Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, ĐHXDHN, 2026, 20 (5V): 62–75

ẢNH HƯỞNG CỦA HÌNH DẠNG HẠT TỚI ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA LỚP ĐÁ BALLAST DƯỚI TẢI TRỌNG NÉN ĐẲNG HƯỚNG

Vũ Đức Chung[a,*], Thái Hồng Nam[b]

[a]*Khoa Xây dựng Công trình thủy, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, số 55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam*
[b]*Khoa Cầu Đường, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, số 55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 06/7/2026, Sửa xong 17/10/2026, Chấp nhận đăng 26/10/2026

Tóm tắt

Lớp đá ballast là bộ phận thiết yếu trong hệ thống đường sắt, tuy nhiên phần lớn các nghiên cứu hiện nay vẫn mô phỏng hạt ballast dưới dạng hình cầu, chưa phản ánh đúng hình dạng đa diện góc cạnh trong thực tế. Trong nghiên cứu này, thuật toán DEM tiên tiến được sử dụng để mô phỏng hệ gồm 8000 hạt ballast đa diện ngẫu nhiên 16 mặt chịu tải trọng nén đẳng hướng, đồng thời so sánh với tập hợp hạt cầu tương đương. Kết quả cho thấy hệ số lấp đầy của tập hợp hạt ballast đạt giá trị cao hơn đáng kể so với tập hợp hạt cầu, chủ yếu nhờ hình dạng góc cạnh của các hạt ballast, cho phép chúng sắp xếp và lấp đầy không gian hiệu quả hơn. Dưới tải trọng nén, tập hợp hạt ballast phát triển nhiều dạng tiếp xúc khác nhau bao gồm tiếp xúc đơn, đôi và ba. Mặc dù tiếp xúc đôi và ba chiếm tỷ lệ ít hơn tiếp xúc đơn, chúng đóng vai trò chủ đạo trong việc truyền các lực lớn và quyết định khả năng chịu tải của toàn hệ. Số ràng buộc cơ học trung bình của tập hợp hạt ballast lớn hơn gấp đôi so với tập hợp hạt cầu, phản ánh mức độ khóa liên kết cao hơn và khả năng truyền tải trọng hiệu quả hơn. Các kết quả thu được góp phần làm sáng tỏ các cơ chế vi mô chi phối tính chất cơ học vĩ mô của tập hợp đá ballast đa diện, đồng thời khẳng định sự cần thiết của việc mô phỏng hình dạng hạt ballast thực tế trong các bài toán phục vụ thiết kế, bảo trì đường sắt.

Từ khoá: Phương pháp phần tử rời rạc (DEM); hạt đá ballast; đường sắt; hạt hình đa diện không đều; cấu trúc vi mô; ứng xử cơ học.

EFFECT OF PARTICLE SHAPE ON THE MECHANICAL BEHAVIOR OF BALLAST PACKINGS UNDER ISOTROPIC COMPRESSION

Abstract

The ballast layer is an essential component of railway systems. However, most existing studies still represent ballast particles as spheres, which fails to capture their actual angular polyhedral shape. In this study, an advanced DEM algorithm is employed to simulate a system of 8000 randomly generated 16-faced polyhedral ballast particles under isotropic compression, with results compared against an equivalent spherical particle packing. The results show that the packing fraction of the polyhedral assembly is significantly higher than that of the spherical assembly, due to the more efficient space-filling capability of angular particles. Under compressive loading, the polyhedral assembly develops various contact types including simple, double, and triple contacts. Although double and triple contacts occur less frequently, they play a dominant role in transmitting strong contact forces and governing the force-bearing capacity of the system. The constraint number of the polyhedral packing is more than twice that of the spherical packing, reflecting a higher degree of interlocking and more efficient load transfer. The obtained results provide further insight into the microscopic mechanisms governing the macroscopic mechanical behavior of polyhedral ballast assemblies and highlight the necessity of realistic particle shape representation in numerical modeling of railway infrastructure.

Keywords: Discrete Element Method (DEM); ballast particles; railway systems; irregular polyhedral particles; microscopic structure; macroscopic mechanical behavior.

https://doi.org/10.31814/stce.huce2026-20(5V)-05 © 2026 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Tổng quan

Hiện nay, đường sắt tốc độ cao ngày càng đóng vai trò quan trọng trong hệ thống giao thông hiện đại nhờ khả năng vận chuyển khối lượng lớn với độ an toàn và hiệu quả cao. Trong các loại kết cấu

*Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* chungvd@huce.edu.vn (Chung, V. Đ.)

đường ray hiện nay, đường ray sử dụng nền đá ballast vẫn được áp dụng rộng rãi tại nhiều quốc gia nhờ chi phí xây dựng hợp lý, quy trình thi công đơn giản, có khả năng hấp thụ rung động và tiếng ồn [1–3]. Trong hệ thống này, lớp đá ballast là một bộ phận quan trọng, có chức năng nâng đỡ tà vẹt, phân tán tải trọng từ đoàn tàu xuống nền đường, tạo lực cản theo phương ngang nhằm duy trì ổn định hình học của đường ray, đồng thời đảm bảo khả năng thoát nước cho nền đường [3–5]. Vì vậy, chất lượng và trạng thái cơ học của lớp đá ballast có ảnh hưởng trực tiếp đến độ bền, độ ổn định và tuổi thọ khai thác của hệ thống đường sắt.

Việc nghiên cứu ứng xử cơ học của vật liệu đá ballast đã được thực hiện thông qua nhiều phương pháp thực nghiệm và mô phỏng số. Các thí nghiệm trong phòng như thí nghiệm nén đẳng hướng, nén ba trục, thí nghiệm cắt có thể cung cấp các thông tin quan trọng về ứng xử cơ học vĩ mô của vật liệu [6, 7]. Tuy nhiên, do đá ballast là một hệ vật liệu rời gồm số lượng lớn các hạt có hình dạng phức tạp, việc quan sát trực tiếp các cơ chế ở quy mô hạt như sự hình thành mạng lưới tiếp xúc, sự phân bố lực hay sự thay đổi cấu trúc bên trong tập hợp hạt trong quá trình chịu tải là rất khó khăn. Bên cạnh đó, các thí nghiệm thường đòi hỏi chi phí cao, thời gian thực hiện dài và khả năng thu thập dữ liệu vi mô còn hạn chế.

Để khắc phục những khó khăn trên, nhiều nghiên cứu đã sử dụng các phương pháp mô phỏng số. Trong đó, phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method – FEM [8, 9]) cho phép phân tích ứng xử tổng thể của kết cấu đường ray nhưng thường xem lớp đá ballast như một môi trường liên tục, do đó không có khả năng mô tả đầy đủ bản chất rời rạc của vật liệu, cũng như các đặc trưng vi mô như sự sắp xếp của các hạt, mạng lưới tiếp xúc và sự truyền lực bên trong tập hợp hạt [10, 11]. Những yếu tố này lại đóng vai trò quan trọng trong việc quyết định ứng xử cơ học vĩ mô của lớp ballast [12]. Ngược lại, phương pháp phần tử rời rạc (Discrete Element Method - DEM) mô phỏng trực tiếp chuyển động và tương tác giữa các hạt riêng lẻ, cho phép khảo sát chi tiết các đặc trưng vi mô của tập hợp hạt [13, 14]. Trong nghiên cứu này, phương pháp DEM được sử dụng để phân tích sự phát triển cấu trúc vi mô của tập hợp đá ballast dưới tải trọng nén đẳng hướng, tập trung vào các đặc trưng như mạng lưới tiếp xúc, phân bố lực và sự sắp xếp của các hạt trong quá trình nén.

