, η) được sử dụng, liên hệ với hệ tọa độ thực (x, y):

$$\xi = \frac{2x}{a} - 1; \quad \eta = \frac{2y}{b} - 1 \tag{21}$$

Sử dụng dạng nghiệm pb2-Ritz, các thành phần chuyển vị và điện thế $u_0, v_0, w_b, w_s, \phi_0$ của tấm Piezo-FGPo được giả định như sau [30]:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{p=0}^{N} \sum_{r=0}^{p} Q_{1pr} u_{0pr} = \sum_{i=1}^{N^*} Q_{1i} u_{0i} = Q_1^T U_0; \quad v_0 = \sum_{p=0}^{N} \sum_{r=0}^{p} Q_{2pr} v_{0pr} = \sum_{i=1}^{N^*} Q_{2i} v_{0i} = Q_2^T V_0 \\ w_b &= \sum_{p=0}^{N} \sum_{r=0}^{p} Q_{3pr} w_{bpr} = \sum_{i=1}^{N^*} Q_{3i} w_{bi} = Q_3^T W_b \\ w_s &= \sum_{p=0}^{N} \sum_{r=0}^{p} Q_{4pr} w_{spr} = \sum_{i=1}^{N^*} Q_{4i} w_{si} = Q_4^T W_s; \quad \phi_0 = \sum_{p=0}^{N} \sum_{r=0}^{p} Q_{5pr} \phi_{0pr} = \sum_{i=1}^{N^*} Q_{5i} \phi_{0i} = Q_5^T \Phi_0 \end{aligned} \tag{22}$$

trong đó: $N^* = (N+1)(N+2)/2$; $i = (p+1)(p+2)/2 - (p-r)$; N là bậc đa thức hai chiều, $Q_{1i}(t), Q_{2i}(t), Q_{3i}(t), Q_{4i}(t)$ và $Q_{5i}(t)$ là các hệ số phụ thuộc theo thời gian. Lưu ý rằng U_0, V_0, W_b, W_s và Φ_0 tương ứng với những véc tơ của hàm pb2-Ritz; các thành phần $u_{0i}, v_{0i}, w_{bi}, w_{si}$ và ϕ_{0i} được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} u_{0i} &= \xi^{p-r}\eta^r B_{u_0}(\xi,\eta); \quad v_{0i} = \xi^{p-r}\eta^r B_{v_0}(\xi,\eta); \quad w_{bi} = \xi^{p-r}\eta^r B_{w_b}(\xi,\eta) \\ w_{si} &= \xi^{p-r}\eta^r B_{w_s}(\xi,\eta); \quad \phi_{0i} = \xi^{p-r}\eta^r B_{\phi_0}(\xi,\eta) \end{aligned} \tag{23}$$

với: $B_{u_0}, B_{v_0}, B_{w_b}, B_{w_s}$ và B_{ϕ_0} là các hàm thỏa mãn điều kiện biên và được xác định như sau:

$$\begin{aligned} B_{u_0} &= \bar{\eta}_d^{\mu_1}\bar{\xi}_t^{\mu_2}\bar{\eta}_t^{\mu_3}\bar{\xi}_d^{\mu_4}; \quad B_{v_0} = \bar{\eta}_d^{\mu_5}\bar{\xi}_t^{\mu_6}\bar{\eta}_t^{\mu_7}\bar{\xi}_d^{\mu_8} \\ B_{w_b} &= \bar{\eta}_d^{\mu_9}\bar{\xi}_t^{\mu_{10}}\bar{\eta}_t^{\mu_{11}}\bar{\xi}_d^{\mu_{12}}; \quad B_{w_s} = \bar{\eta}_d^{\mu_{13}}\bar{\xi}_t^{\mu_{14}}\bar{\eta}_t^{\mu_{15}}\bar{\xi}_d^{\mu_{16}}; \quad B_{\phi_0} = \bar{\eta}_d^{\mu_{17}}\bar{\xi}_t^{\mu_{18}}\bar{\eta}_t^{\mu_{19}}\bar{\xi}_d^{\mu_{20}} \end{aligned} \tag{24}$$

trong đó: $\bar{\eta}_d = \eta + 1; \bar{\eta}_t = \eta - 1; \bar{\xi}_d = \xi + 1; \bar{\xi}_t = \xi - 1$; các hệ số μ_i phụ thuộc vào các điều kiện biên cụ thể tại mỗi cạnh. Một lưu ý là trên các biên của tấm chữ nhật, do được nối đất nên các hệ số μ_i được lấy để đảm bảo điện thế triệt tiêu ($\phi_0 = 0$). Chẳng hạn, trên cạnh $x = a$ (tương ứng với $\xi = 1$):

