

# ẢNH HƯỞNG CỦA NHIỆT ĐỘ, ĐỘ ẨM VÀ TỪ TRƯỜNG ĐẾN ĐẶC TRƯNG DAO ĐỘNG CỦA TẦM NANO FGM

Vũ Văn Thẩm<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,  
55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam*

*Nhận ngày 08/01/2026, Sửa xong 24/02/2026, Chấp nhận đăng 24/02/2026*

## Tóm tắt

Nghiên cứu này đánh giá ảnh hưởng của nhiệt độ, độ ẩm và từ trường đến đặc trưng dao động của tấm nano FGM (vật liệu có cơ tính biến thiên) áp từ có lỗ rỗng (NaPoMag) trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak. Mô hình giải tích được xây dựng dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản (SFSDT) kết hợp lý thuyết đàn hồi phi cục bộ (NET). Các phương trình cân bằng được thiết lập từ nguyên lý Hamilton cho tấm hình chữ nhật có bốn biên tựa khớp, với phân bố từ trường theo chiều dày được mô tả bằng tổ hợp hàm lượng giác và hàm tuyến tính. Lời giải Navier được áp dụng để xác định tần số dao động riêng. Độ tin cậy của mô hình lý thuyết và chương trình tính được kiểm tra bằng cách so sánh với các kết quả đã được báo cáo trước đây. Tiếp theo, các khảo sát tham số được thực hiện nhằm đánh giá ảnh hưởng của nền đàn hồi, tính chất vật liệu, kiểu và hệ số lỗ rỗng, kích thước hình học, nhiệt độ, độ ẩm, từ trường áp đặt và tham số phi cục bộ đến tần số dao động của tấm NaPoMag. Điểm mới của nghiên cứu là đề xuất mô hình giải tích SFSDT kết hợp NET cho tấm nano FGM áp từ có lỗ rỗng đặt trên nền Winkler-Pasternak, xét đồng thời tác động của nhiệt độ, độ ẩm và từ trường, qua đó cung cấp cơ sở tham khảo cho thiết kế và tối ưu kết cấu nano trong điều kiện làm việc thực tế.

*Từ khóa:* dao động; tấm nano FGM áp từ; nền đàn hồi; cơ-nhiệt-ẩm; phi cục bộ.

## IMPACT OF TEMPERATURE, MOISTURE, AND MAGNETIC FIELD ON THE VIBRATION CHARACTERISTICS OF FGM NANOPATES

### Abstract

This study investigates the effects of temperature, moisture, and magnetic field on the vibration characteristics of a nano-scale porous magneto-elastic functionally graded (NaPoMag) plate resting on a Winkler-Pasternak elastic foundation. The analytical model is developed based on the first-order shear deformation theory (SFSDT) combined with nonlocal elasticity theory (NET). The equilibrium equations are derived from Hamilton's principle for a rectangular plate with four simply supported edges, with the through-thickness magnetic field distribution described by a combination of linear and trigonometric functions. The Navier solution is applied to determine the natural frequencies. The validity of the theoretical model and the computational program is verified by comparison with previously reported results. Subsequently, parametric studies are conducted to investigate the effects of foundation characteristics, material properties, porosity type and porosity coefficient, geometric dimensions, temperature, moisture, applied magnetic field, as well as nonlocal parameters on the vibration frequencies of the NaPoMag plate. The novelty of this study is the development of an analytical SFSDT-NET framework for porous magneto-elastic functionally graded nano-plates on a Winkler-Pasternak foundation, accounting for the coupled effects of temperature, moisture, and magnetic field.

*Keywords:* vibration; magnetostrictive FGM nanoplate; elastic foundation; thermo-moisture; nonlocal.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2026-20\(1V\)-05](https://doi.org/10.31814/stce.huce2026-20(1V)-05) © 2026 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

## 1. Giới thiệu

Trong những năm gần đây, các vật liệu thông minh như vật liệu áp điện, áp từ và vật liệu đàn hồi điện từ đã được ứng dụng rộng rãi trong các hệ thống cơ-điện vi mô (MEMS), cơ-điện nano (NEMS) và nhiều thiết bị công nghệ y sinh hiện đại [1, 2]. Do tính chất cơ học của các vật liệu này có thể bị chi phối bởi điện thế, từ trường, hoặc đồng thời bởi cả hai trường, chúng mang lại nhiều ưu điểm trong nhiều ứng dụng khác nhau [3]. Để hỗ trợ quá trình thiết kế và tối ưu hóa các kết cấu sử dụng vật liệu thông minh ở cấp độ nano, việc phát triển các mô hình phân tích nhằm dự đoán chính xác ứng xử cơ học của chúng là rất cần thiết.