Hình dạng hạt được xem là một yếu tố hình học quan trọng chi phối ứng xử cơ học của toàn bộ hệ vật liệu. Đối với đá ballast, các hạt thường có hình dạng góc cạnh và bất quy tắc, tạo nên những cơ chế tương tác phức tạp mà các mô hình sử dụng hạt hình cầu không thể mô tả đầy đủ. Hình dạng hạt ảnh hưởng trực tiếp đến sự hình thành cấu trúc tiếp xúc, tính dị hướng cấu trúc và sự phát triển của mạng lưới truyền lực trong tập hợp hạt [15]. Thông qua các cơ chế vi mô này, hình dạng hạt quyết định khả năng sắp xếp và khóa liên kết giữa các hạt, từ đó chi phối các đặc trưng cơ học vĩ mô như độ rỗng, độ cứng, khả năng truyền tải ứng suất và quy luật biến dạng của vật liệu dưới tác dụng của tải trọng ngoài. Do đó, việc nghiên cứu ảnh hưởng của hình dạng hạt đến cấu trúc vi mô và đặc trưng cơ học của lớp đá ballast có ý nghĩa quan trọng trong việc làm sáng tỏ mối liên hệ giữa cơ chế tương tác ở quy mô hạt và ứng xử cơ học ở quy mô vật liệu, đồng thời góp phần nâng cao độ tin cậy của các mô hình mô phỏng số đối với nền đá ballast trong công trình đường sắt. Mặc dù vai trò của hình dạng hạt đã được ghi nhận trong nhiều nghiên cứu về vật liệu rời rạc [16, 17], phần lớn các công trình về đá ballast vẫn sử dụng mô hình hạt cầu hoặc các hạt đa diện đơn giản hóa do hạn chế về công cụ tính toán [18, 19]. Quan trọng hơn, các nghiên cứu hiện có chủ yếu tập trung vào ứng xử vĩ mô như biến dạng và sức kháng cắt, mà chưa phân tích hệ thống các cơ chế vi mô ảnh hưởng tới ứng xử vĩ mô của vật liệu [13, 20].

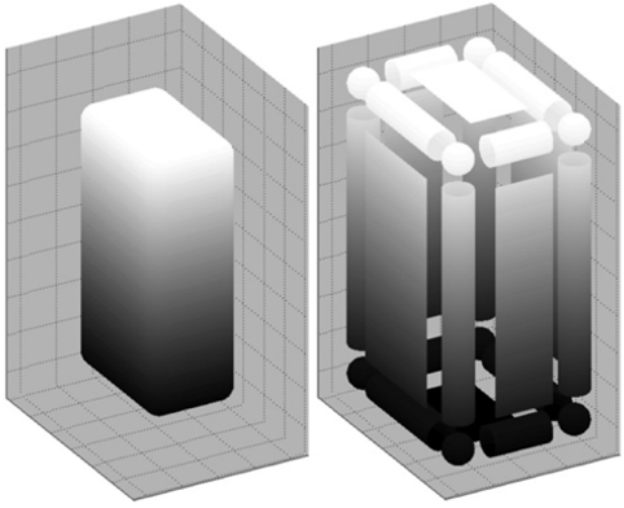
Trong bài báo này, phương pháp DEM được sử dụng để mô phỏng tập hợp gồm các hạt đá ballast dạng đa diện ngẫu nhiên 16 mặt chịu tải trọng nén đẳng hướng. Một mô hình cho hạt hình cầu cũng được xây dựng với cùng số lượng hạt, điều kiện biên để làm mẫu so sánh. Thông qua mô hình số được

xây dựng, ảnh hưởng của hình dạng hạt đến cấu trúc vi mô và ứng xử cơ học của hệ vật liệu được khảo sát một cách hệ thống. Các đặc trưng vi mô như số ràng buộc cơ học, cấu trúc tiếp xúc và mạng lưới truyền lực được phân tích nhằm làm rõ mối liên hệ giữa hình dạng hạt và các đặc tính cơ học vĩ mô của tập hợp đá ballast. Mục 2 trình bày phương pháp DEM được sử dụng để mô phỏng ứng xử của vật liệu hạt, mô tả quá trình mô phỏng hình dạng thực tế của hạt đá ballast và giới thiệu mô hình thí nghiệm nén đẳng hướng. Trong Mục 3, ảnh hưởng của hình dạng hạt đến cấu trúc vi mô và ứng xử cơ học của tập hợp đá ballast được phân tích thông qua các đại lượng đặc trưng ở cả quy mô vi mô và vĩ mô. Cuối cùng, các kết luận chính của nghiên cứu được trình bày trong Mục 4.

2. Xây dựng mô hình DEM cho tập hợp đá ballast

2.1. Mô hình hình học của hạt đá ballast

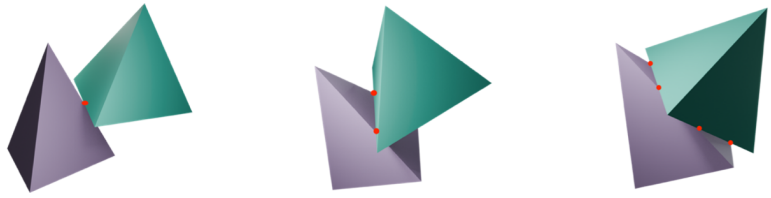
Các hạt đá ballast trong thực tế thường có hình dạng đa diện bất quy tắc với nhiều cạnh và góc sắc nhọn, được hình thành từ quá trình nghiền và phá vỡ đá tự nhiên. Hình dạng này tạo ra cơ chế khóa liên kết giữa các hạt và ảnh hưởng đáng kể đến cấu trúc vi mô cũng như ứng xử cơ học của tập hợp vật liệu. Do đó, việc mô tả hợp lý hình dạng hạt là yêu cầu quan trọng để xây dựng mô hình số có khả năng tái hiện chính xác ứng xử của lớp đá ballast. Trong nghiên cứu này, các hạt ballast được mô hình hóa dưới dạng các hạt sphero-polyhedra. Mỗi hạt được cấu tạo từ ba thành phần hình học cơ bản gồm các đỉnh, các cạnh và các mặt. Các đỉnh được biểu diễn bởi các phần tử hình cầu có bán kính nhỏ R_m, trong khi các cạnh được tạo thành từ các phần tử hình trụ nối giữa hai đỉnh và các mặt được xác định bởi một tấm nối giữa ít nhất ba đỉnh với nhau. Cách biểu diễn này cho phép mô tả được các đặc trưng góc cạnh của hạt đá ballast đồng thời duy trì hiệu quả tính toán trong quá trình phát hiện tiếp xúc và giải bài toán động lực học của hệ hạt bằng chương trình tính dựa vào phương pháp DEM. Mức độ góc cạnh của hạt được điều chỉnh thông qua bán kính R_m, với các giá trị nhỏ biểu thị góc cạnh sắc nhọn. Hình 1 giới thiệu một mô hình của hạt sphero-polyhedra và các thành phần cấu tạo nên hạt.



Hình 1. Cấu tạo hình học của một hạt đa diện dạng sphero-polyhedra có ba thành phần gồm các đỉnh, cạnh và mặt [21]

Khi hai hạt sphero-polyhedra tương tác với nhau, các tiếp xúc được xác định thông qua các phần tử hình học cấu thành hạt. Sáu dạng tiếp xúc cơ bản có thể xuất hiện bao gồm: đỉnh-đỉnh, đỉnh-cạnh, đỉnh-mặt, cạnh-cạnh, cạnh-mặt và mặt-mặt. Trong đó, các tiếp xúc đỉnh-đỉnh, đỉnh-cạnh, đỉnh-mặt và cạnh-cạnh được xem như các tiếp xúc điểm đơn với một bậc ràng buộc cơ học. Vì vậy, các tiếp xúc này sẽ được gọi là các tiếp xúc đơn. Ngược lại, tiếp xúc cạnh-mặt và mặt-mặt tương ứng tạo thành các

tiếp xúc có hai và ba bậc ràng buộc cơ học. Do đó, các tiếp xúc này lần lượt được gọi là các tiếp xúc đôi và các tiếp xúc ba [15, 16]. Việc xem xét đầy đủ các dạng tiếp xúc này cho phép mô hình phản ánh chính xác hơn mạng lưới tiếp xúc và cơ chế truyền lực trong tập hợp hạt ballast có hình dạng phức tạp. Các tiếp xúc đơn, đôi và ba được mô tả trong Hình 2, trong đó các điểm tiếp xúc được đánh dấu bằng điểm màu đỏ. Lưu ý rằng, trong liên kết ba, số điểm tiếp xúc có thể lớn hơn ba, xem Hình 2(c), nhưng luôn chỉ có ba bậc ràng buộc độc lập trong một tiếp xúc mặt-mặt. Các loại tiếp xúc này có tần suất xuất hiện và ảnh hưởng tới đặc trưng cơ học của tập hợp đá ballast khác nhau, điều này sẽ được phân tích cụ thể trong Mục 3 của nghiên cứu này.



