Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, ĐHXDHN, 2026, 20 (3V): 12–22

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA DẦM CÔNG XÔN ÁP ĐIỆN XÉT TỚI PHI TUYẾN TRÊN LỚP ÁP ĐIỆN

Nguyễn Văn Mạnh[a], Nguyễn Đức Ngọc[b], Vũ Đức Lập[b], Đặng Hoàng Anh[b], Nguyễn Minh Hảo[b,*]

[a]*Khoa Cơ khí, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, số 55 Giải Phóng, Phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam*
[b]*Khoa Cơ khí, Trường Đại học Thủy lợi, số 175 Tây Sơn, Phường Trung Liệt, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 04/7/2026, Sửa xong 12/8/2026, Chấp nhận đăng 12/8/2026

Tóm tắt

Bài báo này tập trung phân tích dao động tự do của bộ thu thập năng lượng sử dụng kết cấu dầm công xôn áp điện, xét đến biến dạng lớn của dầm cơ sở và đặc tính phi tuyến của lớp vật liệu áp điện. Đầu tiên, nguyên lý Hamilton mở rộng được áp dụng, sau đó phương pháp Galerkin với mốt dao động thứ nhất được xét nhằm mục đích xây dựng và thiết lập hệ phương trình liên kết cơ-điện. Dao động của dầm nghiên cứu được mô tả bởi một phương trình vi phân phi tuyến cấp hai và một phương trình vi phân tuyến tính cấp một. Tiếp theo, phương pháp cân bằng điều hòa bậc nhất được sử dụng để xác định tần số dao động riêng và các đáp ứng của kết cấu dầm khi có lớp áp điện. Sau đó, độ chính xác của phương pháp được kiểm chứng bằng khảo sát số. Kết quả khảo sát số xác định được các đáp ứng đặc trưng của hệ cơ-điện.

Từ khoá: thu thập năng lượng áp điện; dầm công xôn áp điện; phi tuyến vật liệu; nguyên lý Hamilton; phương pháp Galerkin.

FREE VIBRATION ANALYSIS OF A NONLINEAR PIEZOELECTRIC CANTILEVER BEAM

Abstract

This paper focuses on the free vibration analysis of an energy harvester utilizing a piezoelectric cantilever beam structure, considering the large deformation of the base beam and the nonlinear characteristics of the piezoelectric layer. The extended Hamilton's principle is applied, followed by the Galerkin method with the fundamental mode shape to establish the coupled electromechanical equations. In this framework, the vibration system of the beam is governed by a second-order nonlinear differential equation and a first-order linear differential equation. The equivalent linearization method is employed to determine the natural frequencies and structural responses of the beam integrated with the piezoelectric layer. The accuracy of the method is validated through numerical investigations. The numerical results determine the characteristics of the electromechanical system.

Keywords: piezoelectric energy harvesting; piezoelectric cantilever beam; material nonlinearity; Hamilton's principle; Galerkin method.

https://doi.org/10.31814/stce.huce2026-20(3V)-02 © 2026 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Khai thác năng lượng từ dao động môi trường bằng vật liệu áp điện là một hướng nghiên cứu tiềm năng nhằm cung cấp nguồn điện cho các thiết bị công suất thấp và mạng cảm biến không dây. Trong số các cấu hình thu thập năng lượng, dầm công xôn gắn lớp áp điện được sử dụng rộng rãi nhờ kết cấu đơn giản, dễ chế tạo và khả năng chuyển đổi cơ-điện hiệu quả [1, 2]. Nhiều nghiên cứu đã được thực hiện về dao động và đặc tính thu thập năng lượng của dầm áp điện dựa trên các mô hình tuyến tính [3, 4]. Bên cạnh đó, các hướng nghiên cứu liên quan đến ảnh hưởng của vật liệu composite, cấu hình kết cấu và điều kiện kích thích cũng đã được khảo sát nhằm nâng cao hiệu suất làm việc của hệ [5]. Tuy nhiên, phần lớn các mô hình này chỉ phù hợp trong điều kiện dao động biên độ nhỏ và chưa phản ánh đầy đủ các hiệu ứng phi tuyến xuất hiện trong thực tế. Khi hệ làm việc ở biên độ dao động lớn, phi tuyến hình học do biến dạng lớn của dầm có thể ảnh hưởng đáng kể đến tần số riêng và đáp ứng động lực học của hệ [6]. Đồng thời, vật liệu áp điện dưới tác dụng của ứng suất hoặc

*Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* 2582019113@e.tlu.edu.vn (Hảo, N. M.)

điện trường lớn cũng có thể xuất hiện đặc tính phi tuyến vật liệu, làm thay đổi mối liên kết cơ-điện của hệ [7]. Một số nghiên cứu tiếp theo đã xem xét ảnh hưởng của phi tuyến đối với dao động của dầm áp điện và hệ thu thập năng lượng [8, 9]. Ngoài ra, các nghiên cứu về dao động kỹ thuật và hệ thu thập năng lượng áp điện cũng đã được trình bày trong các tài liệu chuyên khảo và công trình nền tảng [10, 11]. Các mô hình áp điện có xét liên kết cơ-điện và ảnh hưởng của trường điện cũng đã được phát triển trong các nghiên cứu gần đây [12, 13]. Bên cạnh đó, một số công trình mới đã khảo sát đặc tính phi tuyến và khả năng phát điện của hệ áp điện thông qua mô hình số và thực nghiệm [14, 15]. Tuy nhiên, ảnh hưởng đồng thời của phi tuyến hình học và phi tuyến vật liệu đối với dao động tự do của dầm công xôn áp điện vẫn chưa được làm rõ đầy đủ.