\*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: [thamvv@huce.edu.vn](mailto:thamvv@huce.edu.vn) (Thẩm, V. V.)

Khi kết cấu thu nhỏ đến quy mô micro hoặc nano, ảnh hưởng của kích thước lên ứng xử cơ học trở nên rõ rệt [4]. Các phương pháp phân tích vĩ mô truyền thống không còn phù hợp vì bỏ qua hiệu ứng kích thước. Với kết cấu nano, thí nghiệm hoặc mô phỏng động lực học phân tử (MD) đáng tin cậy nhưng tốn nhiều thời gian và tài nguyên tính toán là rất lớn. Do đó, cơ học môi trường liên tục thường được ưu tiên, với nhiều mô hình lý thuyết như đàn hồi phi cục bộ, gradient biến dạng phi cục bộ và năng lượng bề mặt được phát triển để tính đến hiệu ứng kích thước. Trong số đó, lý thuyết đàn hồi phi cục bộ (NET) do Eringen và Edelen đề xuất [5] là một trong những mô hình được áp dụng rộng rãi. Được đề xuất lần đầu bởi Eringen [6], lý thuyết này giả thiết rằng ứng suất tại một điểm trong vật liệu liên tục không chỉ phụ thuộc vào biến dạng tại chính điểm đó mà còn chịu ảnh hưởng từ biến dạng tại tất cả các điểm lân cận. Kết quả là, NET được xem như một công cụ hiệu quả và thông dụng trong việc thiết lập các phương trình cân bằng và phương trình chuyển động cho các kết cấu nano.

Sự phát triển của vật liệu FGM đã góp phần nâng cao hiệu suất làm việc của kết cấu thông qua khả năng chịu nhiệt tốt và độ bền cơ học cao. Dựa trên nền tảng này, các vật liệu thông minh như vật liệu FGM áp từ (FGMag) và FGM đàn hồi điện từ (FGMEE) đã được nghiên cứu và phát triển nhằm tối ưu hóa đặc tính và mở rộng ứng dụng kỹ thuật. Gần đây, nhiều nghiên cứu tập trung vào cơ học của kết cấu nano làm từ FGMEE. Ebrahimi và cs. [7] đã nghiên cứu ổn định nhiệt của các dầm nano đàn hồi-điện-từ-nhiệt (METE) bằng lý thuyết bậc ba kết hợp lý thuyết đàn hồi phi cục bộ. Trạng thái mất ổn định và ứng xử sau mất ổn định của tấm nano METE tiếp tục được Ansari và Gholami [8] phân tích thông qua lý thuyết tấm bậc nhất (FSDT) kết hợp với NET. Żur và cs. [9] đã nghiên cứu dao động tự do và ổn định của tấm nano FGMEE sử dụng lý thuyết tấm bậc cao (HSDT) kết hợp với NET, trong khi Ebrahimi và Barati [10] cũng áp dụng bộ công cụ này để phân tích dao động của tấm bằng vật liệu đàn hồi điện từ (MEE) đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Bên cạnh đó, Arefi và Amabili [11] đã nghiên cứu uốn vỏ nano hai độ cong với lớp bề mặt FGMEE và lớp lõi đẳng hướng, dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao hình sin kết hợp lý thuyết đàn hồi phi cục bộ.

