Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, ĐHXDHN, 2026, 20 (6V): 54–67

PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH CƠ-ĐIỆN CỦA TẤM FGM ÁP ĐIỆN CÓ BỌT RỖNG TRÊN NỀN ĐÀN HỒI KERR

Vũ Văn Thẩm[a,*]

[a]*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 14/4/2026, Sửa xong 16/8/2026, Chấp nhận đăng 04/9/2026

Tóm tắt

Bài báo phát triển một mô hình giải tích dựa trên lý thuyết tấm bậc nhất đơn giản (SFSDT) để nghiên cứu ổn định cơ-điện của tấm vật liệu áp điện có tính chất biến thiên theo chiều dày và chứa bọt rỗng (PoFGPie) đặt trên nền đàn hồi Kerr. Các tính chất vật liệu được mô tả theo quy luật hàm lũy thừa có hiệu chỉnh. Các phương trình cân bằng được thiết lập dựa trên nguyên lý thế năng toàn phần cực tiểu và được giải bằng phương pháp Navier cho tấm có bốn biên tựa khớp. Phân bố điện thế theo chiều dày được giả thiết dưới dạng kết hợp giữa hàm tuyến tính và hàm lượng giác nhằm thỏa mãn các điều kiện biên điện. Mô hình được kiểm chứng thông qua so sánh với các kết quả đã công bố. Nghiên cứu tham số được thực hiện để đánh giá ảnh hưởng của đặc trưng vật liệu, thông số hình học, nền Kerr và điện thế ngoài đến tải trọng tới hạn của tấm.

Từ khoá: ổn định cơ-điện; tấm FGM áp điện; bọt rỗng; lý thuyết tấm bậc nhất đơn giản; nền đàn hồi Kerr.

ELECTRO-MECHANICAL BUCKLING ANALYSIS OF POROUS FUNCTIONALLY GRADED PIEZOELECTRIC PLATES RESTING ON A KERR ELASTIC FOUNDATION

Abstract

This paper develops an analytical model based on the Simple First-Order Shear Deformation Theory (SFSDT) to investigate the electro-mechanical buckling of porous functionally graded piezoelectric (PoFGPie) plates resting on a Kerr elastic foundation. The material properties are assumed to vary through the thickness according to a modified power-law distribution, accounting for the effects of material gradation and porosity. The governing equations are derived from the principle of minimum total potential energy and solved using the Navier method for plates with simply supported boundary conditions on all four edges. The electric potential distribution across the thickness is assumed as a combination of linear and trigonometric functions to satisfy the electrical boundary conditions. The validity of the proposed model is verified through comparisons with previously published results. Finally, a comprehensive parametric study is conducted to evaluate the effects of material characteristics, geometric parameters, Kerr foundation parameters, and external electric potential on the critical electro-mechanical buckling load of the plate.

Keywords: electro-mechanical buckling; functionally graded piezoelectric; porosities; simple first-order shear deformation theory; Kerr-type elastic foundation.

https://doi.org/10.31814/stce.huce2026-20(6V)-05 © 2026 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Vật liệu áp điện thông minh đóng vai trò quan trọng trong khoa học vật liệu nhờ khả năng chuyển đổi giữa năng lượng cơ học và điện, đặc biệt hữu ích trong các hệ cảm biến và điều khiển. Cùng với đó, vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) được phát triển nhằm tối ưu hóa thiết kế và hạn chế hiện tượng phân tách lớp trong composite truyền thống. Kết hợp hai ưu điểm này đã dẫn đến sự ra đời của vật liệu áp điện có cơ tính biến thiên (FGPie), cho phép điều chỉnh tính chất vật liệu theo yêu cầu thiết kế và mở rộng tiềm năng ứng dụng trong các lĩnh vực kỹ thuật hiện đại.

Bên cạnh đặc tính biến thiên của vật liệu, sự xuất hiện của bọt rỗng trong quá trình chế tạo cũng ảnh hưởng đáng kể đến độ cứng và ứng xử ổn định của kết cấu FGM [1]. Đồng thời, trong nhiều bài toán thực tế, tương tác giữa kết cấu và môi trường đàn hồi xung quanh thường được mô phỏng thông

*Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* thamvv@huce.edu.vn (Thẩm, V. V.)

qua các mô hình nền như Winkler, Pasternak và đặc biệt là Kerr [2–5], vốn cho khả năng phản ánh đầy đủ hơn ảnh hưởng của nền. Theo hướng nghiên cứu này, nhiều công trình đã tập trung vào phân tích ổn định của các kết cấu FGPie dưới tác động của điều kiện biên, trường điện, tải nhiệt và nền đàn hồi. Abdollahi và cs. [6] đã khảo sát ổn định của tấm FGPie dày trong hai trường hợp mạch điện đóng và mở, đồng thời xem xét các điều kiện biên khác nhau dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT). Barati và cs. [7] đã sử dụng lý thuyết bốn ẩn chuyển vị với hàm mô tả ứng suất cắt dạng lượng giác để nghiên cứu ổn định của tấm FGPie trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak.

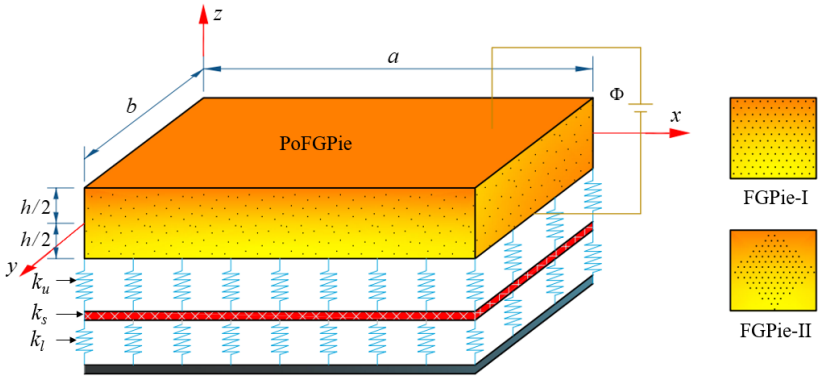
Zenkour và Aljadani [8, 9] đã phân tích ổn định của tấm FGPie bằng lý thuyết đàn hồi tựa ba chiều, đồng thời khảo sát ảnh hưởng của hệ số bọt rỗng và hiệu ứng phi cục bộ đối với bài toán ổn định nhiệt của tấm nano FGPie. Bên cạnh đó, Sheng và Wang [10] đã nghiên cứu dao động và ổn định cơ-điện của vỏ trụ FGPie chịu tác động của tải nhiệt. Mohammadimehr và cs. [11] khảo sát ổn định cơ-điện của tấm FGM tích hợp hai lớp áp điện trên nền Pasternak theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy. Mirzavand và Eslami [12] xác định nhiệt độ tới hạn gây mất ổn định của tấm sandwich FGM áp điện dựa trên lý thuyết HSDT, trong khi Zenkour [13] đã đưa ra nghiệm chính xác cho bài toán ổn định của ống trụ rỗng áp điện chịu đồng thời tác động của điện trường, nhiệt độ và tải cơ học. Gần đây, Liew và cs. [14] đã nghiên cứu hiện tượng sau ổn định nhiệt của tấm FGM tích hợp hai lớp áp điện trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy.