- Với điều kiện biên ngàm (-C): $\mu_2 = \mu_6 = \mu_{14} = \mu_{18} = 1, \mu_{10} = 2; k_i = 2$.
- Với điều kiện biên khớp (-S): $\mu_2 = 0, \mu_6 = \mu_{10} = \mu_{14} = \mu_{18} = 1; k_i = 1$.
- Với điều kiện biên tự do (-F): $\mu_2 = \mu_6 = \mu_{10} = \mu_{14} = \mu_{18} = 0; k_i = 0$.

Thay dạng nghiệm ở phương trình (22) vào các biểu thức (14), (16), (17)–(19), rồi lấy kết quả thu được thay vào phương trình (12), ta được phương trình dao động cho tấm dưới dạng ma trận thu gọn:

$$KQ + M\ddot{Q} = 0 \tag{25}$$

trong đó: $Q = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}^T$ là véc tơ các hệ số chuyển vị. K, M tương ứng là ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của kết cấu tấm.

Bằng cách giả thiết nghiệm chuyển vị dưới dạng $Q = Q_0 e^{i\omega t}$, tần số dao động riêng ω của tấm được xác định từ việc giải phương trình trị riêng:

$$(K - \omega^2 M)Q_0 = 0 \tag{26}$$

Tần số dao động cơ bản của tấm là giá trị nhỏ nhất trong số các tần số dao động riêng:

$$\omega_0 = \min\{\omega\} \tag{27}$$

4. Kết quả số và thảo luận

Trong các khảo sát số dưới đây, lời giải bán giải tích cho tấm Piezo-FGPo (PZT-4/PZT-5A) [31] được sử dụng. Tấm được đặt trên nền đàn hồi Pasternak với hai hệ số độ cứng là k_w và k_s. Để thuận tiện, các tham số nền và tần số cơ bản không thứ nguyên (KTN) được sử dụng [27, 32]:

$$\bar{\omega} = \omega\frac{a^2}{h}\sqrt{\frac{\rho(\text{PZT-4})}{c_{11}(\text{PZT-4})}}; \quad K_0 = k_w\frac{a^4}{h^3 c_{11}(\text{PZT-4})}; \quad J_0 = k_s\frac{a^2}{h^3 c_{11}(\text{PZT-4})} \tag{28}$$

4.1. Kiểm chứng độ tin cậy của mô hình

Để kiểm chứng độ tin cậy của mô hình đề xuất, trong mục này, các kết quả tính toán theo lời giải pb-2 Ritz được so sánh với các kết quả đã được công bố bởi Barati và cs. [12] sử dụng lý thuyết tấm biến dạng cắt cải tiến với bốn ẩn số và phương pháp giải tích. Tấm Piezo-FGPo điều kiện biên khớp bốn cạnh (SSSS), độ rỗng $e_0 = 0{,}2$ được cấu thành từ hai loại vật liệu PZT-4/PZT-5A chịu các điện thế áp đặt lần lượt là: $V_e = -500$ V, 0, 500 V, với chỉ số tỷ lệ thể tích $p = 5$. Từ kết quả thu được trong Bảng 1 ta nhận thấy tần số cơ bản KTN theo mô hình trong bài báo gần như tương đồng với kết quả của Barati và cs.

Bảng 1. So sánh tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm Piezo-FGPo điều kiện biên SSSS ($p = 5$)

Piezo-FGPo	Nguồn	$V_e = 500$ V	$V_e = 0$	$V_e = -500$ V
Piezo-FGPo-1	Barati và cs. [12]	5,40698	5,60954	5,80503
	Bài báo	5,40754	5,61005	5,80551
Piezo-FGPo-2	Barati và cs. [12]	5,60756	5,80282	5,99172
	Bài báo	5,60830	5,80352	5,99238