(a) Tiếp xúc đơn (b) Tiếp xúc đôi (c) Tiếp xúc ba

Hình 2. Các loại tiếp xúc giữa hai hạt ballast đa diện trong mô hình DEM

2.2. Phương pháp DEM

Phương pháp DEM là một trong những công cụ số hiệu quả nhất hiện nay để nghiên cứu ứng xử của vật liệu rời rạc. Khác với các phương pháp liên tục, DEM mô tả vật liệu như một tập hợp các hạt riêng lẻ có khả năng dịch chuyển, quay và tương tác với các hạt lân cận thông qua các tiếp xúc cơ học. Nhờ đó, phương pháp này cho phép mô phỏng trực tiếp bản chất rời rạc của vật liệu cũng như khảo sát các cơ chế vi mô chi phối ứng xử cơ học ở quy mô vĩ mô. Trong DEM, chuyển động của mỗi hạt được xác định bằng cách giải các phương trình động lực học tịnh tiến và quay dựa trên định luật II Newton. Tại mỗi bước thời gian, các tiếp xúc giữa các hạt được phát hiện, các lực và mômen tương tác được tính toán từ mô hình lực tiếp xúc, sau đó được sử dụng để cập nhật vị trí và vận tốc của từng hạt. Quá trình này được lặp lại liên tục trong suốt quá trình mô phỏng, cho phép theo dõi sự phát triển của cấu trúc liên kết, sự phân bố lực và các biến đổi hình học của tập hợp hạt dưới tác dụng của tải trọng ngoài.

Đối với các hệ hạt có số lượng lớn và hình dạng phức tạp như đá ballast, quá trình tìm kiếm các hạt lân cận và phát hiện tiếp xúc thường chiếm phần lớn thời gian tính toán [22]. Vì vậy, trong nghiên cứu này, chương trình DEM, có tên gọi Rockable, được sử dụng để thực hiện các mô phỏng số [23]. Chương trình này được phát triển chuyên biệt cho các hạt có hình dạng đa diện và hỗ trợ các thuật toán tính toán song song trong quá trình tìm kiếm tiếp xúc cũng như tính toán tương tác giữa các hạt, qua đó nâng cao hiệu quả tính toán và cho phép mô phỏng các hệ hạt có quy mô lớn.

Để mô tả tương tác giữa các hạt tiếp xúc, nghiên cứu này sử dụng mô hình tiếp xúc đàn hồi tuyến tính kết hợp ma sát Coulomb. Trong mô hình này, lực tương tác tại tiếp xúc được phân tách thành hai thành phần gồm lực pháp tuyến f_n và lực tiếp tuyến f_t. Lực pháp tuyến f_n được xác định dựa trên độ chồng lấn giữa hai hạt và được mô hình hóa bằng hệ lò xo-giảm chấn, nhằm xét đến cả hiệu ứng đàn hồi và sự tiêu tán năng lượng trong quá trình va chạm. Trong khi đó, lực tiếp tuyến f_t được tính toán từ độ dịch chuyển tương đối theo phương tiếp tuyến và bị giới hạn bởi điều kiện ma sát Coulomb.

Mặc dù các mô hình tiếp xúc phi tuyến như Hertz-Mindlin có thể mô tả chính xác cơ học tiếp xúc giữa các hạt dạng cầu, nó không có khả năng mô tả tiếp xúc giữa các hạt ballast dạng đa diện. Mô hình đàn hồi tuyến tính được lựa chọn trong nghiên cứu này để thay thế cho mô hình Hertz-Mindlin nhờ tính đơn giản, hiệu quả tính toán cao và khả năng phản ánh tốt các đặc trưng cơ học cơ bản của

tập hợp hạt đá ballast [24]. Lực pháp tuyến f_n tại mỗi điểm tiếp xúc (khi độ chồng chéo $\delta_n < 0$) được xác định bởi

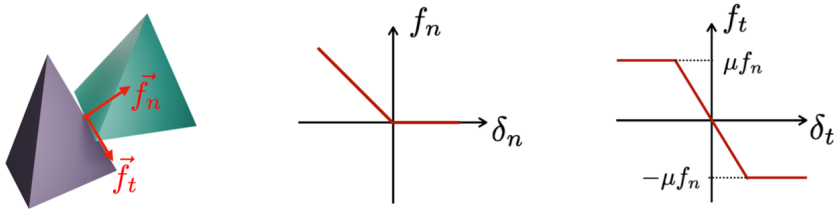
$$f_n = -k_n\delta_n - 2\alpha\sqrt{k_n m}\dot{\delta}_n \tag{1}$$

trong đó k_n là độ cứng pháp tuyến của mô hình lò xo liên kết, m là khối lượng suy giảm của hai hạt ballast khi tiếp xúc, $\dot{\delta}_n$ là vận tốc pháp tuyến tương đối giữa hai hạt tiếp xúc, α là hệ số nhớt đặc trưng cho khả năng tiêu huỷ năng lượng do ma sát nhớt tại điểm tiếp xúc. Nếu $\alpha = 1$, tiếp xúc là hoàn toàn dẻo và ngược lại, $\alpha = 0$ tiếp xúc là hoàn toàn đàn hồi. Độ chồng chéo δ_n nhận giá trị âm nếu xảy ra tiếp xúc và được định nghĩa là khoảng cách ngắn nhất giữa một đỉnh và một mặt hoặc giữa hai cạnh của hai hạt ballast.

Lực tiếp tuyến f_t được xác định bởi công thức sau [25, 26]:

$$f_t = -\min\{k_t\delta_t,\ \mu f_n\}\,\mathrm{sgn}(\dot{\delta}_t) \tag{2}$$

trong đó k_t là độ cứng tiếp tuyến của mô hình lò xo, μ là hệ số ma sát giữa các hạt, δ_t là độ dịch chuyển tương đối theo phương tiếp tuyến với mặt phẳng liên kết giữa hai hạt, $\mathrm{sgn}(\dot{\delta}_t)$ biểu thị cho chiều của vận tốc tiếp tuyến. Điều này có nghĩa rằng f_t luôn ngược chiều với vận tốc tiếp tuyến tương đối giữa hai hạt. Mô hình tiếp xúc được sử dụng trong nghiên cứu được minh họa trong Hình 3.



(a) Sơ đồ lực tiếp xúc (b) Lực pháp tuyến (c) Lực tiếp tuyến

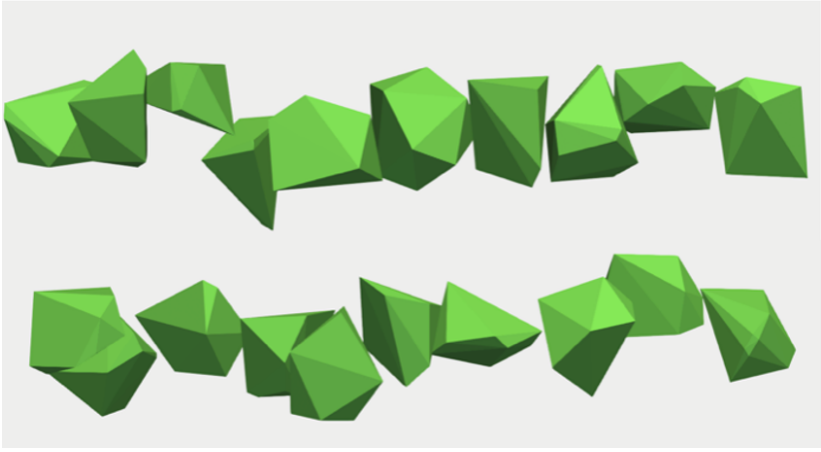
Hình 3. Sơ đồ biểu diễn lực tại điểm tiếp xúc theo phương pháp tuyến và tiếp tuyến giữa hai hạt ballast

2.3. Thiết lập mô hình mô phỏng và điều kiện biên

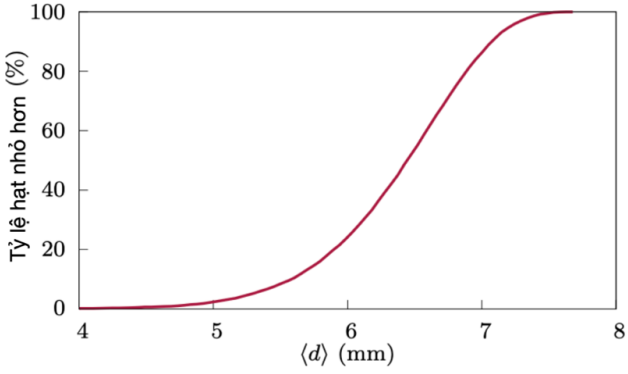
Mẫu mô phỏng được xây dựng gồm 8000 hạt đá ballast có hình dạng đa diện ngẫu nhiên 16 mặt. Các hạt được tạo ngẫu nhiên từ một thuật toán do nhóm tác giả phát triển để đảm bảo rằng các đỉnh của hạt ballast đa diện nằm trên một mặt cầu có cùng kích thước với hạt cầu được sử dụng trong mẫu so sánh. Tuỳ thuộc vào vị trí của các đỉnh, hạt đá ballast được tạo thành từ thuật toán này sẽ có kích thước và hình dạng khác nhau, điều này phản ánh được sự đa dạng về hình dạng và kích thước của đá ballast trong thực tế. Một số hình dạng đặc trưng của hạt đá ballast được thể hiện trong Hình 4. Bán kính của đỉnh $R_m = 0{,}05$ mm đủ nhỏ để cho phép tạo các hạt đá ballast có góc cạnh sắc nhọn, mô tả đúng tính chất của hạt đá ballast trong thực tế. Tuy nhiên, để đảm bảo duy trì chi phí tính toán hợp lý, độ nhám bề mặt của hạt đá được bỏ qua.