Tổng quan tài liệu cho thấy các nghiên cứu về ổn định của tấm áp điện có cơ tính biến thiên chủ yếu dựa trên các lý thuyết HSDT, cho độ chính xác cao nhưng đi kèm với dạng mô hình phức tạp hơn. Trong khi đó, lý thuyết SFSDT có dạng biểu diễn gọn hơn, thuận lợi cho việc xây dựng và giải các bài toán ghép trường có nhiều tham số. Đối với bài toán tấm PoFGPie trên nền đàn hồi kiểu Kerr trong nghiên cứu này, việc sử dụng SFSDT là một lựa chọn hợp lý nhằm xây dựng mô hình đủ gọn nhưng vẫn phản ánh được các đặc trưng cơ học chính của kết cấu, đặc biệt đối với các tấm có chiều dày trung bình. Tuy nhiên, theo hiểu biết của nhóm tác giả, chưa có nghiên cứu nào phân tích ổn định cơ–điện của tấm PoFGPie trên nền đàn hồi kiểu Kerr theo hướng tiếp cận này. Do đó, bài báo phát triển một mô hình giải tích cho tấm PoFGPie chữ nhật bốn biên tựa khớp (SSSS) trên nền đàn hồi Kerr.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Mô hình tấm PoFGPie trên nền Kerr

Hình 1 mô tả tấm FGM áp điện có bọt rỗng đặt trên nền Kerr với ba hệ số đặc trưng k_u, k_s và k_l. Tấm gồm hai pha vật liệu, với PZT-4 ở bề mặt trên, PZT-5H ở bề mặt dưới và chịu tác dụng của điện thế ngoài $\Phi(x, y, z)$.



Hình 1. Mô hình tấm PoFGPie đặt trên nền đàn hồi Kerr

Các tính chất vật liệu hiệu dụng của tấm FGPie được giả thiết biến thiên theo chiều dày và được xác định dựa trên quy luật lũy thừa sửa đổi [15]:

$$\mathfrak{R}(z) = \mathfrak{R}_l + (\mathfrak{R}_u - \mathfrak{R}_l)\,(z/h + 1/2\,)^p - \frac{e_0}{2}\,(\mathfrak{R}_u + \mathfrak{R}_l)\,\aleph \tag{1}$$

trong đó $\mathfrak{R}(z)$ là các tính chất hiệu dụng của vật liệu PoFGPie bao gồm: hằng số đàn hồi ($C_{ij}(z)$), hằng số áp điện ($e_{ij}(z)$) và hằng số điện môi ($\kappa_{ij}(z)$); p là chỉ số tỷ lệ thể tích; hệ số Poisson $\nu(z)$ được giả thiết không đổi theo chiều dày; $\mathfrak{R}_l(z)$ và $\mathfrak{R}_u(z)$ lần lượt là tính chất vật liệu tại bề mặt dưới và trên; e_0 là hệ số bọt rỗng; và $\aleph(z)$ là hàm phân bố bọt rỗng. Trong nghiên cứu này, hai dạng phân bố bọt rỗng được xét gồm phân bố đều (FGPie-I) với $\aleph = 1$, và phân bố đối xứng theo chiều dày (FGPie-II) với $\aleph = 1 - \dfrac{2\,|z|}{h}$.

2.2. Các hệ thức cơ bản

Để phân tích ổn định của tấm PoFGPie đặt trên nền đàn hồi Kerr, bài báo sử dụng lý thuyết tấm SFSDT.

Trường chuyển vị của một điểm bất kỳ trong tấm được biểu diễn theo [16, 17]:

$$u = u_0 - z w_{b,x}; \quad v = v_0 - z w_{b,y}; \quad w = w_b + w_s \tag{2}$$

trong đó u_0, v_0 lần lượt là chuyển vị của mặt trung bình theo các phương x và y; w_b và w_s biểu diễn các thành phần chuyển vị ngang do uốn và do cắt gây ra.

Trong nghiên cứu này, trường điện được giả thiết là trường tĩnh, do đó điện thế và các đại lượng điện không phụ thuộc vào thời gian. Phân bố điện thế theo chiều dày của tấm được xây dựng sao cho thỏa mãn phương trình Maxwell. Theo [18, 19], hàm điện thế được giả thiết như sau:

$$\Phi = -\cos(\hat{z})\,\varphi_0 + (2\hat{z}/\pi\,)\,V \quad \text{với} \quad (\hat{z} = \pi z/h\,) \tag{3}$$

trong đó V là điện áp ngoài tác dụng lên tấm, và φ_0 là điện thế tại mặt trung bình.

Trường biến dạng $\{\varepsilon\}$ được xác định từ trường chuyển vị dưới dạng:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w_s}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} - z w_{b,xx} \\ v_{0,y} - z w_{b,yy} \\ u_{0,y} + v_{0,x} - 2z w_{b,xy} \\ w_{s,x} \\ w_{s,y} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

Theo (3), véc tơ điện trường (E_x, E_y, E_z) được xác định như sau:

$$\begin{aligned} E_x &= -\Phi_{,x} = \cos(\hat{z})\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}; \quad E_y = -\Phi_{,y} = \cos(\hat{z})\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}; \\ E_z &= -\Phi_{,z} = -\left(\frac{\pi}{h}\right)\sin(\hat{z})\varphi_0 - \frac{2V}{h} \end{aligned} \tag{5}$$

Phương trình cân bằng được thiết lập dựa trên nguyên lý thế năng toàn phần cực tiểu:

$$\delta\,(\Pi_S + \Pi_W) = 0 \tag{6}$$

ở đây Π_S là năng lượng biến dạng của hệ, còn Π_W là thế năng của ngoại lực. Biến phân của năng lượng biến dạng được biểu diễn như sau:

$$\delta\Pi_S = \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,dV = \int_V \begin{pmatrix} \sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_{xy}\delta\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\delta\gamma_{xz} \\ + \sigma_{yz}\delta\gamma_{yz} - D_x\delta E_x - D_y\delta E_y - D_z\delta E_z \end{pmatrix} dV \tag{7}$$

Thay các biểu thức trong các phương trình (4) và (5) vào (7), thu được:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_S = & \int_A \begin{pmatrix} N_x\delta u_{0,x} - M_x\delta w_{b,xx} + N_y\delta v_{0,y} - M_y\delta w_{b,yy} \\ + N_{xy}\left(\delta u_{0,y} + \delta v_{0,x}\right) - 2M_{xy}\delta w_{b,xy} + Q_{xz}\delta w_{s,x} \\ + Q_{yz}\delta w_{s,y} \end{pmatrix} dxdy \\ & + \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} - D_x\cos(\hat{z})\delta\varphi_{0,x} - D_y\cos(\hat{z})\delta\varphi_{0,y} \\ + D_z\dfrac{\pi}{h}\sin(\hat{z})\delta\varphi_0 \end{pmatrix} dxdydz \end{aligned} \tag{8}$$

trong đó các thành phần nội lực và mômen N, M, Q được xác định theo:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})\,dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{+h/2} (z\sigma_x, z\sigma_y, z\sigma_{xy})\,dz \\ (Q_{xz}, Q_{yz}) &= \int_{-h/2}^{+h/2} k_\chi(\sigma_{xz}, \sigma_{yz})\,dz \end{aligned} \tag{9}$$

với k_χ là hệ số hiệu chỉnh cắt; trong nghiên cứu này chọn $k_\chi = 5/6$.