Để kiểm chứng độ tin cậy của mô hình đề xuất khi phân tích dao động tự do cho tấm Piezo-FGPo-2 [14] với các điều kiện khác nhau như CCCC và SCSC, Bảng 2 so sánh kết quả tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ thu được từ mô hình đề xuất và kết quả nghiên cứu của Nguyen và cs. [14]. Tấm có tỷ số $a/h = 100$, hệ số độ rỗng $e_0 = 0{,}2$, điện thế áp đặt $V_e = 200$ V, $K_0 = J_0 = 0$, khi chỉ số tỷ lệ thể tích p thay đổi theo các giá trị 0,1, 1, 2. Kết quả từ mô hình trong bài báo cho thấy sự tương đồng với kết quả trong công bố của Nguyen và cs. [14]. Sai lệch nhỏ giữa hai mô hình xuất phát từ việc Nguyen và cs. áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên HSDT trong khi bài báo hiện tại sử dụng phương pháp Ritz và S-FSDT.

Bảng 2. So sánh tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm Piezo-FGPo-2 điều kiện biên CCCC và SCSC

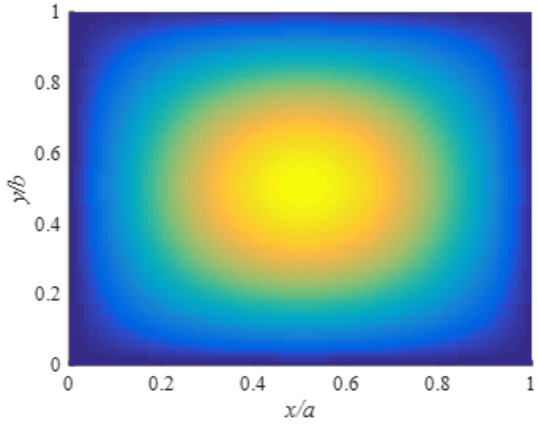
Điều kiện biên	Nguồn	$p = 0{,}1$	$p = 1$	$p = 2$
CCCC	Nguyen và cs. [14]	9,6736	9,201	9,0791
	Bài báo	9,7078	9,2272	9,1024
SCSC	Nguyen và cs. [14]	7,7822	7,3948	7,294
	Bài báo	7,8046	7,4129	7,3107

4.2. Khảo sát số

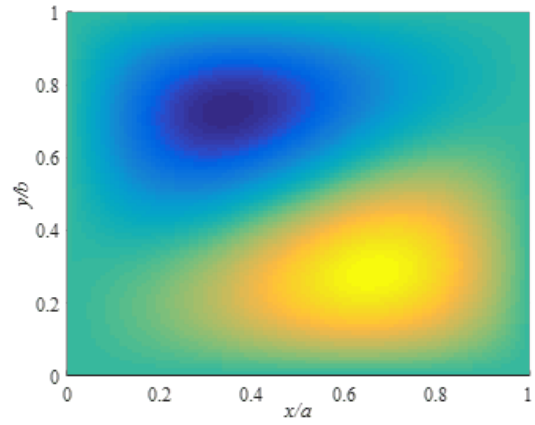
Trong phần này, các khảo sát số được thực hiện nhằm nghiên cứu ảnh hưởng của các tham số như: đặc trưng rỗng, độ cứng nền, kích thước, điều kiện biên cũng như điện thế áp đặt đến tần số dao động cơ bản của tấm Piezo-FGPo. Trừ những trường hợp riêng sẽ được mô tả cụ thể, các khảo sát sau đây được thực hiện cho tấm Piezo-FGPo-1 điều kiện biên SSSS với các thông số đầu vào như sau: $a = 1$ m, $b/a = 1, a/h = 50, K_0 = 5, J_0 = 1, e_0 = 0{,}2, p = 1, V_e = 500$ V.

Để trực quan hóa kết quả và kiểm chứng tính chính xác của mô hình đề xuất, một số dạng dao động riêng điển hình của tấm Piezo-FGPo-1 điều kiện biên SSSS được trình bày trong Hình 2. Tấm có thông số như sau: $a = 1$ m, $b/a = 1, a/h = 50, K_0 = 5, J_0 = 1, e_0 = 0{,}2, p = 1, V_e = 500$ V. Có thể nhận thấy các dạng dao động thu được phù hợp với điều kiện biên đã xét, sự chuyển đổi hợp lý của tần số dao động riêng tương ứng với dạng dao động, qua đó góp phần khẳng định độ tin cậy của mô hình đề xuất.