Gọi $\langle d \rangle$ là đường kính trung bình của một hạt đá ballast. Nó được định nghĩa là đường kính của hạt cầu có cùng thể tích với hạt đá ballast đa diện. Đường cong cấp phối của mẫu đá ballast được thể hiện trong Hình 5. Đường kính trung bình của các hạt đá ballast biến đổi từ 4 mm tới 7,5 mm, nhưng phần lớn các hạt có đường kính nằm trong khoảng từ 6 mm tới 7 mm. Ở cấp độ hạt đá ballast, kích thước tuyệt đối của hạt không làm ảnh hưởng tới tính chất cơ học của tập hợp hạt. Do đó, đơn vị của đường kính hạt chỉ mang ý nghĩa vật lý, không làm ảnh hưởng tới những tính chất cơ học sẽ được phân tích ở những phần tiếp theo trong nghiên cứu này. Đối với hạt hình cầu, nhóm tác giả mô phỏng các hình cầu có đường kính như nhau, chính là hình cầu được sử dụng để tạo các hạt đá ballast hình đa

diện ngẫu nhiên. Do đó, hạt đá ballast lớn nhất sẽ có đường kính trung bình gần bằng đường kính của hạt cầu.



Hình 4. Hình dạng của một số hạt đá ballast dạng đa diện 16 mặt có góc cạnh



Hình 5. Đường cong cấp phối của tập hợp đá ballast

Các thông số vật liệu và thông số của mô hình tiếp xúc được sử dụng trong mô phỏng được tổng hợp trong Bảng 1. Khối lượng riêng của hạt đá được lựa chọn $\rho = 6000$ kg/m^3, phù hợp với hầu hết các loại đá granite trong tự nhiên có mật độ $\rho > 2500$ kg/m^3. Hệ số nhớt của tiếp xúc lò xo-giảm chấn là $\alpha = 0{,}99$, ngụ ý rằng tiếp xúc trong mô phỏng gần như là dẻo hoàn toàn, cho phép tiêu huỷ năng lượng đàn hồi khi các hạt va chạm với nhau, giúp đẩy nhanh quá trình hình thành mẫu nén đẳng hướng. Hệ số ma sát giữa các hạt được lựa chọn $\mu = 0$, đây là một giả định của nghiên cứu này cho phép mẫu đá ballast hình thành một trạng thái được gọi là "trạng thái xếp chặt ngẫu nhiên" (Random Close Packing-RCP). Trạng thái này thường xuyên được thiết lập, thảo luận trong các nghiên cứu về vật liệu rời rạc trong vật lý và cơ học vật liệu [27, 28]. Nó được tạo thành khi nén đẳng hướng một tập hợp hạt rời rạc không ma sát, tạo thành mẫu có độ chặt lớn nhất trong đó các hạt sắp xếp một cách ngẫu nhiên. Trạng thái này khác hoàn toàn với mô hình tạo thành các tinh thể có độ chặt lớn nhất, khi đó các hạt tinh thể lại sắp xếp theo một quy luật nhất định. RCP mô phỏng độ chặt lớn nhất có thể đạt được của một lớp đá ballast sau quá trình đầm nén, thường được sử dụng làm mẫu ban đầu để nghiên cứu tính chất cơ học của lớp đá ballast dưới tải trọng nén ba trục, tải trọng cắt, tải trọng động.

Độ cứng pháp tuyến của lò xo trong mô hình tiếp xúc là $k_n = 10^8$ N/m, giá trị này đủ lớn để đảm bảo rằng độ chồng chéo δ_n là rất nhỏ so với kích thước của hạt. Do vậy, các hạt đá ballast được xem là cứng trong mô hình DEM. Bởi vì hệ số ma sát $\mu = 0$ nên độ cứng tiếp tuyến k_t không có ảnh hưởng

trong mô hình tính toán, nhưng để đảm bảo tính toàn vẹn của mô hình, hệ số này được lựa chọn là $k_t = 8 \times 10^7$ N/m. Một thông số rất quan trọng của thí nghiệm nén đẳng hướng là ứng suất nén ngoài p. Do mô hình lực tiếp xúc được lựa chọn là mô hình tuyến tính, nên p không có ảnh hưởng tới các đặc trưng cơ học của tập hợp đá ballast [15]. Giá trị của ứng suất nén ngoài p = 0,5 MPa, đảm bảo điều kiện giới hạn cứng của hạt $p\langle d\rangle / k_n \simeq 10^{-5} \ll 1$.

Bảng 1. Các thông số của vật liệu và mô hình lực tiếp xúc

Thông số	Ký hiệu	Giá trị	Đơn vị
Số lượng hạt	N_p	8000	-
Khối lượng riêng	ρ	6000	kg/m^3
Độ cứng pháp tuyến	k_n	10^8	N/m
Độ cứng tiếp tuyến	k_t	8×10^7	N/m
Hệ số nhớt	α	0,99	-
Hệ số ma sát	μ	0,0	-
Ứng suất nén ngoài	p	0,5	MPa

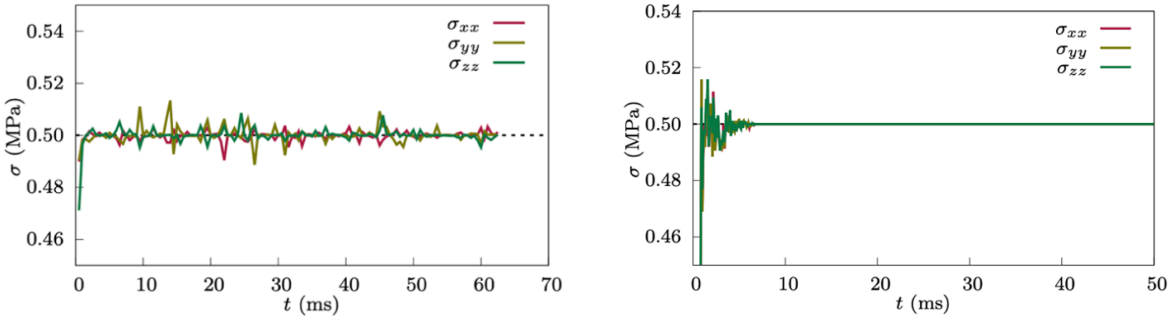
Trong mô phỏng DEM, nhằm loại bỏ ảnh hưởng của biên cứng vật lý (tường cứng), điều kiện biên tuần hoàn thường xuyên được áp dụng. Theo điều kiện này, miền mô phỏng được xem như lặp lại vô hạn theo ba phương không gian. Khi một hạt chuyển động vượt qua một mặt của miền tính toán có kích thước ($L_x \times L_y \times L_z$), hạt sẽ được đưa trở lại miền mô phỏng từ mặt đối diện với cùng vận tốc [29]. Điều kiện biên tuần hoàn cũng cho phép loại bỏ ảnh hưởng của hiệu ứng "số lượng hạt hữu hạn" trong các mô phỏng DEM, đảm bảo ứng xử cơ học của tập hợp hạt phản ánh đúng thực tế điều kiện làm việc của lớp đá ballast trong thực tế, khi số lượng hạt đá rất lớn.