Trong những năm gần đây, nhiều công trình đã mở rộng mô hình dầm áp điện bằng cách xét đến phi tuyến hình học hoặc phi tuyến vật liệu nhằm nâng cao độ chính xác của mô hình [16, 17]. Các phương pháp phân tích như Harmonic Balance Method (HBM), Multiple Scale Method (MSM) và phương pháp tiếp tục số đã được áp dụng rộng rãi để khảo sát đáp ứng phi tuyến và đặc tính cộng hưởng của hệ [18, 19]. Bên cạnh đó, các nghiên cứu về bộ thu năng lượng áp điện dạng dầm công xôn cũng cho thấy sự đa dạng về cấu hình, cơ chế phi tuyến và phương pháp phân tích được sử dụng trong lĩnh vực này [20]. Phần lớn các nghiên cứu mới chỉ xem xét riêng rẽ từng cơ chế phi tuyến hoặc tập trung vào bài toán dao động cưỡng bức và tối ưu hóa hiệu suất thu thập năng lượng, công trình nghiên cứu với mô hình tập trung trong điều kiện cộng hưởng chứ chưa xét đến bài toán xây dựng thiết lập phương trình của hệ liên tục [21, 22]. Bên cạnh các nghiên cứu tập trung trực tiếp vào dầm áp điện, một số công trình gần đây cũng đã khảo sát đặc tính dao động của các kết cấu dầm composite và dầm vật liệu biến thiên [23]. Các nghiên cứu này cho thấy đặc tính vật liệu, cấu hình kết cấu, tỷ lệ hình học và điều kiện biên có ảnh hưởng đáng kể đến tần số dao động riêng và đáp ứng động lực học của dầm [24, 25]. Đặc biệt, các phương pháp giải tích và số được sử dụng để mô tả hiệu quả đặc tính dao động của dầm có cấu trúc phức tạp, cung cấp cơ sở quan trọng cho việc xây dựng các mô hình động lực học của dầm composite và dầm áp điện. Các nghiên cứu đồng thời xét phi tuyến hình học, phi tuyến vật liệu và dao động tự do của dầm công xôn áp điện vẫn còn tương đối hạn chế. Đồng thời, ảnh hưởng của sự tương tác giữa hai cơ chế phi tuyến đến quan hệ tần số-biên độ và đặc tính liên kết điện-cơ của hệ chưa được đánh giá một cách hệ thống.

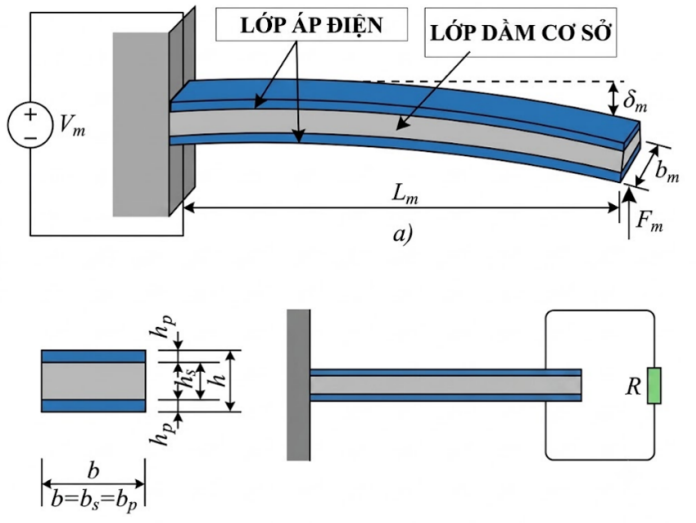
Xuất phát từ những khoảng trống nghiên cứu trên, bài báo này xây dựng mô hình cơ-điện phi tuyến của dầm công xôn áp điện Euler-Bernoulli bằng cách kết hợp quan hệ biến dạng von Kármán và mô hình vật liệu áp điện phi tuyến. Hệ phương trình liên kết được thiết lập trên cơ sở nguyên lý Hamilton mở rộng và được rút gọn bằng phương pháp Ritz-Galerkin. Bài toán dao động tự do sau đó được giải bằng phương pháp cân bằng điều hòa bậc nhất nhằm khảo sát ảnh hưởng của các tham số phi tuyến đến đặc tính dao động và quan hệ tần số-biên độ của hệ. Kết quả nghiên cứu góp phần hoàn thiện cơ sở lý thuyết về động lực học phi tuyến của dầm áp điện, đồng thời cung cấp cơ sở khoa học cho việc thiết kế và tối ưu hóa các kết cấu áp điện làm việc trong điều kiện dao động biên độ lớn.