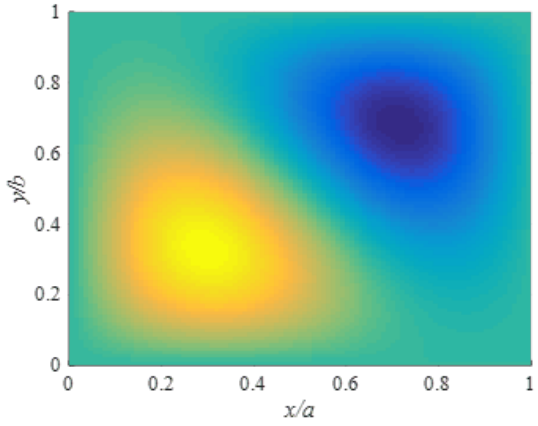
Tiếp theo, ảnh hưởng của điện thế áp đặt, dạng phân bố độ rỗng và hệ số độ rỗng đến tần số cơ bản KTN của tấm Piezo-FGPo điều kiện biên SSSS được khảo sát và minh họa bằng đồ thị trên Hình 3 và Hình 4. Tấm có các thông số đầu vào như sau: $a = 1$ m, $b/a = 1, a/h = 50, K_0 = 5, J_0 = 1, e_0 = 0{,}2, p = 1, V_e = 500$ V. Rõ ràng, quy luật phân bố độ rỗng và độ rỗng ảnh hưởng tương đối đáng kể đến tần số cơ bản KTN của tấm Piezo-FGPo. Có một điều thú vị là tấm có quy luật phân bố lỗ rỗng đều lại cho tần số cơ bản KTN cao nhất, trong khi đó tần số cơ bản KTN thấp nhất lại là tấm hoàn hảo. Đây là do mối tương quan giữa độ cứng và khối lượng tổng thể của tấm khi dạng phân bố độ rỗng thay đổi. Tấm Piezo-FGPo-1 suy giảm khối lượng nhanh hơn so với độ cứng, dẫn đến sự gia tăng