2.4. Mô phỏng thí nghiệm nén đẳng hướng

Các hạt đá ban đầu được phân bố ngẫu nhiên trong miền không gian mô phỏng dạng lập phương. Vị trí của các hạt đảm bảo rằng không có tiếp xúc nào giữa các hạt tại thời điểm ban đầu. Sau đó, ứng suất nén p được tác dụng lên 6 mặt của điều kiện biên tuần hoàn. Trong quá trình nén lại, các hạt tự sắp xếp, tiếp xúc với nhau, độ chặt của tập hợp hạt đá tăng lên, đồng thời ứng suất bên trong tập hợp cũng tăng dần lên. Khi đạt trạng thái ổn định, tensor ứng suất bên trong tập hợp hạt đá phải cân bằng với tensor ứng suất nén ngoài p. Trong trường hợp vật liệu rời rạc tồn tại ở trạng thái tĩnh hoặc bán tĩnh, tensor ứng suất bên trong tập hợp vật liệu rời rạc chỉ gồm một thành phần duy nhất gây ra do lực tiếp xúc giữa các hạt vật liệu. Khi đó tensor ứng suất được xác định bởi công thức sau [30]:

$$\sigma = \frac{1}{V}(\overrightarrow{f} \otimes \overrightarrow{\ell}) \tag{3}$$

trong đó σ là tensor ứng suất, $\overrightarrow{f}$ là lực tiếp xúc tổng hợp, trong trường hợp hệ số ma sát $\mu = 0$ thì $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f_n}$, $\overrightarrow{\ell}$ là vector nhánh nối giữa trọng tâm của hai hạt đá ballast trong một tiếp xúc, $\otimes$ là toán tử tích tensor, V là thể tích của mẫu hay của hình lập phương chứa các hạt đá giới hạn bởi điều kiện biên tuần hoàn. Hình 6 thể hiện biến đổi của 3 thành phần ứng suất chính σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} bên trong tập hợp đá ballast trong quá trình nén đẳng hướng dưới tác dụng của ứng suất nén ngoài p = 0,5 MPa. Trong quá trình nén, 3 thành phần ứng suất chính có sự dao động, nhưng đều tiến dần về trạng thái ổn định với giá trị $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = p$ = 0,5 MPa. Các thành phần ứng suất tiếp đều nhận giá trị gần bằng không. Ứng suất bên trong tập hợp các hạt hình cầu (sử dụng để so sánh) biến đổi tương tự như trong tập hợp các hạt đá ballast, với các ứng suất chính dao động dần về trạng thái đẳng hướng ổn định.

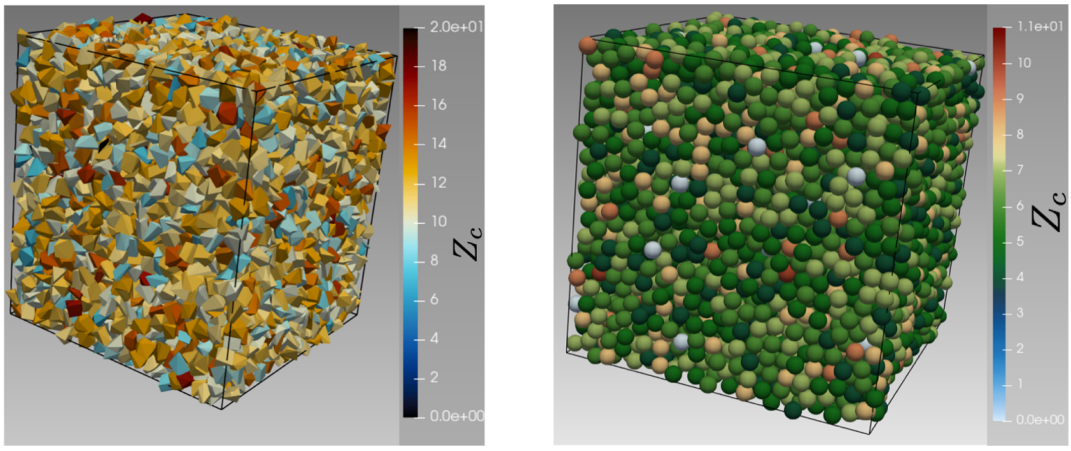


(a) Ứng suất chính trong tập hợp đá ballast

(b) Ứng suất chính trong tập hợp hạt cầu

Hình 6. Sự biến đổi của ứng suất chính bên trong tập hợp đá ballast và hạt cầu khi bị nén đẳng hướng

Sau quá trình dao động, các hạt dần đạt được trạng thái ổn định. Hình 7 mô tả trạng thái ổn định của thí nghiệm nén đẳng hướng tập hợp đá ballast và hạt hình cầu với điều kiện biên tuần hoàn. Các hạt được tô màu dựa vào giá trị của số ràng buộc cơ học trung bình Z_c, sẽ được định nghĩa trong Mục 3.2 của bài báo này. Một hạt có số Z_c lớn thì có nhiều tiếp xúc với các hạt xung quanh nó. Ngược lại, Z_c có giá trị bé cho thấy hạt đó có ít các tiếp xúc. Trong trường hợp của hạt đá ballast, Z_c lớn nhất có thể đạt tới 20, trong khi với hạt hình cầu Z_c lớn nhất là 11. Điều này phản ánh mức độ tiếp xúc với các hạt lân cận của hạt đá ballast lớn hơn hạt hình cầu.



(a) Tập hợp hạt đá ballast

(b) Tập hợp hạt hình cầu

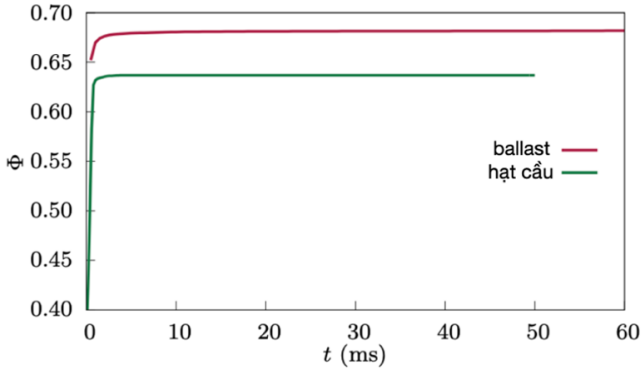
Hình 7. Tập hợp các hạt đá ballast và hình cầu dưới tải trọng nén đẳng hướng ở trạng thái ổn định

3. Ảnh hưởng của hình dạng hạt tới cấu trúc vi mô và ứng xử cơ học

3.1. Đặc trưng hình học của tập hợp hạt

Cấu trúc hình học của tập hợp hạt đóng vai trò quan trọng trong việc quyết định mạng lưới tiếp xúc và khả năng truyền lực của vật liệu rời rạc. Trong nghiên cứu này, cấu trúc hình học được đánh giá thông qua hai đại lượng đặc trưng là hệ số lấp đầy (packing fraction, Φ) và hàm phân bố xuyên tâm (Radial Distribution Function - RDF). Hệ số lấp đầy phản ánh mức độ đặc của tập hợp hạt, trong khi RDF mô tả xác suất xuất hiện của các hạt lân cận theo khoảng cách đến tâm hạt, qua đó cung cấp thông tin về mức độ trật tự trong sự sắp xếp của hệ hạt [24, 31].

Hệ số lấp đầy Φ được xác định là tỷ số của tổng thể tích các hạt V_s với thể tích của mẫu lập phương chứa các hạt V. Hình 8 thể hiện sự thay đổi của Φ trong quá trình nén đẳng hướng. Có thể nhận thấy rằng Φ tăng dần do các hạt dịch chuyển và tự sắp xếp để lấp đầy các khoảng trống trong quá trình nén đẳng hướng. Hơn nữa, hệ số ma sát $\mu = 0$ tạo điều kiện để các hạt có thể dễ dàng trượt trên nhau, tự sắp xếp để đạt được trạng thái ngẫu nhiên chặt nhất. Khi tập hợp hạt đạt trạng thái ổn định, Φ gần như không thay đổi. Với các hạt ballast, Φ có thể đạt được giá trị $\simeq 0{,}68$, trong khi với các hạt hình cầu, $\Phi \simeq 0{,}64$, giá trị này trùng khớp với những nghiên cứu trước đây về trạng thái RCP của tập hợp hạt cầu [27, 28]. Các hạt đa diện có thể có các tiếp xúc mặt-mặt, đồng thời hạt có góc cạnh nên các hạt có thể lấp đầy không gian hiệu quả hơn hạt hình cầu [16, 32].