Biến phân công của các lực tác dụng lên tấm PoFGPie đặt trên nền đàn hồi được viết dưới dạng [20]:

$$\delta\Pi_W = \int_A \begin{pmatrix} N_x^0(w_b + w_s)_{,x}\delta(w_b + w_s)_{,x} \\ + N_y^0(w_b + w_s)_{,y}\delta(w_b + w_s)_{,y} \\ + 2\delta N_{xy}^0(w_b + w_s)_x(w_b + w_s)_y - \Theta_1\delta(w_b + w_s) \\ + \Theta_2\left(\delta(w_b + w_s)_{xx} + \delta(w_b + w_s)_{yy}\right) \end{pmatrix} dxdy \tag{10}$$

trong đó N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 là các tải trọng tác dụng trong mặt phẳng. Θ_1, Θ_2 được tính theo các hệ số của nền đàn hồi Kerr [21]: $\Theta_1 = \dfrac{k_u k_l}{k_u + k_l}$; $\Theta_2 = \dfrac{k_u k_s}{k_u + k_l}$.

Trong nghiên cứu này, giả định rằng tấm PoFGPie chịu tác động của điện áp ngoài V và bỏ qua tải trọng cắt. Do đó, $N_{xy}^0 = 0$ và N_x^0, N_y^0 là các tải trọng tác dụng trong mặt phẳng.

Tải trọng tác dụng trong mặt phẳng do điện áp ngoài V gây ra, được định nghĩa như sau [22]:

$$N^E = -\int_{-h/2}^{h/2} \bar{e}_{31}\frac{2V}{h}\,dz \tag{11}$$

Thay thế các biểu thức $\delta\Pi_S$ và $\delta\Pi_W$ từ các phương trình (8) và (10) vào phương trình (6) và tích

phân từng phần, đồng nhất các hệ số δu_0, δv_0, δw_b, δw_s và $\delta\varphi_0$ ta được các phương trình cân bằng:

$$\begin{aligned}
N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\
N_{y,y} + N_{xy,x} &= 0 \\
M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} - \left(N^E + N^b - \Theta_2\right)\nabla^2(\mathrm{w}_b + \mathrm{w}_s) - \Theta_1(w_b + w_s) &= 0 \\
Q_{x,x} + Q_{y,y} - \left(N^E + N^b - \Theta_2\right)\nabla^2(\mathrm{w}_b + \mathrm{w}_s) - \Theta_1(w_b + w_s) &= 0 \\
\int_{-h/2}^{h/2}\left(D_{x,x}\cos(\hat{z}) + D_{y,y}\cos(\hat{z}) + D_z\frac{\pi}{h}\sin(\hat{z})\right)dz &= 0
\end{aligned} \tag{12}$$

Đối với tấm PoFGPie tuyến tính chịu tác dụng đồng thời của tải cơ và điện, quan hệ ứng suất–biến dạng được biểu diễn như sau:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & 0 & 0 & 0\\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \tilde{C}_{66} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & \tilde{e}_{31}\\ 0 & 0 & \tilde{e}_{31}\\ 0 & 0 & 0\\ \tilde{e}_{15} & 0 & 0\\ 0 & \tilde{e}_{15} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{Bmatrix}D_x\\ D_y\\ D_z\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{15} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{15}\\ \tilde{e}_{31} & \tilde{e}_{31} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}\tilde{\kappa}_{11} & 0 & 0\\ 0 & \tilde{\kappa}_{11} & 0\\ 0 & 0 & \tilde{\kappa}_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix} \tag{14}$$

trong đó các hằng số rút gọn của tấm PoFGPie được tính theo [22]:

$$\begin{aligned}
&\tilde{C}_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}; \quad \tilde{C}_{12} = C_{12} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}; \quad \tilde{C}_{66} = C_{66}; \quad \tilde{e}_{15} = e_{15} \\
&\tilde{e}_{31} = e_{31} - \frac{e_{33}C_{13}}{C_{33}}; \quad \tilde{\kappa}_{11} = \kappa_{11}; \quad \tilde{\kappa}_{33} = \kappa_{33} + \frac{e_{33}^2}{C_{33}}
\end{aligned} \tag{15}$$

Tích phân các biểu thức từ (13) và (14) theo chiều dày tấm ta được các biểu thức lực màng N_{ij} và mômen uốn M_{ij}.

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & 0\\ A_{12} & A_{11} & 0\\ 0 & 0 & A_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{0,x}\\ v_{0,y}\\ u_{0,y} + v_{0,x}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & 0\\ B_{12} & B_{11} & 0\\ 0 & 0 & B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-w_{b,xx}\\ -w_{b,yy}\\ -2w_{b,xy}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}A_{31}^e\\ A_{31}^e\\ 0\end{Bmatrix}\varphi_0 \\
&\begin{Bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & 0\\ B_{12} & B_{11} & 0\\ 0 & 0 & B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{0,x}\\ v_{0,y}\\ u_{0,y} + v_{0,x}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & 0\\ D_{12} & D_{11} & 0\\ 0 & 0 & D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-w_{b,xx}\\ -w_{b,yy}\\ -2w_{b,xy}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}E_{31}^e\\ E_{31}^e\\ 0\end{Bmatrix}\varphi_0 \\
&\begin{Bmatrix}Q_x\\ Q_y\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{55} & 0\\ 0 & A_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{w}_{s,x}\\ \mathrm{w}_{s,y}\end{Bmatrix} - \mathrm{A}_{15}^e\begin{Bmatrix}\phi_{0,x}\\ \phi_{0,y}\end{Bmatrix} \\
&\int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}D_x\\ D_y\end{Bmatrix}\cos(\hat{z})\,dz = E_{15}^e\begin{Bmatrix}\mathrm{w}_{s,x}\\ \mathrm{w}_{s,y}\end{Bmatrix} + F_{11}^e\begin{Bmatrix}\phi_{0,x}\\ \phi_{0,y}\end{Bmatrix} \\
&\int_{-h/2}^{h/2} D_z\left(\frac{\pi}{h}\right)\sin(\hat{z})\,dz = A_{31}^e\left(u_{0,x} + v_{0,y}\right) - E_{31}^e\nabla^2 w_b - F_{31}^e\nabla^2 w_s - F_{33}^e\phi_0
\end{aligned} \tag{16}$$

trong đó các hệ số độ cứng A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, A^e_{ij}, E^e_{ij}, F^e_{ij} được xác định bởi:

$$\begin{aligned}
(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{C}_{ij}(1, z, z^2)\, dz, \quad (ij = 11, 12, 66) \\
A_{44} = A_{55} &= k_\chi \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{C}_{55}\, dz; \quad \{A^e_{31}, E^e_{31}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{e}_{31} \frac{\pi}{h} \sin(\hat{z})\{1, z\}\, dz \\
A^e_{15} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{e}_{15} \cos(\hat{z})\, dz \\
\{F^e_{11}, F^e_{33}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\tilde{\kappa}_{11} \cos^2(\hat{z}), \tilde{\kappa}_{33} (\frac{\pi}{h})^2 \sin^2(\hat{z})\}\, dz
\end{aligned} \tag{17}$$