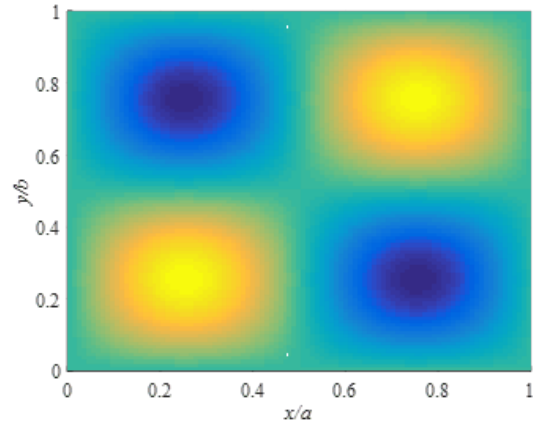
(a) Mode 1 với $\bar{\omega}$ = 7,9975



(b) Mode 2 với $\bar{\omega}$ = 16,6037

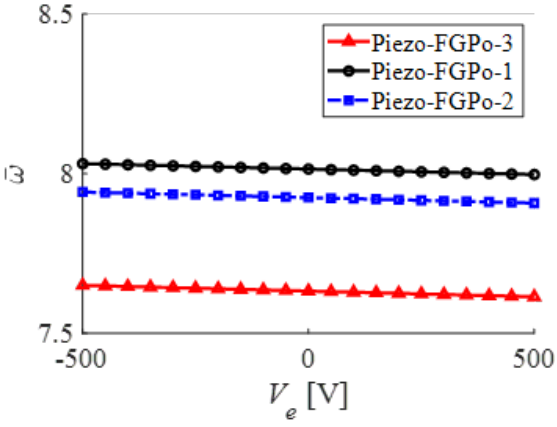


(c) Mode 3 với $\bar{\omega}$ = 16,6037

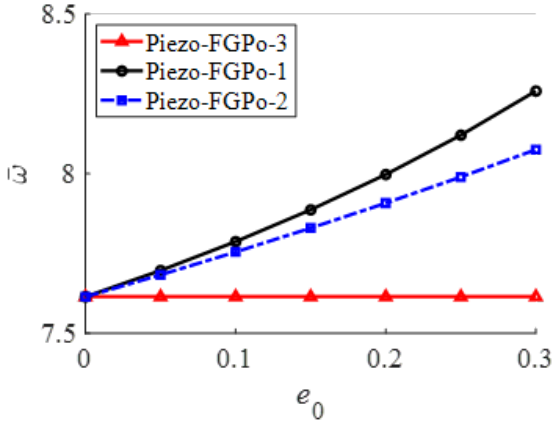


(d) Mode 4 với $\bar{\omega}$ = 25,2133

Hình 2. Một số dạng dao động riêng của tấm Piezo-FGPo-1 điều kiện biên SSSS

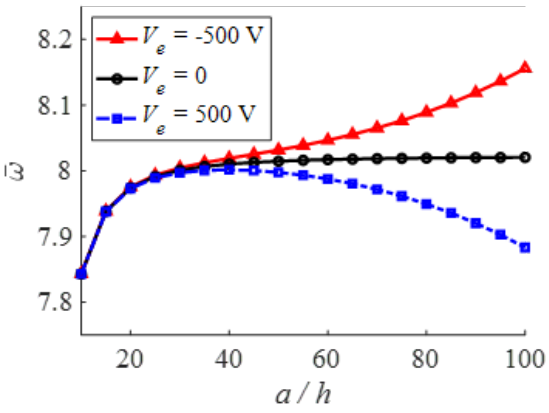


Hình 3. Ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng lên tần số cơ bản KTN của tấm Piezo-FGPo

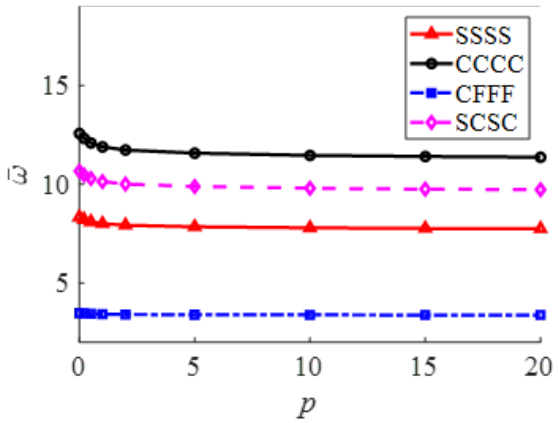


Hình 4. Ảnh hưởng của độ rỗng lên tần số cơ bản KTN của tấm Piezo-FGPo

của tỷ số độ cứng trên khối lượng và do đó làm tần số cơ bản cao hơn các trường hợp còn lại. Ngoài ra, khi tăng hệ số độ rỗng thì tần số cơ bản KTN của tấm tăng dần cho cả hai dạng phân bố độ rỗng Piezo-FGPo-1 và Piezo-FGPo-2. Lưu ý rằng, các hiện tượng này có quy luật tương tự như hiện tượng được đề cập trong bài báo được công bố bởi Ebrahimi [27]. Mặt khác, khi điện thế áp đặt tăng từ -500 V đến 500 V thì tần số cơ bản KTN của tấm giảm nhẹ. Chẳng hạn, với tấm Piezo-FGPo-1, khi điện thế áp đặt tăng từ $V_e = -500$ V lên $V_e = 500$ V, tần số cơ bản KTN giảm từ 8,0316 xuống 7,9975 (giảm 0,4243%).



Hình 5. Ảnh hưởng của tỷ số kích thước a/h lên tần số cơ bản KTN của tấm Piezo-FGPo-1



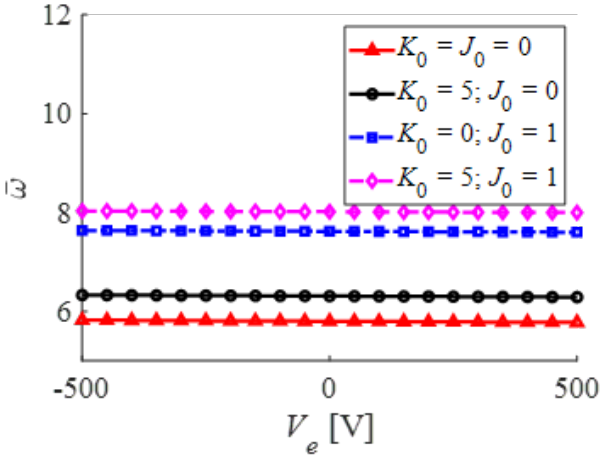
Hình 6. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích lên tần số cơ bản KTN của tấm Piezo-FGPo-1