Hình 8. Hệ số lấp đầy trong quá trình nén đẳng hướng tập hợp đá ballast và hạt cầu

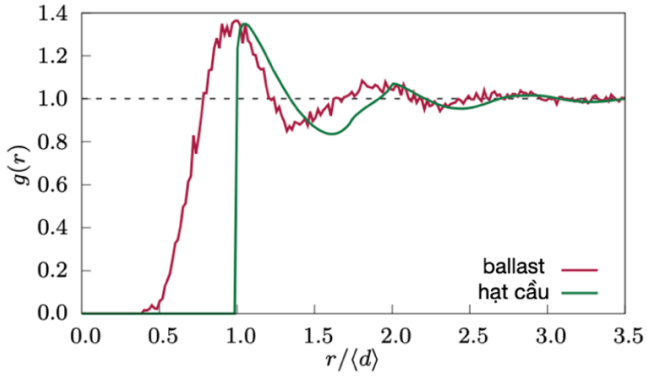
Hàm phân bố xuyên tâm RDF được định nghĩa bằng phương trình sau [31]:

$$g(r) = \frac{n(r)}{n_\infty} \tag{4}$$

Trong đó, $n(r)$ biểu thị mật độ số trung bình của các tâm hạt nằm cách tâm của một hạt tham chiếu một khoảng r, còn n_∞ là mật độ số trung bình của các tâm hạt trong toàn bộ tập hợp. Hình 9 trình bày RDF của tập hợp hạt ballast và tập hợp hạt cầu ở trạng thái ổn định sau khi bị nén đẳng hướng. Đối với tập hợp hạt cầu, giá trị $g(r)$ bằng không khi $r < \langle d \rangle$, do các hạt cứng chỉ chồng lấn lên nhau một khoảng δ_n rất nhỏ. Đỉnh thứ nhất xuất hiện tại $r \simeq \langle d \rangle$, tương ứng với khoảng cách giữa tâm của hai hạt tiếp xúc trực tiếp. Sau đó, RDF dao động với biên độ giảm dần và nhanh chóng tiến về giá trị $g(r) = 1$, phản ánh cấu trúc ngẫu nhiên đặc trưng của vật liệu rời rạc.

Đối với tập hợp đá ballast, hình dạng đa diện không đều làm thay đổi đáng kể đặc trưng của RDF. Đỉnh thứ nhất xuất hiện ở khoảng $r \simeq 0{,}9\langle d \rangle$, nhỏ hơn so với trường hợp hạt cầu, đồng thời có bề rộng lớn hơn. Điều này cho thấy khoảng cách giữa tâm của hai hạt tiếp xúc không còn đồng nhất mà phụ thuộc vào hình học của hạt và kiểu tiếp xúc giữa chúng. Sự tồn tại đồng thời của các tiếp xúc đỉnh-mặt, cạnh-mặt và mặt-mặt tạo nên phổ khoảng cách tiếp xúc rộng hơn so với tập hợp gồm các hạt cầu.

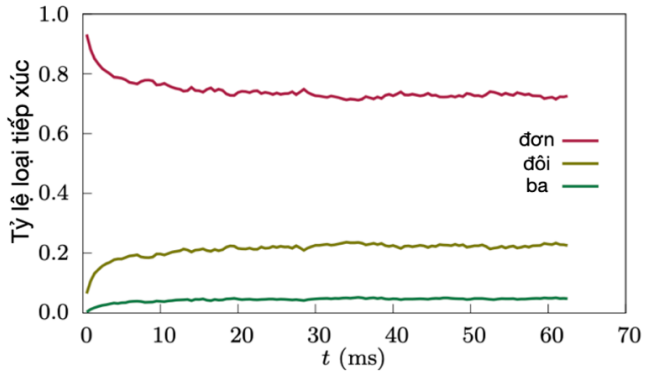
Ở các khoảng cách lớn hơn, cả hai đường cong đều dao động quanh giá trị $g(r) = 1$. Tuy nhiên, các dao động của RDF đối với đá ballast kém đều hơn so với hạt cầu, phản ánh sự phân bố không đồng nhất của các khoảng cách giữa các tâm hạt do ảnh hưởng của hình dạng góc cạnh. Kết quả này cho thấy hình dạng hạt không chỉ ảnh hưởng đến mật độ tập hợp hạt mà còn chi phối cách thức các hạt sắp xếp trong không gian, từ đó tác động đến cấu trúc tiếp xúc và cơ chế truyền lực của tập hợp đá ballast.



Hình 9. Hàm phân bố xuyên tâm RDF của tập hợp đá ballast và hạt cầu dưới tải trọng nén đẳng hướng

3.2. Cấu trúc tiếp xúc

Cấu trúc tiếp xúc là một trong những đặc trưng vi mô quan trọng quyết định khả năng truyền lực và độ ổn định của tập hợp hạt vật liệu rời rạc. Đối với các hạt đa diện, mỗi tiếp xúc có thể tạo ra một số bậc ràng buộc cơ học khác nhau tùy thuộc vào hình học tiếp xúc. Trong nghiên cứu này, các tiếp xúc được phân thành ba nhóm gồm tiếp xúc đơn, tiếp xúc đôi và tiếp xúc ba, tương ứng với một, hai và ba bậc ràng buộc cơ học như được phân tích trong Mục 2.1. Sự phân bố của các loại tiếp xúc và số ràng buộc cơ học trung bình Z_c được sử dụng để đánh giá ảnh hưởng của hình dạng hạt đến cấu trúc vi mô của tập hợp đá ballast.



Hình 10. Tỷ lệ các tiếp xúc đơn, đôi và ba trong tập hợp hạt đá ballast dưới tải trọng nén đẳng hướng

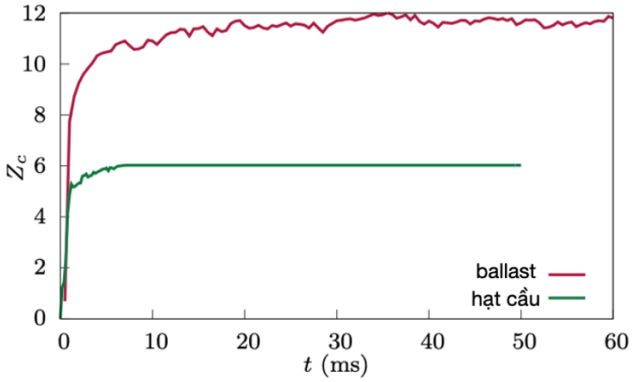
Hình 10 trình bày sự thay đổi tỷ lệ các loại tiếp xúc trong quá trình hệ hạt đá ballast tiến tới trạng thái ổn định dưới tải trọng nén đẳng hướng. Có thể thấy rằng tiếp xúc đơn luôn chiếm ưu thế với tỷ lệ khoảng 70% tổng số tiếp xúc. Tiếp xúc đôi chiếm khoảng 20%, trong khi tiếp xúc ba chỉ chiếm khoảng 10%. Trong giai đoạn đầu của quá trình nén, tỷ lệ tiếp xúc đơn giảm nhanh, đồng thời tỷ lệ tiếp xúc đôi và tiếp xúc ba tăng lên do các hạt liên tục dịch chuyển, quay và tái sắp xếp để hình thành các tiếp xúc ổn định hơn. Sau đó, tỷ lệ của ba loại tiếp xúc gần như không còn thay đổi đáng kể, cho thấy cấu trúc tiếp xúc của hệ đã đạt trạng thái ổn định. Lưu ý rằng, trong tập hợp các hạt cầu, chỉ tồn tại các tiếp xúc đơn giữa các hạt cầu, do đó tỷ lệ các tiếp xúc loại này luôn là 100%.

Số ràng buộc cơ học trung bình Z_c cho phép đánh giá mức độ liên kết giữa các hạt thông qua các loại tiếp xúc khác nhau, được định nghĩa như sau:

$$Z_c = \frac{2(N_s + 2N_d + 3N_t)}{N_p} \tag{5}$$

trong đó, N_s, N_d và N_t lần lượt là số tiếp xúc đơn, đôi và ba trong tập hợp hạt rời rạc, các hệ số 1, 2 và 3 là hệ số kể đến số bậc ràng buộc của từng loại tiếp xúc, N_p là tổng số lượng hạt trong hệ. Trong điều kiện đẳng tĩnh (isostatic condition), số ràng buộc đúng bằng số bậc tự do của hệ. Với mỗi hạt ballast có 6 bậc tự do (3 tịnh tiến, 3 quay), do đó, số ràng buộc cơ học trung bình của hệ hạt đá ballast $Z_c = 12$. Ngược lại với hạt cầu, chỉ có duy nhất 3 bậc tự do theo chuyển động tịnh tiến, vì vậy số ràng buộc cơ học trung bình $Z_c = 6$.