Thay thế các biểu thức trong phương trình (16) vào (12) ta thu được các phương trình cân bằng biểu diễn theo chuyển vị của tấm PoFGPie:

$$\begin{aligned}
&A_{11}u_{0,xx} + A_{66}u_{0,yy} + (A_{66} + A_{12})v_{0,xy} - B_{11}w_{b,xxx} - (2B_{66} + B_{12})w_{b,xyy} + A^e_{31}\varphi_{0,x} = 0 \\
&A_{66}v_{0,xx} + A_{22}v_{0,yy} + (A_{66} + A_{12})u_{0,xy} - B_{22}w_{b,yyy} - (2B_{66} + B_{12})w_{b,xxy} + A^e_{31}\varphi_{0,y} = 0 \\
&B_{11}u_{0_{xxx}} + (2B_{66} + B_{12})u_{0,xyy} + (2B_{66} + B_{12})v_{0,xxy} + B_{22}v_{0,yyy} - D_{11}w_{b,xxxx} + E^e_{31}\nabla^2\varphi_0 \\
&\quad - 2(2D_{66} + D_{12})w_{b,xxyy} - D_{22}w_{b,yyyy} \\
&\quad - (N^E + N^b - \Theta_2)\nabla^2(\mathrm{w}_b + \mathrm{w}_s) - \Theta_1(w_b + w_s) = 0 \\
&A_{55}w_{s,xx} + A_{44}w_{s,yy} + F^e_{31}\nabla^2\varphi_0 - (N^E + N^b - \Theta_2)\nabla^2(\mathrm{w}_b + \mathrm{w}_s) - \Theta_1(w_b + w_s) + A^e_{15}\nabla^2\varphi_0 = 0 \\
&A^e_{31}(u_{0,x} + v_{0,y}) - E^e_{31}\nabla^2 w_b - F^e_{31}\nabla^2 w_s + E^e_{15}\nabla^2 w_s + F^e_{11}\nabla^2\varphi_0 - F^e_{33}\varphi_0 = 0
\end{aligned} \tag{18}$$

2.3. Lời giải Navier

Đối với tấm PoFGPie chữ nhật liên kết bốn biên tựa khớp (SSSS), các điều kiện biên được viết như sau:

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_0 = \mathrm{w}_b = \mathrm{w}_s = \varphi_0 = N_x = M_x = 0, \quad &\text{tại } x = 0, a \\
\mathrm{u}_0 = \mathrm{w}_b = \mathrm{w}_s = \varphi_0 = N_y = M_y = 0, \quad &\text{tại } y = 0, b
\end{aligned} \tag{19}$$

Các thành phần chuyển vị được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép, thỏa mãn điều kiện biên (19):

$$\begin{aligned}
u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \cos\eta x \sin\lambda y; \quad v_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \sin\eta x \cos\lambda y \\
\{w_b, w_s, \varphi_0\} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \{w_{bmn}, w_{smn}, \varphi_{mn}\} \sin\eta x \sin\lambda y
\end{aligned} \tag{20}$$

trong đó $\eta = m\pi/a$, $\lambda = n\pi/b$ và các hệ số cần xác định là $\{X\} = \{u_{mn}, v_{mn}, w_{bmn}, w_{smn}, \varphi_{mn}\}^T$. Thay (20) vào (18) và sau đó thực hiện các phép biến đổi toán học, thu được:

$$\begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\
k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\
k_{13} & k_{23} & k_{33} + s & k_{34} + s & k_{35} \\
k_{14} & k_{24} & k_{34} + s & k_{44} + s & k_{45} \\
k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ w_{bmn} \\ w_{smn} \\ \varphi_{mn} \end{Bmatrix} =
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{21}$$

Các tải trọng nén trong mặt phẳng được biểu diễn thông qua tham số tải N^b dưới dạng $N_x^0 = \gamma_1 N^b$, $N_y^0 = \gamma_2 N^b$ và $N_{xy}^0 = 0$, trong đó γ_1 và γ_2 là các hệ số xác định tỷ lệ tải theo hai phương x và y.

Dạng rút gọn của phương trình (21) là: $[K]\{X\} = \{0\}$, các hệ số của ma trận $[K]$ được tính theo:

$$\begin{aligned}
&k_{11} = -\eta^2 A_{11} - \lambda^2 A_{66}; \quad k_{12} = -\eta\lambda(A_{12} + A_{66}) \\
&k_{13} = \eta^3 B_{11} + \eta\lambda^2(B_{12} + 2B_{66}); \quad k_{14} = 0; \quad k_{15} = \eta A_{31}^e \\
&k_{22} = -\eta^2 A_{66} - \lambda^2 A_{22}; \quad k_{23} = \eta^2\lambda(B_{12} + 2B_{66}) + \lambda^3 B_{22} \\
&k_{24} = 0; \quad k_{25} = \lambda A_{31}^e; \quad k_{33} = -\eta^4 D_{11} - 2\eta^2\lambda^2(D_{12} + 2D_{66}) \\
&\qquad\qquad - \lambda^4 D_{22} - \Theta_1 + (N^E - \Theta_2)(\eta^2 + \lambda^2) \\
&k_{34} = -\Theta_1 + (N^E - \Theta_2)(\eta^2 + \lambda^2); \quad k_{35} = -E_{31}^e(\eta^2 + \lambda^2) \\
&k_{44} = -\eta^2 A_{55}^s - \lambda^2 A_{44}^s - \Theta_1 + (N^E - \Theta_2)(\eta^2 + \lambda^2) \\
&k_{45} = (A_{15}^e + F_{31}^e)(\eta^2 + \lambda^2); \quad k_{55} = F_{11}^e(\eta^2 + \lambda^2) + F_{33}^e \\
&s = N^b(\gamma_1\eta^2 + \gamma_2\lambda^2)
\end{aligned} \tag{22}$$

Trong nghiên cứu này, bài toán được xét theo quan điểm ổn định Euler. Sau khi áp dụng nghiệm Navier, bài toán ổn định được đưa về bài toán trị riêng. Tải trọng tới hạn được xác định từ điều kiện định thức của ma trận hệ phương trình bằng không:

$$\det([K]) = 0 \tag{23}$$

Nghiệm của phương trình (23) là N_{mn}^b, tương ứng với dạng mất ổn định (m, n). Tải trọng tới hạn của tấm được xác định theo: $N_{cr} = \min\{N_{mn}^b\}$.

3. Kết quả số và thảo luận

Dựa trên nghiệm giải tích ở trên, chương trình Matlab được xây dựng để tính toán ví dụ số cho tấm PoFGPie chữ nhật đặt trên nền đàn hồi Kerr, liên kết khớp bốn cạnh (SSSS). Vật liệu FGPie gồm PZT-4 và PZT-5H, với thông số vật liệu lấy theo [23]. Vật liệu PZT-4: $C_{11} = C_{22} = 138{,}499$ (GPa), $C_{33} = 114{,}745$ (GPa), $C_{13} = C_{23} = 73{,}643$ (GPa), $C_{12} = 77{,}371$ (GPa), $C_{55} = 25{,}6$ (GPa), $C_{66} = 30{,}6$ (GPa), $e_{31} = -5{,}2$ (cm^{-2}), $e_{33} = 15{,}08$ (cm^{-2}), $e_{15} = 12{,}72$ (cm^{-2}), $\kappa_{11} = 1{,}306$ ($10^{-9}\mathrm{C}^2\mathrm{m}^{-2}\mathrm{N}^{-1}$), $\kappa_{33} = 1{,}115$ ($10^{-9}\mathrm{C}^2\mathrm{m}^{-2}\mathrm{N}^{-1}$); vật liệu PZT-5H: $C_{11} = C_{22} = 99{,}201$ (GPa), $C_{33} = 86{,}856$ (GPa), $C_{13} = C_{23} = 50{,}778$ (GPa), $C_{12} = 54{,}016$ (GPa), $C_{55} = 21{,}1$ (GPa), $C_{66} = 22{,}6$ (GPa), $e_{31} = -7{,}209$ (cm^{-2}), $e_{33} = 15{,}118$ (cm^{-2}), $e_{15} = 12{,}322$ (cm^{-2}), $\kappa_{11} = 1{,}53$ ($10^{-9}\mathrm{C}^2\mathrm{m}^{-2}\mathrm{N}^{-1}$), $\kappa_{33} = 1{,}5$ ($10^{-9}\mathrm{C}^2\mathrm{m}^{-2}\mathrm{N}^{-1}$). Sử dụng các công thức không thứ nguyên:

$$\begin{aligned}
&\bar{N}_{cr} = N_{cr}a^2/(h^3 C_{11PZT4}); \quad K_{\mathrm{X}} = k_{\mathrm{X}}\frac{a^4}{(h^3 C_{11PZT4})} \quad (\mathrm{X} = l, s, u) \\
&K_p = k_p\frac{a^2}{(h^3 C_{11PZT4})}
\end{aligned} \tag{24}$$