Ảnh hưởng của tỷ số kích thước tấm a/h lên tần số cơ bản KTN của tấm Piezo-FGPo-1 với điều kiện biên SSSS được minh họa trong Hình 5. Tấm có các thông số đầu vào: $a = 1$ m, $b/a = 1, a/h = 50, K_0 = 5, J_0 = 1, e_0 = 0{,}2, p = 1$. Có thể thấy rằng, khi tấm càng mỏng thì điện thế áp đặt ảnh hưởng lên tần số cơ bản KTN càng rõ rệt. Ngoài ra, khi tấm có tỷ số a/h lớn hơn 40 thì "dấu" của điện thế áp đặt chi phối sự tăng hoặc giảm của tần số cơ bản KTN. Cụ thể, với tỷ số a/h lớn hơn 40, điện thế áp đặt mang dấu "âm" thì làm cho tần số cơ bản KTN tăng, trong khi đó điện thế áp đặt mang dấu "dương" thì làm cho tần số cơ bản KTN giảm. Chẳng hạn, với tỷ số $a/h = 100$, tần số cơ bản KTN đạt 8,155655 tại $V_e = -500$ V và giảm xuống 7,88307 (giảm 3,34%) tại $V_e = 500$ V.

Hình 6 minh họa ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích các vật liệu thành phần (p) lên tần số cơ bản KTN của tấm Piezo-FGPo-1 với bốn trường hợp điều kiện biên khác nhau bao gồm: SSSS, CCCC, SCSC, và CFFF. Các thông số đầu vào của tấm: $a = 1$ m, $b/a = 1, a/h = 50, K_0 = 5, J_0 = 1, e_0 = 0{,}2, V_e = 500$ V. Rõ ràng, khi tấm có ràng buộc chuyển vị càng nhiều thì tần số cơ bản KTN càng lớn. Điều này do độ cứng của tấm bị chi phối mạnh bởi các điều kiện ràng buộc. Điều kiện ràng buộc càng nhiều dẫn đến độ cứng lớn, từ đó làm cho tần số cơ bản KTN của tấm tăng lên. Chẳng hạn, tần số cơ bản KTN lớn nhất khi tấm có điều kiện biên là ngàm bốn cạnh "CCCC", sau đó giảm dần xuống tấm có điều kiện biên hai cạnh ngàm và hai cạnh khớp "SCSC", tiếp tục đến tấm bốn cạnh tựa khớp "SSSS"; tần số là nhỏ nhất khi tấm có một cạnh ngàm và ba cạnh tự do "CFFF". Về ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích, có thể nhận thấy, với mỗi dạng điều kiện biên của tấm, khi p tăng, đồng nghĩa với việc tăng hàm lượng PZT-5A, thành phần này có các hằng số đàn hồi thấp hơn so với PZT-4, do đó độ cứng của tấm giảm và tần số cơ bản KTN giảm. Đáng chú ý là, tần số $\bar{\omega}$ giảm đáng kể khi p biến thiên trong khoảng $[0, 2]$, sau đó thì tốc độ giảm của tần số chậm dần lại.

Cuối cùng, Hình 7 minh họa ảnh hưởng của độ cứng nền lên tần số cơ bản KTN của tấm Piezo-FGPo-1 với điều kiện biên SSSS chịu điện thế áp đặt, V_e thay đổi từ giá trị -500 V đến 500 V. Tấm có

thông số đầu vào như sau: $a = 1$ m, $b/a = 1, a/h = 50, e_0 = 0{,}2$. Khi tấm đặt trên nền đàn hồi thì tần số cơ bản KTN tăng lên đáng kể so với khi không có nền ($K_0 = J_0 = 0$). Chẳng hạn, với điện thế áp đặt $V_e = 500$ V và hệ số nền $J_0 = 0$, khi hệ số nền K_0 giảm từ 5 xuống 0, tần số cơ bản KTN giảm từ 6,28837 xuống 5,77570, tương ứng giảm 8,1526%. Tương tự, với điện thế áp đặt $V_e = 500$ V và hệ số nền $K_0 = 0$, khi hệ số nền J_0 giảm từ 1 xuống 0, tần số cơ bản KTN cũng giảm từ 7,60102 xuống 5,77570, tương ứng giảm 24,014%. Rõ ràng, ảnh hưởng của hệ số J_0 lên tần số cơ bản KTN của tấm Piezo-FGPo-1 trong trường hợp này nhiều hơn so với hệ số K_0.