2. Hệ phương trình liên kết cơ điện của dầm áp điện phi tuyến

Xét Hình 1 có kết cấu dầm công xôn có 2 lớp áp điện là dầm mỏng có chiều dài L, chiều rộng b, gồm dầm cơ sở dày h_s và hai lớp áp điện dày h_p. Trường dịch chuyển tại một điểm (x, z) được biểu diễn qua độ dịch chuyển dọc trục $u(x, t)$ và độ võng $w(x, t)$ tại trục trung hòa [4, 5].

$$u_z(x, z, t) = w(x, t) \tag{1}$$

$$u_x(x, z, t) = \frac{1}{2}(w')^2 - z\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \tag{2}$$



Hình 1. Mô hình dầm công xôn áp điện

Sử dụng lý thuyết biến dạng phi tuyến Green-Lagrange (Von Karman strains) [1, 2]:

$$S_1 = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3}$$

Biến dạng tại các lớp tính từ trục trung hòa là ϵ_0 và độ võng là κ:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_0 &= u' + \frac{1}{2}(w')^2; \quad \kappa = w'' \end{aligned} \tag{4}$$

Thay công thức (3) vào công thức (4), thu được:

$$S_1 = \epsilon_0 - z\kappa \tag{5}$$

Công biến dạng W_s tuân theo định luật Hooke [5], được xác định bởi:

$$W_s = \frac{1}{2}E_s S_1^2 = \frac{1}{2}E_s(\epsilon_0 - z\kappa)^2 \tag{6}$$

Hàm Enthalpy điện $\bar{H}_e$ xét đến số hạng bậc cao của biến dạng để mô tả tính phi tuyến vật liệu áp điện, được xác định như sau:

$$\bar{H}_e = \frac{1}{2}c_{11}^E S_1^2 + e_{31}S_1E_3 - \frac{1}{2}\epsilon_{33}E_3^2 + \frac{1}{4}\alpha_2 S_1^4 \tag{7}$$

Động năng T biểu diễn dưới dạng:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L m\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \dot{z}_b(t)\right)^2\right]dx \tag{8}$$

Công biến dạng toàn phần (W_{el}):

$$W_{el} = \int_{V_s} W_s dV + \int_{V_p} \bar{H}_e dV \tag{9}$$

Công biến dạng của lớp dầm cơ sở và lớp áp điện lần lượt được biểu diễn bởi:

$$W_s = \frac{1}{2} E_s (\epsilon_0 - z\kappa)^2 = \frac{1}{2} E_s (\epsilon_0^2 - 2\epsilon_0 z\kappa + z^2\kappa^2) \tag{10}$$

$$\bar{H}_e = \frac{1}{2} c_{11}^E (\epsilon_0 - z\kappa)^2 + e_{31}(\epsilon_0 - z\kappa)E_3 - \frac{1}{2}\epsilon_{33} E_3^2 + \frac{1}{4}\alpha_2 (\epsilon_0 - z\kappa)^4 \tag{11}$$

Thay thế công thức (10), (11) vào công thức (9) thu được công biến dạng toàn phần của dầm áp điện:

$$W_{el} = \int_0^L \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_{A_s} \frac{1}{2} E_s (\epsilon_0^2 - 2\epsilon_0 z\kappa + z^2\kappa^2) dA + \\ \displaystyle\int_{A_p} \frac{1}{2} c_{11}^E (\epsilon_0 - z\kappa)^2 + e_{31}(\epsilon_0 - z\kappa)E_3 - \frac{1}{2}\epsilon_{33} E_3^2 + \frac{1}{4}\alpha_2 (\epsilon_0 - z\kappa)^4 dA \end{array} \right] dx \tag{12}$$

với:

$$EA = \int_{A_s} E_s dA + \int_{A_p} c_{11}^E dA = \mathrm{E_s bh_s + 2c_{11}^E bh_p} \tag{13}$$

$$EI = \int_{A_s} E_s z^2 dA + \int_{A_p} c_{11}^E z^2 dA \tag{14}$$

Thay công thức (13), (14) vào công thức (12) và tích phân theo mặt cắt A-A thu được:

$$W_{el} = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} EA \left[u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right]^2 + \frac{1}{2} EI (w'')^2 + \frac{1}{4} K_1 (w'')^4 - \vartheta v w'' - \frac{1}{2} C_p v^2 \right\} dx \tag{15}$$

Công ảo W_{nc} bao gồm công cản nhớt và công tiêu tán trên điện trở tải R [4, 5]:

$$W_{nc} = \int_0^L -c_t \dot{w} w dx + q(t)v \tag{16}$$

Nguyên lý Hamilton [1, 5] được áp dụng như sau:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta W_{el} + \delta W_{nc}) dt = 0 \tag{17}$$

với điều kiện các biến phân thành phần $\delta u, \delta w, \delta v_p$ bằng 0 tại các thời điểm biên t_1, t_2 [3].