3.1. Ví dụ kiểm chứng

Hai ví dụ được sử dụng để kiểm chứng mô hình. Trong ví dụ thứ nhất, xét tấm PoFGPie chữ nhật có kích thước $a \times b \times h$, liên kết bốn biên tựa khớp (SSSS), chịu tác dụng của tải trọng nén theo hai phương: $N_x^0 = \gamma_1 N^b$, $N_y^0 = \gamma_2 N^b$, $N_{xy}^0 = 0$. Tấm được đặt trên nền đàn hồi Pasternak ($\Theta_1 = K_w$, $\Theta_2 = K_p$). Hai quy luật phân bố bọt rỗng được xem xét bao gồm: phân bố đều FGPie-I ($\aleph(z) = 1$) và phân bố không đều đối xứng FGPie-II ($\aleph(z) = 1 - 2\,(|z|/h)$). Bảng 1 trình bày các kết quả của bài báo được so sánh với các kết quả của Barati và cộng sự [7] sử dụng lời giải Navier và lý thuyết HSDT-4.

Bảng 1. So sánh tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}_{cr}$ của tấm PoFGPie (PZT-4/PZT-5H) đặt trên nền Pasternak ($a = b = 100h$; $V = +500$; $e_0 = 0{,}2$)

Mô hình	FGPie-I		FGPie-II	
	$p = 1$	$p = 5$	$p = 1$	$p = 5$
		$K_w = 10; K_p = 0$		
HSDT-4 [7]	1,79689	1,71311	2,04970	1,96520
Bài báo	1,79701	1,71330	2,04953	1,96504
		$K_w = 10; K_p = 10$		
HSDT-4 [7]	11,79690	11,71310	12,04970	11,96520
Bài báo	11,79701	11,71330	12,04953	11,96504

Ví dụ thứ hai xét tấm vuông đẳng hướng chịu tải cơ nén đều theo phương x. Tải trọng tới hạn được biểu diễn dưới dạng không thứ nguyên $\bar{N}_{cr} = N_{cr}\left(\dfrac{a^2}{\pi^2 D_0}\right)$ với $D_0 = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$. Kết quả thu được so sánh với các mô hình ba chiều (3D) trong các tài liệu [24–26], như trình bày trong Bảng 2.

Kết quả so sánh trong Bảng 1 và Bảng 2 cho thấy sai khác giữa kết quả của bài báo và các tài liệu tham khảo là rất nhỏ, qua đó khẳng định độ tin cậy của mô hình và chương trình tính trong việc xác định tải trọng tới hạn của tấm PoFGPie trên nền đàn hồi.

Bảng 2. So sánh tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}_{cr}$ của tấm vuông đẳng hướng dưới tải nén đều theo phương x

a/h	3D [24]	3D [25]	3D [26]	Bài báo
20	3,931	3,911	3,9499	3,9535
100	4,020	4,022	3,9899	3,9981

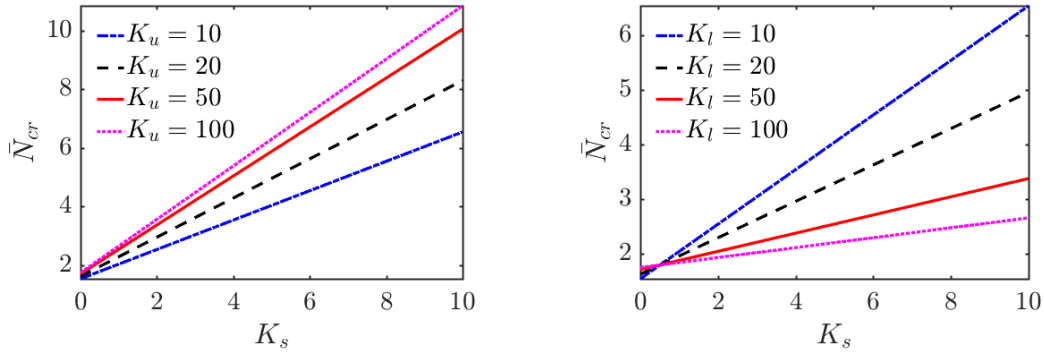
Trong các mục tiếp theo, tải trọng tới hạn không thứ nguyên của tấm PoFGPie trên nền đàn hồi Kerr, với bốn biên tựa khớp và chịu nén theo hai phương (Hình 1), sẽ được khảo sát và thảo luận chi tiết. Các tính chất vật liệu của PoFGPie (PZT-4/PZT-5H) đã được trình bày ở phần đầu mục và các công thức không thứ nguyên được xác định theo (24). Trừ khi có chỉ dẫn khác, các kích thước hình học và thông số vật liệu được giả thiết như sau: $e_0 = 0{,}2$; $p = 1$; $a = b = 100h$; $V = +500$, $K_l = K_u = 100$; $K_s = 10$.

3.2. Ảnh hưởng của các tham số độ cứng nền đàn hồi Kerr

Ảnh hưởng của các tham số độ cứng nền Kerr (K_l, K_s, K_u) đến tải tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}_{cr}$ của tấm PoFGPie được trình bày trong Hình 2. Có thể thấy rằng khi độ cứng lớp cắt K_s tăng, tải tới hạn của tấm đều tăng trong cả hai trường hợp khảo sát, cho thấy lớp cắt đóng vai trò quan trọng trong việc nâng cao độ cứng tổng thể và khả năng ổn định của kết cấu. Trong Hình 2(a), khi độ cứng lớp đàn hồi phía trên K_u tăng từ 10 lên 100, giá trị $\bar{N}_{cr}$ tăng rõ rệt và gần như tuyến tính theo K_s. Điều này cho thấy lớp đàn hồi phía trên có ảnh hưởng đáng kể đến khả năng chống mất ổn định của tấm.

Trong Hình 2(b), khi độ cứng lớp đàn hồi phía dưới K_l tăng, tải tới hạn $\bar{N}_{cr}$ có xu hướng giảm trên toàn miền khảo sát của K_s. Mặc dù $\bar{N}_{cr}$ vẫn tăng theo K_s, tốc độ tăng giảm dần khi K_l lớn hơn. Xu hướng này có thể được giải thích thông qua các hệ số nền tương đương Θ_1 và Θ_2, với $\Theta_1 = \dfrac{k_u k_l}{k_u + k_l}$, $\Theta_2 = \dfrac{k_u k_s}{k_u + k_l}$. Khi K_l tăng, mặc dù Θ_1 tăng nhẹ, giá trị Θ_2 lại giảm do mẫu số tăng, làm suy giảm hiệu

quả của thành phần liên kết cắt trong nền Kerr. Do đó, độ cứng hiệu dụng của hệ nền–tấm giảm, dẫn đến sự suy giảm của tải trọng tới hạn như quan sát trong kết quả số. Điều này cũng giải thích vì sao ảnh hưởng tăng của K_s trở nên kém rõ rệt hơn khi K_l tăng.