Hình 7. Ảnh hưởng của độ cứng nền lên tần số cơ bản của tấm Piezo-FGPo-1

5. Kết luận

Bài báo áp dụng phương pháp Ritz dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản bốn ẩn chuyển vị để phân tích dao động riêng của tấm Piezo-FGPo đặt trên nền đàn hồi với các dạng điều kiện biên khác nhau. Một số kết quả chính thu được từ nghiên cứu này bao gồm:

- Dạng phân bố và hệ số độ rỗng ảnh hưởng đến tần số cơ bản của tấm Piezo-FGPo đặt trên nền đàn hồi. Khi độ rỗng tăng thì tần số cơ bản của tấm tăng.

- Điện thế áp đặt ảnh hưởng nhẹ đến tần số cơ bản của tấm Piezo-FGPo đặt trên nền đàn hồi. Khi điện thế áp đặt tăng thì tần số cơ bản của tấm giảm dần.

- Chiều dày của tấm Piezo-FGPo ảnh hưởng mạnh đến tần số cơ bản. Khi $a/h > 40$ thì "dấu" của điện thế áp đặt làm thay đổi quy luật biến thiên tần số cơ bản của tấm.

- Điều kiện biên cũng ảnh hưởng nhiều đến tần số cơ bản của tấm. Cụ thể, tấm có ràng buộc càng nhiều thì tần số cơ bản của tấm càng lớn.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2025.127.

Tuyên bố về việc sử dụng trí tuệ nhân tạo tạo sinh và công nghệ hỗ trợ bởi AI

Các tác giả xác nhận không sử dụng bất kỳ công cụ trí tuệ nhân tạo tạo sinh hoặc công nghệ hỗ trợ bởi AI nào trong quá trình chuẩn bị và hoàn thiện bản thảo.

Tài liệu tham khảo

[1] Bodaghi, M., Shakeri, M. (2012). An analytical approach for free vibration and transient response of functionally graded piezoelectric cylindrical panels subjected to impulsive loads. *Composite Structures*, 94(5):1721–1735.

[2] Jin, C., Wang, X. (2011). Analytical modelling of the electromechanical behaviour of surface-bonded piezoelectric actuators including the adhesive layer. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(13):2547–2562.

[3] Lanzara, G., Yoon, Y., Kim, Y., Chang, F. K. (2009). Influence of interface degradation on the performance of piezoelectric actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 20(14):1699–1710.

[4] Yang, Q. S., Qin, Q. H., Liu, T. (2006). Interlayer stress in laminate beam of piezoelectric and elastic materials. *Composite Structures*, 75(1–4):587–592.

[5] Hung, T. Q., Tu, T. M., Duc, D. M. (2021). Free vibration of piezoelectric FGM sandwich beam with porous core embedded in thermal environment and elastic foundation. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - HUCE*, 15(4):15–28.

[6] Li, J., Xue, Y., Li, F., Narita, Y. (2019). Active vibration control of functionally graded piezoelectric material plate. *Composite Structures*, 207:509–518.

[7] Su, Z., Jin, G., Ye, T. (2018). Electro-mechanical vibration characteristics of functionally graded piezoelectric plates with general boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 138-139: 42–53.

[8] Zhou, K., Hu, Z., Hua, H. (2021). Investigation of the nonstationary stochastic response of functionally graded piezoelectric material plates with general boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, 96:315–335.

[9] Kumar, P., Harsha, S. P. (2021). Vibration response analysis of exponential functionally graded piezoelectric (EFGP) plate subjected to thermo-electro-mechanical load. *Composite Structures*, 267:113901.

[10] Zenkour, A. M., Aljadani, M. H. (2020). Buckling analysis of actuated functionally graded piezoelectric plates via a quasi-3D refined theory. *Mechanics of Materials*, 151:103632.