Thực hiện biến phân động năng δT và tích phân từng phần theo thời gian t ($\delta u|_{t_1}^{t_2} = 0$ & $\delta w|_{t_1}^{t_2} = 0$) [4, 5], thu được:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = -\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \delta w \right] dx dt \tag{18}$$

Biến phân thế năng / Công biến dạng (δW_{el}), áp dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp cho từng số hạng, thu được:

$$\delta W_{el} = \int_0^L \left[\begin{array}{l} EA\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\delta\frac{\partial u}{\partial x} + EA\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial w}{\partial x}\delta\frac{\partial w}{\partial x} \\ + \left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \vartheta v_p + \alpha_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3\right)\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\vartheta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_p v_p\right)\delta v_p \end{array} \right] dx \tag{19}$$

Tích phân từng phần công thức (19), thu được dạng rút gọn của δW_{el} [2], xác định bởi:

$$\delta W_{el} = \int_0^L \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \vartheta v_p + \alpha_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[EA\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right]\right)\delta w \\ - \frac{\partial}{\partial x}\left[EA\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\right]\delta u - \left(\vartheta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_p v_p\right)\delta v_p \end{array} \right\} dx \tag{20}$$

Biến phân Công ảo (δW_{nc}) bao gồm lực cản nhớt phân bố và công sinh ra trên tải điện. Để đưa điện tích $q(t)$ vào chung một tích phân không gian theo dx, phân bố đều biến phân $q(t)\delta v_p$ trên chiều dài L:

$$\delta W_{nc} = -\int_0^L c_t\frac{\partial w}{\partial t}\delta w dx + q(t)\delta v_p = \int_0^L \left[-c_t\frac{\partial w}{\partial t}\delta w + \frac{q(t)}{L}\delta v_p\right] dx \tag{21}$$

Thay công thức (21), (20), (18) vào công thức (17) thành một tích phân duy nhất trên toàn miền (x, t):

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) - c_t\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \vartheta v_p + \alpha_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3\right] \\ + \frac{\partial}{\partial x}\left[EA\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right] \end{array} \right]\delta w \\ + \left[-m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left[EA\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\right]\right]\delta u + \left[\vartheta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_p v_p + \frac{q(t)}{L}\right]\delta v_p \end{array} \right\} dxdt = 0 \tag{22}$$

Từ công thức (22) phương trình dao động dọc trục và uốn ngang của dầm nghiên cứu, lần lượt được xác định bởi:

- Phương trình dao động dọc trục:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[EA\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\right] = 0 \tag{23}$$

- Phương trình dao động uốn ngang:

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_t\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \vartheta v_p + \alpha_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[EA\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right] = -m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{24}$$

Trường điện được xác định bởi tích phân biểu thức hệ số của δv_p dọc theo chiều dài L:

$$\int_0^L \left(\vartheta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_p v_p + \frac{q(t)}{L}\right) dx = 0 \Rightarrow q(t) = -\vartheta\left[\frac{\partial w(L,t)}{\partial x} - \frac{\partial w(0,t)}{\partial x}\right] - C_p L v_p(t) \tag{25}$$

Đạo hàm phương trình (25) theo thời gian t chúng tôi thu được dòng điện tức thời

$$i(t) = -\vartheta\left[\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x \partial t}\right] - C_p L \frac{\partial v_p(t)}{\partial t} \tag{26}$$

Kết hợp với định luật mạch điện qua điện trở tải $i(t) + \dfrac{v_p(t)}{R} = 0$, từ (26) có phương trình đạo hàm riêng cho mạch điện ngoài:

$$C_p L \frac{\partial v_p(t)}{\partial t} + \frac{1}{R} v_p(t) + \vartheta\left[\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x \partial t}\right] = 0 \tag{27}$$

Sử dụng phương pháp Ritz-Galerkin cho phương trình (24) và (27) với các điều kiện biên cụ thể như sau [7, 9]:

- Tại đầu ngàm (độ võng bằng 0 và góc xoay bằng 0):

$$x_1 = 0: \quad w_1(0,t) = 0; \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(0,t) = 0$$

- Tại đầu tự do (mô men bằng 0, lực cắt bằng 0):

$$x = L: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t) = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L,t) = 0$$

Chuyển vị do biến dạng được khai triển theo các hàm riêng như sau [9]:

$$w(x,t) = X(x)y(t) \tag{28}$$

Hàm riêng có biểu thức nghiệm như sau:

$$X(x) = C_1 \cos\left(\lambda\frac{x}{l}\right) + C_2 \sin\left(\lambda\frac{x}{l}\right) + C_3 \cosh\left(\lambda\frac{x}{l}\right) + C_4 \sinh\left(\lambda\frac{x}{l}\right) \tag{29}$$

Điều kiện trực giao sau khi khai triển biểu thức (29):

$$\cos\lambda \cosh\lambda + 1 = 0 \tag{30}$$

Xác định tần số riêng qua biểu thức không thứ nguyên:

$$\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} = \frac{1{,}875^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} = 3{,}516\sqrt{\frac{EI}{l^4\mu}} \tag{31}$$

Theo Erturk và Inman, hàm riêng ở tần số cơ bản ở mode dao động thứ nhất ($\lambda_1 = 1{,}875$):

$$X(x) = \left[\cosh\frac{\lambda_1 x}{L} - \cos\frac{\lambda_1 x}{L} - \lambda^*\left(\sinh\frac{\lambda_1 x}{L} - \sin\frac{\lambda_1 x}{L}\right)\right] \tag{32}$$

Thay phương trình (32) vào (28):

$$w(x,t) = \left[\cosh\frac{\lambda_1 x}{L} - \cos\frac{\lambda_1 x}{L} - \lambda^*\left(\sinh\frac{\lambda_1 x}{L} - \sin\frac{\lambda_1 x}{L}\right)\right] y(t) \tag{33}$$