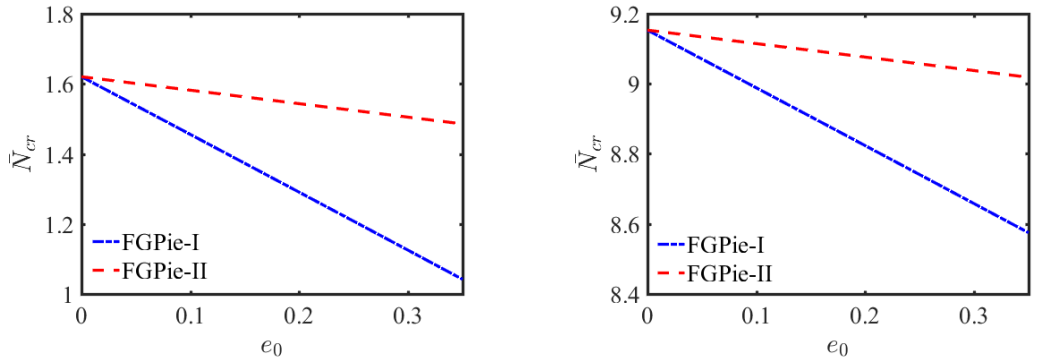


(a) $K_l = 10$, FGPie-I (b) $K_u = 10$, FGPie-II

Hình 2. Ảnh hưởng của các tham số độ cứng nền: K_l, K_s, K_u đến tải tới hạn $\bar{N}_{cr}$ của tấm PoFGPie đặt trên nền Kerr

3.3. Ảnh hưởng của hệ số bọt rỗng và kiểu phân bố bọt rỗng

Bảng 3, 4 và Hình 3 minh họa ảnh hưởng của kiểu phân bố bọt rỗng và hệ số lỗ rỗng e_0 đến tải tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}_{cr}$ của tấm PoFGPie. Kết quả cho thấy, cả khi tấm đặt và không đặt trên nền đàn hồi, tải tới hạn $\bar{N}_{cr}$ đều giảm theo e_0 đối với cả hai kiểu phân bố bọt rỗng. Đối với mọi giá trị của e_0, tấm FGPie-I (phân bố bọt rỗng đều) luôn có tải tới hạn thấp hơn so với tấm FGPie-II (phân bố bọt rỗng đối xứng không đều). Nguyên nhân là do sự gia tăng độ rỗng làm giảm độ cứng hiệu dụng của vật liệu, từ đó làm giảm tải tới hạn của tấm. So với FGPie-I, kiểu phân bố FGPie-II duy trì độ cứng uốn tốt hơn vì lỗ rỗng tập trung chủ yếu ở vùng giữa chiều dày và giảm dần về hai bề mặt, nên độ cứng chống uốn của tấm được duy trì tốt hơn. Do đó, tải tới hạn của tấm FGPie-II luôn lớn hơn so với FGPie-I.



(a) $K_u = K_l = K_s = 0$ (b) $K_u = K_l = 100$, $K_s = 10$

Hình 3. Ảnh hưởng của kiểu phân bố bọt rỗng và hệ số lỗ rỗng e_0 đến tải tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}_{cr}$ của tấm PoFGPie đặt trên nền Kerr ($b/a = 1$)

Mặt khác, theo kết quả từ Bảng 3 và Bảng 4, khi cố định a, ảnh hưởng của tỷ số b/a đến tải tới hạn phụ thuộc vào điều kiện nền. Trong trường hợp không có nền đàn hồi, tải tới hạn giảm khi b/a

tăng do chiều rộng tấm lớn hơn làm giảm độ cứng tổng thể của kết cấu. Ngược lại, khi tấm đặt trên nền Kerr, tải tới hạn tăng theo b/a vì sự gia tăng diện tích tương tác với nền làm tăng hiệu quả gia cường của nền đàn hồi đối với ứng xử ổn định của tấm. Xu hướng này không chỉ do sự gia tăng diện tích tương tác với nền mà còn do cơ chế phân bố phản lực nền. Trong mô hình Kerr, phản lực nền phụ thuộc vào độ võng và các thành phần độ cong của tấm (thể hiện qua các hệ số nền và các tham số tương đương Θ_1 và Θ_2). Khi b/a tăng, các đại lượng này phân bố trên vùng diện tích lớn hơn, làm tăng độ cứng hiệu dụng của hệ nền–tấm và do đó làm tăng tải trọng tới hạn.

Bảng 3. Ảnh hưởng của kiểu phân bố bọt rỗng, hệ số lỗ rỗng e_0 và tỷ số b/a đến tải tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}_{cr}$ của tấm PoFGPie ($K_u = K_l = K_s = 0$)

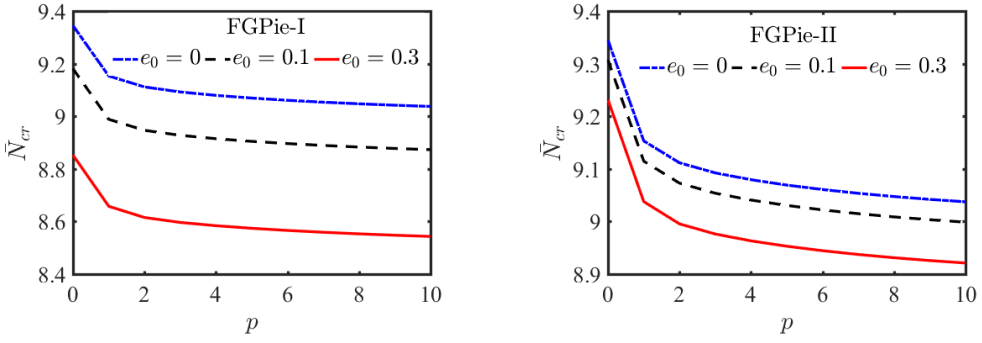
Kiểu phân bố bọt rỗng	e_0	$b/a = 1$	$b/a = 1{,}5$	$b/a = 2{,}5$
FGPie-I	0	1,62015	1,13922	0,89292
	0,1	1,45546	1,02337	0,80209
	0,2	1,29040	0,90726	0,71104
	0,3	1,12481	0,79077	0,61969
	0,35	1,04173	0,73232	0,57386
FGPie-II	0	1,62015	1,13922	0,89292
	0,1	1,58172	1,11302	0,87298
	0,2	1,54326	1,08680	0,85302
	0,3	1,50476	1,06055	0,83305
	0,35	1,48550	1,04742	0,82305

Bảng 4. Ảnh hưởng của kiểu phân bố bọt rỗng, hệ số lỗ rỗng e_0 và tỷ số b/a đến tải tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}_{cr}$ của tấm PoFGPie trên nền đàn hồi Kerr ($K_u = K_l = 100$, $K_s = 10$)

Kiểu phân bố bọt rỗng	e_0	$b/a = 1$	$b/a = 1{,}5$	$b/a = 2{,}5$
FGPie-I	0	9,15318	9,64649	10,26021
	0,1	8,98849	9,53064	10,16938
	0,2	8,82343	9,41453	10,07834
	0,3	8,65784	9,29804	9,98699
	0,35	8,57476	9,23959	9,94115
FGPie-II	0	9,15318	9,64649	10,26021
	0,1	9,11475	9,62029	10,24027
	0,2	9,07629	9,59407	10,22032
	0,3	9,03779	9,56782	10,20034
	0,35	9,01853	9,55469	10,19035