Hình 11 so sánh số ràng buộc cơ học trung bình của tập hợp đá ballast và tập hợp hạt cầu. Đối với hạt cầu, Z_c nhanh chóng tăng lên 6 và giữ nguyên giá trị này khi hệ đạt trạng thái ổn định. Ngược lại, tập hợp đá ballast đạt giá trị $Z_c \simeq 12$, lớn gấp hai lần so với hạt cầu. Sự gia tăng này xuất phát từ sự xuất hiện của các tiếp xúc cạnh-mặt và mặt-mặt, tương ứng với các tiếp xúc đôi và tiếp xúc ba, có khả năng khống chế đồng thời nhiều bậc tự do của chuyển động tương đối giữa hai hạt. Mặc dù các tiếp xúc đôi và tiếp xúc ba chỉ chiếm khoảng 30% tổng số tiếp xúc, chúng đóng góp đáng kể vào tổng số ràng buộc cơ học của hệ.



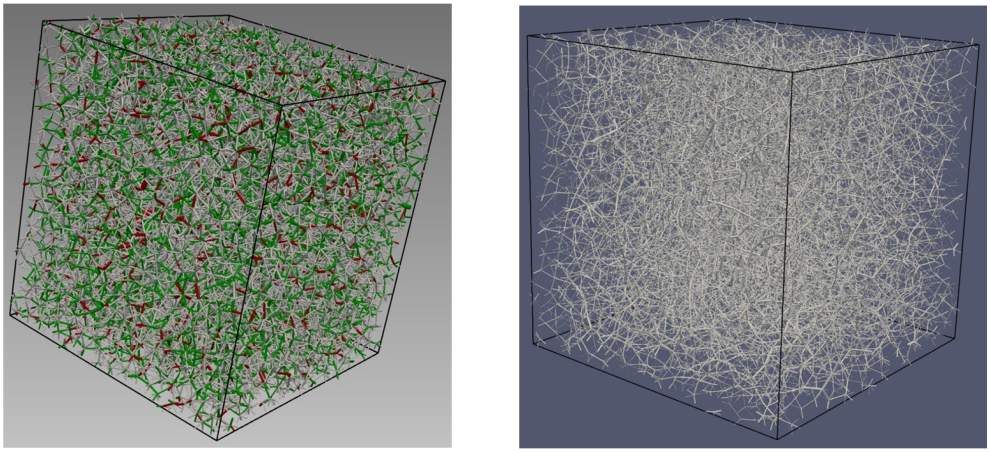
Hình 11. Số ràng buộc cơ học trung bình Z_c trong tập hợp đá ballast và hạt cầu dưới tải trọng nén đẳng hướng

Kết quả trên cho thấy hình dạng góc cạnh của đá ballast không chỉ làm tăng số lượng tiếp xúc mà còn nâng cao hiệu quả cơ học của mỗi tiếp xúc. Sự gia tăng số ràng buộc cơ học phản ánh mức độ khóa liên kết (interlocking) cao hơn giữa các hạt, từ đó tạo nên một mạng tiếp xúc ổn định và có khả năng truyền tải trọng hiệu quả hơn. Đây là cơ sở vi mô quan trọng để giải thích độ cứng và khả năng chịu tải vượt trội của lớp đá ballast so với lớp vật liệu gồm các hạt cầu.

3.3. Mạng lưới truyền lực

Mạng lưới truyền lực phản ánh sự phân bố và lan truyền tải trọng thông qua các tiếp xúc giữa các hạt, từ đó quyết định trực tiếp ứng xử cơ học của tập hợp hạt. Trong nghiên cứu này, mạng lưới truyền lực được trực quan hóa bằng các đoạn nối giữa trọng tâm các hạt tiếp xúc, trong đó độ dày của mỗi đoạn tỷ lệ với độ lớn của lực tiếp xúc. Các tiếp xúc đơn, tiếp xúc đôi và tiếp xúc ba được biểu diễn bằng các màu xám, xanh và đỏ tương ứng.

Hình 12 cho thấy mạng lưới truyền lực của tập hợp đá ballast có tính không đồng nhất. Phần lớn các tiếp xúc chỉ truyền lực nhỏ và được biểu diễn bằng các đoạn mảnh, trong khi một số ít tiếp xúc truyền lực lớn, tạo thành các chuỗi lực liên tục xuyên qua tập hợp hạt. Hiện tượng này là đặc trưng của vật liệu rời rạc, trong đó tải trọng ngoài không được phân bố đồng đều mà tập trung trên một số đường truyền lực chính. Hơn nữa, nhiều lực lớn trùng với các tiếp xúc đôi và tiếp xúc ba, cho thấy các tiếp xúc này đóng vai trò như những nút liên kết quan trọng trong mạng truyền lực. Mặc dù chỉ chiếm khoảng 30% tổng số tiếp xúc, chúng góp phần đáng kể vào việc duy trì tính liên tục và ổn định của các chuỗi lực.



(a) Lực tiếp xúc trong hệ hạt đá ballast (b) Lực tiếp xúc trong hệ hạt hình cầu

Hình 12. Mạng lưới truyền lực của tập hợp hạt ở trạng thái ổn định dưới tải trọng nén đẳng hướng. Độ dày của các đoạn nối tỷ lệ với độ lớn của lực tiếp xúc. Các tiếp xúc đơn, đôi và ba được biểu diễn lần lượt bằng màu xám, màu xanh và màu đỏ

Đối với tập hợp hạt cầu, mạng truyền lực cũng hình thành các chuỗi lực đặc trưng nhưng chỉ bao gồm các tiếp xúc đơn. Do không tồn tại các tiếp xúc cạnh-mặt và mặt-mặt, tải trọng chỉ được truyền thông qua các tiếp xúc đơn, làm giảm khả năng phân tán lực theo nhiều hướng trong không gian. So với hệ đá ballast, các chuỗi lực trong tập hợp hạt cầu có xu hướng đơn giản hơn và số lượng các nút liên kết mạnh ít hơn, dẫn đến khả năng khóa liên kết và ổn định cơ học của hệ thấp hơn. Kết quả này phù hợp với phân tích về số ràng buộc cơ học ở Mục 3.2. Hình dạng đa diện của đá ballast không chỉ làm tăng số ràng buộc cơ học mà còn tạo điều kiện hình thành các tiếp xúc có khả năng truyền tải trọng lớn. Các tiếp xúc đôi và tiếp xúc ba giúp tải trọng được phân bố qua nhiều hướng khác nhau, làm tăng mức độ liên kết của mạng truyền lực và hạn chế sự tái sắp xếp của các hạt trong quá trình nén.

4. Kết luận

Nghiên cứu này sử dụng phương pháp phần tử rời rạc (DEM) để mô phỏng ứng xử của tập hợp hạt đá ballast dạng đa diện ngẫu nhiên 16 mặt dưới tải trọng nén đẳng hướng, đồng thời so sánh với tập hợp hạt cầu tương đương nhằm làm rõ vai trò của hình dạng hạt đối với cấu trúc vi mô và ứng xử cơ học của vật liệu. Kết quả cho thấy hình dạng góc cạnh của hạt đá ballast tạo ra sự khác biệt rõ rệt về đặc trưng hình học so với hạt cầu. Hệ số lấp đầy của tập hợp hạt đa diện đạt $\Phi \simeq 0{,}68$, cao hơn so với $\Phi \simeq 0{,}64$ của tập hợp hạt cầu, phản ánh khả năng lấp đầy không gian hiệu quả hơn của các hạt góc cạnh. Hàm phân bố xuyên tâm (RDF) cũng cho thấy sự phân bố khoảng cách giữa các tâm hạt trong tập hợp đá ballast đa dạng và kém đồng nhất hơn so với hạt cầu, do sự tồn tại đồng thời của nhiều dạng tiếp xúc khác nhau.

Về cấu trúc tiếp xúc, tập hợp hạt đa diện phát triển ba dạng tiếp xúc đặc trưng gồm tiếp xúc đơn, đôi và ba, trong khi tập hợp hạt cầu chỉ có tiếp xúc đơn. Mặc dù tiếp xúc đôi và ba chiếm tỷ lệ nhỏ (khoảng 30% tổng số tiếp xúc), chúng đóng góp quyết định vào tổng số ràng buộc cơ học của hệ. Số ràng buộc cơ học trung bình của tập hợp đá ballast đạt $Z_c \simeq 12$, lớn gấp đôi so với tập hợp hạt cầu $Z_c \simeq 6$, phản ánh mức độ khóa liên kết cao hơn giữa các hạt và khả năng truyền tải trọng hiệu quả hơn. Điều này được thể hiện rõ qua mạng lưới truyền lực, trong đó các tiếp xúc đôi và ba đóng vai trò như những nút liên kết quan trọng, giúp tải trọng được phân tán theo nhiều hướng trong không gian

và tạo nên các chuỗi lực ổn định xuyên suốt tập hợp hạt.