Đạo hàm công thức (28) thu được:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= X''(x)y(t)\\ \frac{\partial w}{\partial x} &= X'(x)y(t)\end{aligned} \tag{34}$$

Thay công thức (34) vào công thức (24), phương trình dao động uốn của dầm nghiên cứu có dạng

$$\underbrace{\left(\int_0^L mX^2dx\right)}_{M}\ddot{y}(t) + \underbrace{\left(\int_0^L c_tX^2dx\right)}_{c_f}\dot{y}(t) + \underbrace{\left(\int_0^L EI(X'')^2dx\right)}_{K}y(t) +$$
$$\underbrace{\left(\int_0^L 3\alpha_2(X'')^4dx + \frac{EA}{2L}\left[\int_0^L (X')^2dx\right]^2\right)}_{K_1}y^3(t) \underbrace{-\left(\int_0^L \vartheta X''dx\right)}_{\theta}v_p(t) = -\underbrace{\left(\int_0^L mXdx\right)}_{M_1}\ddot{z}(t) \tag{35}$$

Viết lại biểu thức (35):

$$M\ddot{y}(t) + c_f\dot{y}(t) + Ky(t) + K_1y^3(t) - \theta v_p(t) = -M_1\ddot{z}(t) \tag{36}$$

Thay (34) vào (27), thu được:

$$C_pL\frac{dv_p(t)}{dt} + \frac{1}{R}v_p(t) + \vartheta\left[X'(L) - X'(0)\right]\dot{y}(t) = 0 \tag{37}$$

trong đó:

$$\theta = -\vartheta\int_0^L X''(x)dx = -\vartheta\left[X'(L) - X'(0)\right] \tag{38}$$

Thay (38) vào (37):

$$C_p\frac{dv_p(t)}{dt} + \frac{v_p(t)}{R} = \theta\dot{y}(t) \tag{39}$$

trong đó:

$$\begin{aligned}&I_{4p} = \int z^4dA; \quad M = \rho AL; \quad c_f = c_tL; \quad K = 12{,}3624\frac{EI}{L^3}\\ &K_1 = 0{,}8087\frac{EA}{L^3} + 358{,}94\frac{E_{nl}I_{4p}}{L^7}; \quad \theta = -2{,}756\frac{\vartheta}{L}; \quad M_1 = 0{,}7830\rho AL\end{aligned} \tag{40}$$

3. Phương pháp cân bằng điều hòa bậc nhất (HBM) cho hệ thu thập năng lượng với phi tuyến vật liệu

Với hệ dao động tự do phi tuyến, giả thiết chuyển vị cơ học và kích thích điện áp đến từ biến đổi cơ học mang tính điều hòa. Trong HBM bậc nhất, các thành phần điều hòa bậc cao được bỏ qua, chỉ giữ lại thành phần cơ bản.

$$\begin{aligned}y(t) &= A\cos(\omega t)\\ v(t) &= V_c\cos(\omega t) + V_s\sin(\omega t)\end{aligned} \tag{41}$$

Thay các biểu thức của chuyển vị và điện áp vào phương trình vi phân của mạch điện, sau đó nhóm các hệ số theo (sin(ωt)) và (cos(ωt)), sau khi giải hệ phương trình đại số xác định các hệ số điện áp.

$$V_s = \frac{\omega R\theta A}{1+(\omega RC_p)^2}$$
$$V_c = -\frac{\omega^2 R^2 C_p \theta A}{1+(\omega RC_p)^2} \tag{42}$$

Thay (42) vào phương trình (41) thu được điện áp:

$$V(t) = -\frac{\theta A C_p R^2 \omega^2}{1+(RC_p\omega)^2}\cos\omega t + \frac{\theta A\omega R}{1+(RC_p\omega)^2}\sin\omega t \tag{43}$$

Thay (41) và (43) vào phương trình (36) xét trường hợp dầm dao động tự do

$$-MA\omega^2\cos(\omega t) + KA\cos(\omega t) + K_1\left(\frac{3}{4}A^3\cos(\omega t)\right) - \theta\left(V_c\cos(\omega t) + V_s\sin(\omega t)\right) = 0 \tag{44}$$

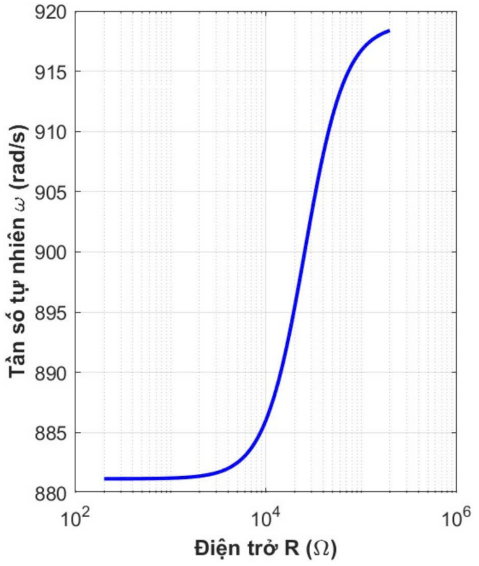
Sau khi nhóm các hệ số theo (sin(ωt)) và (cos(ωt)), áp dụng phương pháp cân bằng điều hòa (cho hệ số của cos và sin đồng thời bằng 0) cho phương trình (44), tần số tự nhiên của dầm được xác định bởi:

$$\omega^2 = \frac{K}{M} + \frac{3}{4}\frac{K_1}{M}A^2 + \frac{1}{M}\frac{\theta^2 C_p R^2\omega^2}{1+(RC_p\omega)^2} \tag{45}$$

$$V_s = 0 \tag{46}$$

4. Khảo sát số kiểm nghiệm kết quả

Trong nghiên cứu này, khảo sát số được thực hiện dựa trên bộ thông số hình học, vật liệu và cơ-điện sau: chiều dài L = 55,0 mm, chiều rộng b = 31,8 mm, bề dày lớp dầm chủ t_s = 140 µm, và bề dày mỗi lớp áp điện t_p = 270 µm. Khối lượng riêng của lõi đồng thau và lớp gốm áp điện lần lượt là ρ_s = 7165 kg/m^3 và ρ_p = 7800 kg/m^3. Độ cứng đàn hồi tương ứng là c_s = 100 GPa và c_{11}^E = 66 GPa. Lớp áp điện có hằng số cơ-điện hiệu dụng e_{31} = -14 C/m^2 và độ thẩm thấu điện môi ε_{33} = 1500ε_0 F/m [15]. Từ (40) thông số của mô hình tập trung được xác định bao gồm: M = 7,14 × 10^{-3} kg, K = 4105,8 N/m, K_1 = 7,67 × 10^9 N/m^3, c_t = 0,218 N·s/m, θ = -4,57 × 10^{-3} N/V, C_p = 4,30 × 10^{-8} F.

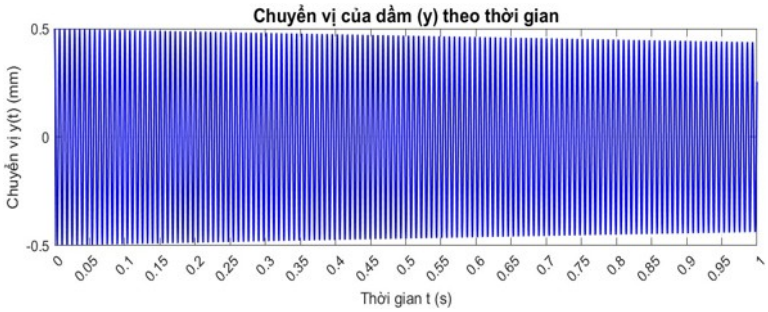


Hình 2. Ảnh hưởng của điện trở tải R đến tần số tự nhiên

Từ công thức (45), khảo sát giá trị tần số tự nhiên theo sự thay đổi của điện trở tải R, điện dung C_p và hệ số cơ-điện θ. Như được thể hiện trên Hình 2 cho thấy khi điện trở R trong dải 10^2 Ω–10^3 Ω tần số thay đổi không đáng kể, ngược lại khi R tăng đến 3000 vùng trung gian tần số tăng nhanh và dần bão hòa ở R = 130 kΩ lớn. Về mặt vật lý, sự thay đổi của R làm thay đổi trạng thái điện

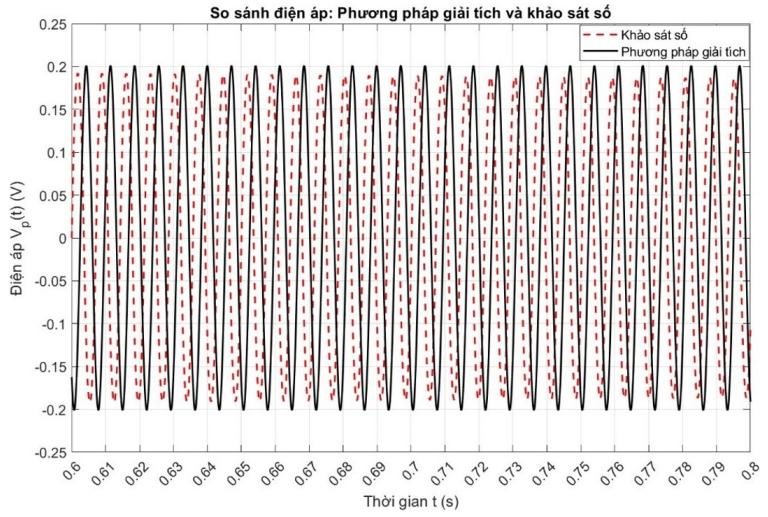
của mạch, từ đó ảnh hưởng đến điện áp áp điện và đáp ứng cơ-điện tác dụng lên dầm. Phản hồi này dẫn đến sự thay đổi tần số dao động tự do. Xu hướng bão hòa ở vùng R lớn cho thấy khi điện trở tiếp tục tăng, trạng thái điện của hệ tiến tới giới hạn mà sự thay đổi thêm của R không còn làm thay đổi đáng kể đáp ứng cơ-điện. Do đó, trong phạm vi tham số khảo sát, R là tham số điện có độ nhạy lớn nhất đối với tần số dao động tự do của hệ.