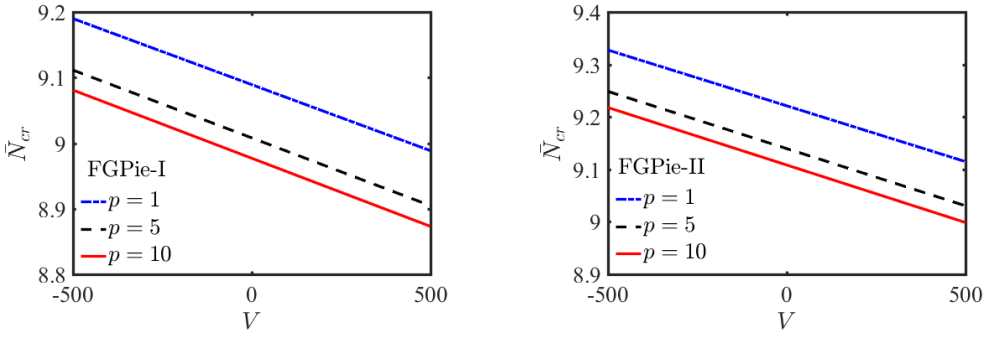
3.4. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích

Kết quả đồ thị trên Hình 4 cho thấy, khi chỉ số tỷ lệ thể tích p tăng, tải tới hạn $\bar{N}_{cr}$ của tấm PoFGPie giảm đối với cả hai kiểu phân bố lỗ rỗng. Khi $p = 0$, tấm được làm hoàn toàn từ vật liệu PZT-4, là pha có độ cứng lớn hơn, nên tải tới hạn đạt giá trị lớn nhất. Khi p tăng, tính chất vật liệu biến thiên dần theo chiều dày từ PZT-4 đến PZT-5H, làm tăng tỷ lệ pha vật liệu có độ cứng thấp hơn và do đó làm giảm tải tới hạn của tấm.



(a) FGPie-I (b) FGPie-II

Hình 4. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích p và hệ số lỗ rỗng e_0 đến tải tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}_{cr}$ của tấm PoFGPie đặt trên nền Kerr



(a) FGPie-I (b) FGPie-II

Hình 5. Ảnh hưởng của điện áp ngoài V và chỉ số tỷ lệ thể tích p đến tải tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}_{cr}$ của tấm PoFGPie đặt trên nền Kerr

Bảng 5. Ảnh hưởng của điện áp ngoài V đến tải tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}_{cr}$ của tấm PoFGPie trên nền đàn hồi Kerr

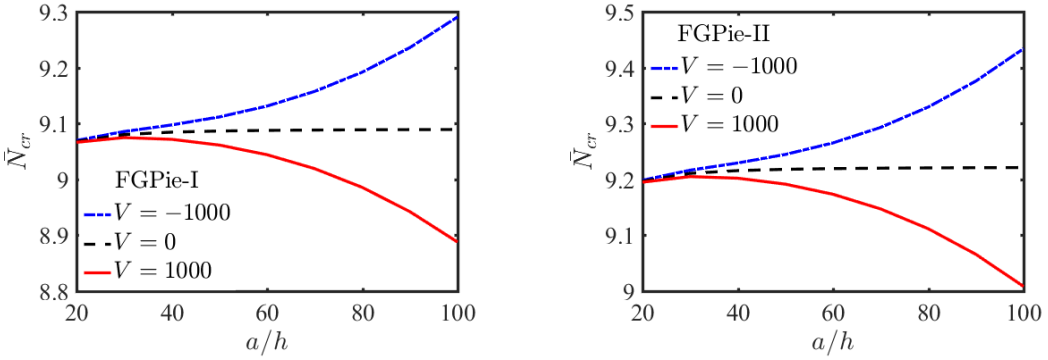
Kiểu phân bố bọt rỗng	p	$V = -500$	$V = 0$	$V = +500$
FGPie-I	1	9,18991	9,08920	8,98849
	5	9,11136	9,00801	8,90467
FGPie-II	1	9,32747	9,22111	9,11475
	5	9,24857	9,13957	9,03057

3.5. Ảnh hưởng của điện áp ngoài

Kết quả trên Bảng 5 và Hình 5 cho thấy, khi điện áp ngoài V tăng từ giá trị âm sang giá trị dương, tải tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}_{cr}$ của tấm giảm đối với cả hai kiểu phân bố lỗ rỗng. Điện áp âm làm tăng tải tới hạn, trong khi điện áp dương làm giảm tải tới hạn của tấm. Điều này cho thấy dấu của điện áp ngoài có ảnh hưởng đáng kể đến khả năng chống mất ổn định của kết cấu. Xu hướng này có thể được giải thích thông qua biểu thức tải trọng điện tương đương trong phương trình (11). Cụ thể, điện áp ngoài tạo ra lực màng tương đương N^E thông qua hiệu ứng áp điện, từ đó làm thay đổi trạng thái ứng suất ban đầu của tấm. Tùy theo dấu và độ lớn của điện áp, lực này có thể đóng vai trò như tải kéo

hoặc tải nén. Khi điện áp tạo ra trạng thái ứng suất nén tương đương, tải trọng tới hạn giảm; ngược lại, khi tạo ra ứng suất kéo, tải trọng tới hạn có xu hướng tăng.

3.6. Ảnh hưởng của tỷ lệ kích thước tấm a/h



(a) FGPie-I (b) FGPie-II

Hình 6. Ảnh hưởng của tỷ số a/h và điện áp V đến tải tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}_{cr}$ của tấm PoFGPie đặt trên nền Kerr

Kết quả đồ thị trên Hình 6 cho thấy, khi tỷ số a/h tăng, tải tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}_{cr}$ của tấm thay đổi rõ rệt và xu hướng này phụ thuộc vào dấu của điện áp đặt vào lớp áp điện. Với điện áp âm, tải tới hạn tăng dần khi a/h tăng và mức tăng trở nên rõ hơn ở vùng a/h lớn. Điều này cho thấy điện áp âm tạo ra hiệu ứng làm tăng độ cứng hiệu dụng của tấm, từ đó nâng cao khả năng chống mất ổn định. Ngược lại, khi điện áp dương được áp đặt, tải tới hạn giảm dần theo a/h. Ở vùng a/h nhỏ, sự sai khác giữa các trường hợp điện áp còn hạn chế, nhưng khi a/h tiếp tục tăng, ảnh hưởng của điện áp dương trở nên rõ rệt hơn và làm suy giảm đáng kể tải tới hạn của tấm. Trường hợp $V = 0$, đường đồ thị luôn nằm giữa hai trường hợp điện áp âm và điện áp dương trong toàn miền khảo sát.

4. Kết luận

Bài báo đã xây dựng mô hình giải tích để phân tích ổn định cơ–điện của tấm PoFGPie trên nền đàn hồi Kerr dựa trên lý thuyết SFSDT. Các phương trình cân bằng được thiết lập dựa trên nguyên lý thế năng toàn phần cực tiểu và được giải bằng phương pháp Navier cho tấm chữ nhật có bốn biên tựa khớp (SSSS). Kết quả tính toán được kiểm chứng thông qua so sánh với các công bố trước đây. Mô hình đề xuất được xây dựng trong khuôn khổ bài toán ổn định tuyến tính. Trong phạm vi các giả thiết đã nêu, các kết quả thu được có độ tin cậy và khả năng áp dụng tốt đối với bài toán đang xét. Việc mở rộng mô hình cho các điều kiện biên khác hoặc các bài toán phi tuyến có thể được xem xét trong các nghiên cứu tiếp theo.