Các kết quả thu được trong nghiên cứu này khẳng định rằng hình dạng hạt là yếu tố quan trọng chi phối đồng thời cả cấu trúc vi mô lẫn ứng xử cơ học của lớp đá ballast. Mô hình hạt cầu, dù đơn giản và tiện dụng, không phản ánh đầy đủ các cơ chế tương tác đặc trưng của hạt góc cạnh, đặc biệt là sự đa dạng của cấu trúc tiếp xúc và mức độ khóa liên kết cao giữa các hạt. Vì vậy, việc mô phỏng hình dạng thực tế của hạt đá ballast là cần thiết để xây dựng các mô hình số đáng tin cậy, phục vụ cho công tác thiết kế và dự báo ứng xử của nền đường sắt tốc độ cao. Tuy nhiên, nghiên cứu này được giới hạn ở trạng thái không ma sát ($\mu = 0$) nhằm xác lập trạng thái xếp chặt ngẫu nhiên (RCP) làm căn cứ cho các phân tích vi mô. Các nghiên cứu tiếp theo sẽ mở rộng sang điều kiện ma sát thực tế và tải trọng động nhằm phản ánh đầy đủ hơn cơ chế làm việc của lớp đá ballast trong điều kiện khai thác đường sắt tốc độ cao.

Tuyên bố về việc sử dụng trí tuệ nhân tạo tạo sinh và các công nghệ hỗ trợ bởi AI

Các tác giả xác nhận không sử dụng bất kỳ công cụ trí tuệ nhân tạo tạo sinh hoặc công nghệ hỗ trợ bởi AI nào trong quá trình chuẩn bị và hoàn thiện bản thảo.

Tài liệu tham khảo

[1] Aela, P., Powrie, W., Harkness, J., Jing, G. (2025). Discrete element modelling of railway ballast problems: An overview. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 32(4):2149–2185.

[2] Balamonica, K., Bergamini, A., Van Damme, B. (2023). Estimation of the dynamic stiffness of railway ballast over a wide frequency range using the discrete element method. *Journal of Sound and Vibration*, 547:117533.

[3] Alabbasi, Y., Hussein, M. (2021). Geomechanical modelling of railroad ballast: A review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 28(3):815–839.

[4] Mahmoud, E., Papagiannakis, A. T., Renteria, D. (2016). Discrete element analysis of railway ballast under cycling loading. *Procedia Engineering*, 143:1068–1076.

[5] Gorbunov, O., Sinsabvarodom, C., Rinchumphu, D. (2026). Hydraulic conductivity estimation for ballasted railway tracks: A systematic review. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (JSTCE) - HUCE*, 20(2):1–19.

[6] Hussaini, S. K. K., Indraratna, B., Vinod, J. S. (2016). A laboratory investigation to assess the functioning of railway ballast with and without geogrids. *Transportation Geotechnics*, 6:45–54.

[7] Buddhima, I., Yifei, S., Sanjay, N. (2016). Laboratory assessment of the role of particle size distribution on the deformation and degradation of ballast under cyclic loading. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 142(7):4016016.

[8] Phạm Ngọc, T. (2024). Ảnh hưởng của vận tốc tàu đến dao động nền đường sắt do tải trọng tàu cao tốc. *Transport and Communications Science Journal*, 75(5):1775–1788.

[9] Duc, T. L. A., Nam, P. H., My, N. V., Quang, T. D., Paolacci, F. (2024). 2D train-track-bridge interaction analysis considering the effect of ballasted tracks. *The University of Danang - Journal of Science and Technology*, 22(11B):1–7.

[10] Chen-Ming, K., Cheng-Hao, H. (2009). Two approaches of finite-element modeling of ballasted railway track. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 135(3):455–458.

[11] Kalliainen, A., Kolisoja, P., Nurmikolu, A. (2016). 3D finite element model as a tool for analyzing the structural behavior of a railway track. *Procedia Engineering*, 143:820–827.

[12] Farhang, R., Jean-Noël, R., Ali, D. (2017). Modeling granular materials: Century-long research across scales. *Journal of Engineering Mechanics*, 143(4):4017002.

[13] Khatibi, F., Esmaeili, M., Mohammadzadeh, S. (2017). DEM analysis of railway track lateral resistance. *Soils and Foundations*, 57(4):587–602.

[14] Miao, C., Zheng, J., Zhang, R., Cui, L. (2017). DEM modeling of pullout behavior of geogrid reinforced ballast: The effect of particle shape. *Computers and Geotechnics*, 81:249–261.

[15] Vu, D. C. (2023). *Quasi-static and dynamic granular flows: Scaling behavior, microstructure, and particle shape effects*. PhD Thesis, Université de Montpellier.

[16] Vu, D. C., Amarsid, L., Delenne, J.-Y., Richefeu, V., Radjai, F. (2025). Quasistatic rheology of granular materials composed of dodecahedra. *The European Physical Journal Special Topics*, 235(1):269–287.
[17] Radjai, F., Vu, D. C., Amarsid, L. (2025). Stress transmission and fabric states in granular materials. *EPJ Web of Conferences*, 340.
[18] Guo, Y., Zhao, C., Markine, V., Shi, C., Jing, G., Zhai, W. (2020). Discrete element modelling of railway ballast performance considering particle shape and rolling resistance. *Railway Engineering Science*, 28 (4):382–407.
[19] Chen, J., Vinod, J. S., Indraratna, B., Ngo, N. T., Gao, R., Liu, Y. (2022). A discrete element study on the deformation and degradation of coal-fouled ballast. *Acta Geotechnica*, 17(9):3977–3993.
[20] Ahmadi, A., Nasrollahi, K., Nielsen, J. C. O., Dijkstra, J. (2026). Dynamic vehicle–track interaction and differential settlement in a transition zone on railway ballast—An integrated 3D discrete–continuum model. *Computers and Geotechnics*, 190:107737.
[21] Richefeu, V., Mollon, G., Daudon, D., Villard, P. (2012). Dissipative contacts and realistic block shapes for modeling rock avalanches. *Engineering Geology*, 149–150:78–92.
[22] Park, E. H., Kindratenko, V., Hashash, Y. M. A. (2021). Shared memory parallelization for high-fidelity large-scale 3D polyhedral particle simulations. *Computers and Geotechnics*, 137:104008.
[23] Richefeu, V., Combe, G., Amarsid, L., Prat, R., Vanson, J.-M., Nezamabadi, S., Mutabaruka, P., Delenne, J.-Y., Radjaï, F. (2026). Advanced strategies for discrete simulations with three-dimensional R-shapes in rockable framework. *Computer Physics Communications*, 320:109997.
[24] Azéma, E., Radjai, F., Dubois, F. (2013). Packings of irregular polyhedral particles: Strength, structure, and effects of angularity. *Physical Review E*, 87(6):62203.
[25] Chung, V. D., Radjai, F. (2025). Effect of particle density on powder mixing in nuclear fuel pellet fabrication using discrete element method. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (JSTCE) - HUCE*, 19(4):18–28.
[26] Radjaï, F., Dubois, F. (2011). *Discrete-element modeling of granular materials*. ISTE; Wiley.
[27] Zaccone, A. (2022). Explicit analytical solution for random close packing in d=2 and d=3. *Physical Review Letters*, 128(2):028002.
[28] Wilken, S., Guerra, R. E., Levine, D., Chaikin, P. M. (2021). Random close packing as a dynamical phase transition. *Physical Review Letters*, 127(3):038002.
[29] Radjai, F. (2018). Multi-periodic boundary conditions and the Contact Dynamics method. *Comptes Rendus Mécanique*, 346(3):263–277.
[30] Andreotti, B., Forterre, Y., Pouliquen, O. (2013). *Granular media: Between fluid and solid*. Cambridge University Press.
[31] Nguyen, D.-H., Azéma, E., Sornay, P., Radjai, F. (2015). Effects of shape and size polydispersity on strength properties of granular materials. *Physical Review E*, 91(3):32203.
[32] Azéma, E., Radjai, F., Saussine, G. (2009). Quasistatic rheology, force transmission and fabric properties of a packing of irregular polyhedral particles. *Mechanics of Materials*, 41(6):729–741.