Kết quả khảo sát cho thấy tần số dao động tự do của dầm thay đổi theo điện trở tải R, với mức biến thiên rõ rệt trong vùng điện trở trung gian và có xu hướng ổn định khi R tăng. Xu hướng này phù hợp với kết quả đã được công bố đối với dầm áp điện, trong đó tần số tự nhiên của kết cấu có phần tử áp điện phụ thuộc vào điều kiện tải điện; hai trạng thái giới hạn ngắn mạch và hở mạch tương ứng với các tần số đặc trưng khác nhau [15]. Kết quả đối chiếu cho thấy mô hình hiện tại có sự nhất quán về mặt vật lý trong việc mô tả ảnh hưởng của tải điện đến đặc tính tần số.



Hình 3. Đáp ứng chuyển vị của dầm theo thời gian

Để đánh giá trực tiếp đáp ứng dịch chuyển và điện áp của hệ liên kết cơ-điện trong trường hợp dao động tự do theo khảo sát số hai phương trình (36) và (39). Trong phần khảo sát này biên độ ban đầu được chọn là 0,5 mm với điện trở tải $R = 100\ \Omega$. Như được thể hiện trên Hình 3 đáp ứng dịch chuyển là hàm tuần hoàn và giảm nhẹ theo thời gian do ảnh hưởng của hệ số cản có trong thành phần điện. Kết quả cho thấy quá trình suy giảm dao động cơ học gắn liền với quá trình chuyển đổi và tiêu tán năng lượng qua đó thể hiện rõ vai trò của liên kết cơ-điện trong đáp ứng tự do của hệ. Kết quả này khẳng định mô hình đã mô tả đáp ứng dao động tự do của dầm, đồng thời làm rõ vai trò của hiệu ứng tiêu tán điện-cơ trong sự suy giảm biên độ theo thời gian.



Hình 4. So sánh kết quả điện áp đầu ra của khảo sát số và phương pháp giải tích

Như được thể hiện trên Hình 4, nghiệm giải tích và kết quả khảo sát số có sự phù hợp tốt về tần số dao động trong khoảng 0,6–0,8 s. Nghiệm giải tích duy trì dao động tuần hoàn với biên độ gần như không đổi do được biểu diễn dưới dạng hàm điều hòa gồm thành phần ($\cos(\omega t)$), trong đó biên độ không đổi theo thời gian. Ngược lại, kết quả khảo sát số cho thấy biên độ điện áp suy giảm nhẹ theo thời gian. Mặc dù cản cơ học được bỏ qua, hệ vẫn tồn tại cơ chế tiêu tán năng lượng thông qua điện trở tải R, làm cho năng lượng của hệ giảm dần và dẫn đến sự suy giảm biên độ trong nghiệm số. Do đó, sự khác biệt về biên độ giữa hai kết quả chủ yếu phản ánh sự khác nhau giữa nghiệm điều hòa lý tưởng của phương pháp giải tích và đáp ứng số có xét đến quá trình tiêu tán năng lượng của hệ ghép cơ-điện.

5. Kết luận

Nghiên cứu này đã xây dựng mô hình cơ-điện phi tuyến của dầm công xôn áp điện Euler-Bernoulli trên cơ sở xét đồng thời phi tuyến hình học và phi tuyến vật liệu, trong đó biến dạng von Kármán được kết hợp với mô hình vật liệu áp điện phi tuyến. Hệ phương trình liên kết cơ-điện được thiết lập bằng nguyên lý Hamilton mở rộng và rút gọn bằng phương pháp Ritz-Galerkin, sau đó được giải bằng phương pháp cân bằng điều hòa để khảo sát dao động tự do phi tuyến. Điểm mới của nghiên cứu là làm rõ ảnh hưởng kết hợp của hai cơ chế phi tuyến đến đặc tính dao động tự do của dầm áp điện, đặc biệt là sự thay đổi của quan hệ tần số-biên độ và đặc tính liên kết cơ-điện của hệ.

Kết quả khảo sát cho thấy các tham số phi tuyến không chỉ làm thay đổi biên độ dao động mà còn ảnh hưởng trực tiếp đến tần số tự nhiên của hệ. Đặc biệt, sự thay đổi của các tham số điện làm thay đổi trạng thái liên kết cơ-điện, qua đó ảnh hưởng đến đặc tính động lực học tương đương của kết cấu. Kết quả này cho thấy việc đồng thời xét phi tuyến hình học và phi tuyến vật liệu là cần thiết để mô tả đầy đủ hơn đặc tính dao động của dầm áp điện khi làm việc ở biên độ lớn.

Kết quả nghiên cứu trong bài báo này mở ra hướng phát triển tiếp theo trong nghiên cứu hệ cơ điện trong tương lai bao gồm phân tích dao động, xác định các đáp ứng cơ-điện của dầm khi hệ chịu tác dụng của lực cưỡng bức và ngẫu nhiên.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo theo mã số đề tài B2026-XDA-06.

Tài liệu tham khảo

[1] Al Anazi, A. A., Candra, O., Chammam, A., Marhoon, H. A., Ali, I. R., Al-Kharsan, I. H., Alayi, R., Ebazadeh, Y., Aladdin, M. (2023). Modeling and investigating electric power output maximization for piezoelectric energy harvester. *AIP Advances*, 13(5):055020.

[2] Beni, Y. T. (2016). Size-dependent analysis of piezoelectric nanobeams including electro-mechanical coupling. *Mechanics Research Communications*, 75:67–80.