[11] Barati, M. R., Sadr, M. H., Zenkour, A. M. (2016). Buckling analysis of higher order graded smart piezoelectric plates with porosities resting on elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 117:309–320.

[12] Barati, M. R., Shahverdi, H., Zenkour, A. M. (2016). Electro-mechanical vibration of smart piezoelectric FG plates with porosities according to a refined four-variable theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 24(12):987–998.

[13] Barati, M. R., Zenkour, A. M. (2016). Electro-thermoelastic vibration of plates made of porous functionally graded piezoelectric materials under various boundary conditions. *Journal of Vibration and Control*, 24(10):1910–1926.

[14] Nguyen, L. B., Thai, C. H., Zenkour, A. M., Nguyen-Xuan, H. (2019). An isogeometric Bézier finite element method for vibration analysis of functionally graded piezoelectric material porous plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 157-158:165–183.

[15] Wang, Y. Q. (2018). Electro-mechanical vibration analysis of functionally graded piezoelectric porous plates in the translation state. *Acta Astronautica*, 143:263–271.

[16] Wang, Y. Q., Zu, J. W. (2017). Porosity-dependent nonlinear forced vibration analysis of functionally graded piezoelectric smart material plates. *Smart Materials and Structures*, 26(10):105014.

[17] Harsha, A., Kumar, P. (2023). Impact of the porosity and elastic foundation on frequency and buckling response of bidirectional functionally graded piezoelectric porous plate. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 24(7):2450077.

[18] Kumar, P., Singh, B., Harsha, S. P. (2025). One/two/three elastic foundations and thermoelectric effect on bending, deflection, and frequency responses of porous functionally graded piezoelectric tapered (FGPT) plate. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 47(11):562.

[19] Li, Z., Liu, J., Hu, B., Wang, Y., Shen, H. (2022). Wave propagation analysis of porous functionally graded piezoelectric nanoplates with a visco-Pasternak foundation. *Applied Mathematics and Mechanics*, 44(1):35–52.

[20] Thẩm, V. V. (2025). Phân tích dao động của tấm Sandwich Nano Graphene đàn hồi-điện-từ đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCNXD) - ĐHXDHN*, 19(3V): 42–59.

[21] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2013). A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 101:332–340.

[22] Tú, T. M., Long, N. V., Hằng, P. T., Bình, T. V., Hiền, T. T. (2023). Phân tích tĩnh tấm FGM có vi bọt rỗng trên nền đàn hồi Kerr theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCNXD) - ĐHXDHN*, 17(4V):49–63.

[23] Nguyen, V.-L., Limkatanyu, S., Thai, H.-T., Rungamornrat, J. (2023). Simple first-order shear deformation theory for free vibration of FGP-GPLRC spherical shell segments. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 31(25):6944–6961.

[24] Wattanasakulpong, N., Chaikittiratana, A. (2015). Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method. *Meccanica*, 50(5):1331–1342.

[25] Zhao, L., Kumar, P., Sharma, N., Shen, X., Harsha, S. P. (2025). Thermo-electromechanical nonlinear dynamic response of PZT-4/PZT-5H bidirectional functionally graded porous plates subjected to the variable external harmonic load. *Materials & Design*, 260:115139.

[26] Wang, B. L., Noda, N. (2001). Design of a smart functionally graded thermopiezoelectric composite structure. *Smart Materials and Structures*, 10(2):189–193.

[27] Ebrahimi, F., Jafari, A., Barati, M. R. (2017). Vibration analysis of magneto-electro-elastic heterogeneous porous material plates resting on elastic foundations. *Thin-Walled Structures*, 119:33–46.

[28] Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons, New York, USA.

[29] Lee, W.-H., Han, S.-C., Park, W.-T. (2015). A refined higher order shear and normal deformation theory for E-, P-, and S-FGM plates on Pasternak elastic foundation. *Composite Structures*, 122:330–342.

[30] Wu, L. H., Lu, Y. (2011). Free vibration analysis of rectangular plates with internal columns and uniform elastic edge supports by pb-2 Ritz method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(7):494–504.

[31] Vel, S. S., Mewer, R. C., Batra, R. C. (2004). Analytical solution for the cylindrical bending vibration of piezoelectric composite plates. *International Journal of Solids and Structures*, 41(5–6):1625–1643.

[32] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2011). A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation. *Composites Science and Technology*, 71(16):1850–1858.