Một số kết luận chính được rút ra như sau:

- Sự gia tăng các hệ số độ cứng nền Kerr, đặc biệt là K_s và K_u, làm tăng đáng kể tải trọng tới hạn của tấm nhờ sự cải thiện độ cứng tổng thể của hệ. Ngược lại, khi K_l tăng, tải trọng tới hạn có xu hướng giảm trong miền khảo sát do ảnh hưởng của tham số này chỉ thể hiện gián tiếp thông qua các hệ số nền tương đương.

- Khi chỉ số tỷ lệ thể tích p tăng và hệ số lỗ rỗng e_0 tăng, tải tới hạn của tấm giảm. Nguyên nhân là do khi p tăng, tỷ lệ pha vật liệu có độ cứng thấp hơn theo chiều dày tấm tăng lên; đồng thời, sự gia tăng của e_0 làm suy giảm độ cứng hiệu dụng của vật liệu. Ngoài ra, tấm FGPie-II luôn cho tải tới hạn lớn hơn tấm FGPie-I trong toàn bộ miền khảo sát.

- Đối với ảnh hưởng của tỷ số hình học b/a, khi không có nền đàn hồi, tải tới hạn giảm khi b/a tăng; ngược lại, khi tấm đặt trên nền Kerr, tải tới hạn tăng theo b/a do hiệu quả gia cường của nền đàn hồi trở nên rõ hơn.

- Điện áp âm làm tăng tải tới hạn, trong khi điện áp dương làm giảm tải tới hạn của tấm. Ảnh hưởng của điện áp ngoài đến tải tới hạn trở nên rõ rệt hơn khi tỷ số a/h tăng, cho thấy độ nhạy của ứng xử ổn định cơ–điện tăng lên đối với các tấm mỏng.

Từ các kết quả trên có thể thấy rằng mô hình đề xuất có thể được sử dụng như một công cụ hiệu quả để phân tích và đánh giá ảnh hưởng của các tham số thiết kế đến ứng xử ổn định cơ-điện của tấm PoFGPie.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo trong đề tài mã số B2025-XDA-06.

Tuyên bố về việc sử dụng trí tuệ nhân tạo tạo sinh và công nghệ hỗ trợ bởi AI

Tác giả xác nhận không sử dụng bất kỳ công cụ trí tuệ nhân tạo tạo sinh hoặc công nghệ hỗ trợ bởi AI nào trong quá trình chuẩn bị và hoàn thiện bản thảo.

Tài liệu tham khảo

[1] Ebrahimi, F., Jafari, A. (2016). Buckling behavior of smart MEE-FG porous plate with various boundary conditions based on refined theory. *Advances in Materials Research*, 5(4):279–301.

[2] Kerr, A. D. (1984). On the formal development of elastic foundation models. *Ingenieur-Archiv*, 54(6): 455–464.

[3] Kerr, A. D. (1965). A study of a new foundation model. *Acta Mechanica*, 1(2):135–147.

[4] Vu, V.-T., Tran, H.-Q. (2025). Thermo-electro-magneto-mechanical vibration analysis of sandwich plates with graphene oxide powder reinforced composite core and magneto-electro-elastic face sheets resting on Kerr foundation. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 21(6):1609–1641.

[5] Thẩm, V. V., Ngọc, V. M., Khôi, P. T. (2024). Phân tích tĩnh dầm cong sandwich FGM xốp đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCNXD) - ĐHXDHN*, 18 (3V):48–63.

[6] Abdollahi, M., Saidi, A. R., Mohammadi, M. (2015). Buckling analysis of thick functionally graded piezoelectric plates based on the higher-order shear and normal deformable theory. *Acta Mechanica*, 226 (8):2497–2510.

[7] Barati, M. R., Sadr, M. H., Zenkour, A. M. (2016). Buckling analysis of higher order graded smart piezoelectric plates with porosities resting on elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 117:309–320.

[8] Zenkour, A. M., Aljadani, M. H. (2019). Porosity effect on thermal buckling behavior of actuated functionally graded piezoelectric nanoplates. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 78:103835.

[9] Zenkour, A. M., Aljadani, M. H. (2019). Thermo-electrical buckling response of actuated functionally graded piezoelectric nanoscale plates. *Results in Physics*, 13:102192.

[10] Sheng, G. G., Wang, X. (2010). Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells. *Applied Mathematical Modelling*, 34(9):2630–2643.

[11] Mohammadimehr, M., Rostami, R., Arefi, M. (2016). Electro-elastic analysis of a sandwich thick plate considering FG core and composite piezoelectric layers on Pasternak foundation using TSDT. *Steel and Composite Structures*, 20(3):513–543.

[12] Mirzavand, B., Eslami, M. R. (2010). A closed-form solution for thermal buckling of piezoelectric FGM rectangular plates with temperature-dependent properties. *Acta Mechanica*, 218(1-2):87–101.

[13] Zenkour, A. M. (2012). Piezoelectric behavior of an inhomogeneous hollow cylinder with thermal gradient. *International Journal of Thermophysics*, 33(7):1288–1301.

[14] Liew, K. M., Yang, J., Kitipornchai, S. (2003). Postbuckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading. *International Journal of Solids and Structures*, 40(15):3869–3892.

[15] Doroushi, A., Eslami, M. R., Komeili, A. (2011). Vibration analysis and transient response of an FGPM beam under thermo-electro-mechanical loads using higher-order shear deformation theory. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 22(3):231–243.

[16] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2013). A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 101:332–340.

[17] Thẩm, V. V. (2026). Ảnh hưởng của nhiệt độ, độ ẩm và từ trường đến đặc trưng dao động của tấm nano FGM. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCNXD) - ĐHXDHN*, 20(1V):50–68.

[18] Wang, Q. (2002). On buckling of column structures with a pair of piezoelectric layers. *Engineering Structures*, 24(2):199–205.

[19] Zenkour, A. M., Aljadani, M. H. (2020). Buckling analysis of actuated functionally graded piezoelectric plates via a quasi-3D refined theory. *Mechanics of Materials*, 151:103632.

[20] Liu, H., Liu, H., Yang, J. (2018). Vibration of FG magneto-electro-viscoelastic porous nanobeams on visco-Pasternak foundation. *Composites Part B: Engineering*, 155:244–256.

[21] Li, M., Soares, C. G., Yan, R. (2021). Free vibration analysis of FGM plates on Winkler/Pasternak/Kerr foundation by using a simple quasi-3D HSDT. *Composite Structures*, 264:113643.

[22] Ebrahimi, F., Jafari, A., Barati, M. R. (2017). Vibration analysis of magneto-electro-elastic heterogeneous porous material plates resting on elastic foundations. *Thin-Walled Structures*, 119:33–46.

[23] Ramirez, F., Heyliger, P. R., Pan, E. (2006). Free vibration response of two-dimensional magneto-electro-elastic laminated plates. *Journal of Sound and Vibration*, 292(3–5):626–644.

[24] Na, K.-S., Kim, J.-H. (2004). Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials. *Composites Part B: Engineering*, 35(5):429–437.

[25] Uymaz, B., Aydogdu, M. (2007). Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 26(18):1847–1863.

[26] Uymaz, B., Aydogdu, M. (2013). Three dimensional mechanical buckling of FG plates with general boundary conditions. *Composite Structures*, 96:174–193.