[3] Erturk, A., Inman, D. J. (2011). *Piezoelectric energy harvesting*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, UK.

[4] Koutsawa, Y., Giunta, G., Belouettar, S. (2013). A free vibration analysis of piezo-electric beams via hierarchical one-dimensional finite elements. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 25 (8):1009–1023.

[5] Linh, N. N., Anh, N. Đ., Mạnh, N. V. (2022). Mô hình khối lượng tập trung của bộ thu thập năng lượng có kết cấu dầm công xôn với hai lớp áp điện phi tuyến. *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ XI, Hà Nội, Tập II*, 127–136.

[6] Long, N. V., Tú, T. M., Quốc, T. H. (2021). Phân tích đặc trưng dao động của dầm FGM theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli bằng tiếp cận giải tích. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD) - ĐHXD*, 15(3V):1–15.

[7] Majeed, M. A., Benjeddou, A., Al-Ajmi, M. A. (2014). Free vibration analysis of moderately thick asymmetric piezoelectric adaptive cantilever beams using the distributed transfer function approach. *Journal of Sound and Vibration*, 333(15):3339–3355.

[8] Mao, J.-J., Zhang, W. (2018). Linear and nonlinear free and forced vibrations of graphene reinforced piezoelectric composite plate under external voltage excitation. *Composite Structures*, 203:551–565.

[9] Khang, N. V. (2006). *Dao động kỹ thuật*. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

[10] Nhân, N. T., Dương, N. N., Kiên, N. T. (2022). Phát triển phương pháp Chebyshev-Ritz phân tích dao động tự do dầm cơ tính biến thiên. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD) - ĐHXD*, 16(1V): 79–91.

[11] Shahabi, P., Ghafarirad, H., Taghvaeipour, A. (2019). Nonlinear vibration analysis of piezoelectric bending actuators: Theoretical and experimental studies. *Comptes Rendus Mécanique*, 347(12):953–966.

[12] Vaghefpour, H., Arvin, H. (2019). Nonlinear free vibration analysis of pre-actuated isotropic piezoelectric cantilever nano-beams. *Microsystem Technologies*, 25(11):4097–4110.

[13] Chen, Y., Yan, Z. (2021). Nonlinear analysis of unimorph and bimorph piezoelectric energy harvesters with flexoelectricity. *Composite Structures*, 259:113454.

[14] Zarepour, M., Hosseini, S. A. H., Akbarzadeh, A. H. (2019). Geometrically nonlinear analysis of Timoshenko piezoelectric nanobeams with flexoelectricity effect based on Eringen's differential model. *Applied Mathematical Modelling*, 69:563–582.

[15] duToit, N. E., Wardle, B. L. (2007). Experimental verification of models for microfabricated piezoelectric vibration energy harvesters. *AIAA Journal*, 45(5):1126–1137.

[16] Przybylski, J., Kuliński, K. (2022). Nonlinear vibrations of a sandwich piezo-beam system under piezoelectric actuation. *Nonlinear Dynamics*, 109(2):689–706.

[17] Choudhary, R., Rzig, I., Fotsing, E. R., Ross, A. (2025). A unified nonlinear model of piezoelectric cantilever beams with complex geometries for energy harvesting applications. *Smart Materials and Structures*, 34(2):025010.

[18] Xia, G., Zhang, S., Kang, X., Han, T., Chen, L., Lim, C. W. (2023). Performance analysis of nonlinear piezoelectric energy harvesting system under bidirectional excitations. *Composite Structures*, 324: 117529.

[19] Fan, Y., Zhang, Y., Niu, M. Q., Chen, L. Q. (2024). An internal resonance piezoelectric energy harvester based on geometrical nonlinearities. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 211:111176.

[20] Khalid, A., Redhewal, A. K., Kumar, M., Srivastav, A. (2015). Piezoelectric vibration harvesters based on vibrations of cantilevered bimorphs: A review. *Materials Sciences and Applications*, 6(9):818–827.

[21] Anh, N. D., Linh, N. N., Manh, N. V., Tuan, V. A., Kuu, N. V., Nguyen, A. T., Elishakoff, I. (2020). Efficiency of mono-stable piezoelectric Duffing energy harvester in the secondary resonances by averaging method. Part 1: Sub-harmonic resonance. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 126:103537.

[22] Linh, N. N., Nguyen, A. T., Manh, N. V., Tuan, V. A., Kuu, N. V., Anh, N. D., Elishakoff, I. (2021). Efficiency of mono-stable piezoelectric Duffing energy harvester in the secondary resonances by averaging method, Part 2: Super-harmonic resonance. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 137:103817.

[23] Hung, T. Q., Tu, T. M., Duc, D. M. (2021). Free vibration of piezoelectric FGM sandwich beam with porous core embedded in thermal environment and elastic foundation. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - HUCE*, 15(4):15–28.

[24] Nhan, N. T., Duong, N. N., Kien, N. T. (2024). Free vibration analysis of laminated composite shallow curved beam with various boundary conditions. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (JSTCE) - HUCE*, 18(3):1–18.

[25] Binh, C. T., Quoc, T. H., Huan, D. T., Hien, H. T. (2021). Vibration characteristics of rotating functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - HUCE*, 15(4):29–41.