Trong quá trình chế tạo, sự khác biệt về điều kiện nhiệt hóa rắn có thể tạo ra lỗ rỗng trong vật liệu FGM, hình thành vật liệu FGM xốp (PoFGM). Theo nghiên cứu của Gogotsi [12], quá trình chế tạo FGMEE với các thành phần  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  và  $\text{BaTiO}_3$  có thể dẫn đến độ xốp lên đến 40%. Nhiều công trình nghiên cứu đã chứng minh rằng độ xốp ảnh hưởng đáng kể đến các đặc tính cơ học, nhiệt, điện và từ của tấm vật liệu. Esen và cs. [13] dùng phần tử hữu hạn đánh giá ảnh hưởng của lỗ rỗng đến đáp ứng động của tấm đàn hồi điện từ có bọt rỗng (PoFGMEE), trong khi Esen và Özmen [14] nghiên cứu dao động tự do và độ võng của tấm nano MEE xốp dưới tác động nhiệt. Gần đây, Kiran và cs. [15] phân tích ổn định nhiệt và dao động của tấm nano sandwich lõi PoFGM, hai lớp mặt PoFGMEE, sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao gradient biến dạng phi cục bộ. Trên thực tế, sự phân bố lỗ rỗng trong vật liệu FGM xốp có thể là ngẫu nhiên do quá trình chế tạo hoặc được chủ động thiết kế để đạt các mục tiêu kỹ thuật như giảm khối lượng, điều chỉnh độ cứng và kiểm soát đặc tính dao động.

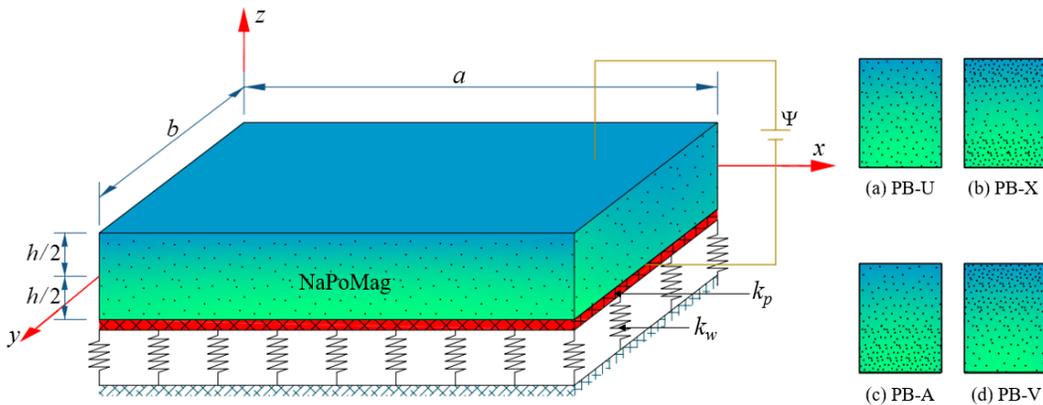
Hiểu rõ cách thức kết cấu tương tác với nền là một vấn đề cơ bản trong thiết kế kết cấu và đã được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm. Để mô phỏng tương tác này, người ta thường sử dụng mô hình kết cấu đặt trên nền đàn hồi [10, 16, 17], một cách tiếp cận đơn giản nhưng hiệu quả để biểu diễn quan hệ giữa hai môi trường liên tục, ví dụ như các kết cấu tiếp xúc với polyme hoặc các vật liệu nền có khả năng biến dạng. Mặc dù nhiều mô hình nền đã được đề xuất, nền Winkler và nền Winkler-Pasternak vẫn là hai mô hình phổ biến và được ứng dụng rộng rãi nhất. Xu và cs. [18] đã nghiên cứu độ ổn định của dầm nano FGM trên nền Winkler-Pasternak trong môi trường nhiệt độ. Lezgy-Nazargah và Cheraghi [19] đã phân tích ứng xử uốn của tấm nano ba lớp FGMEE đặt trên nền đàn hồi hai hệ số Winkler-Pasternak. Zhang và cs. [20] đã khảo sát ổn định động của vỏ nano hình trụ đàn hồi điện-từ-nhiệt đặt trên nền Winkler-Pasternak theo lý thuyết NET.

Qua tổng quan tài liệu cho thấy, dao động của tấm nano thông minh chủ yếu được phân tích bằng FSDT và HSDT, trong đó HSDT được sử dụng phổ biến để mô tả ứng xử cơ học dưới tác động của các trường điện, nhiệt, từ và nền đàn hồi. Tuy nhiên, các mô hình HSDT thường phức tạp và tốn thời gian tính toán. Vì vậy, lý thuyết SFSST được lựa chọn nhằm giảm độ phức tạp và số ẩn của mô hình, đồng thời vẫn đảm bảo độ chính xác cần thiết cho các phân tích kỹ thuật. Mặc dù đã có nhiều nghiên cứu phân tích dao động của tấm nano thông minh, nhưng chưa có công trình nào xem xét đồng thời ảnh hưởng của nhiệt độ, độ ẩm và từ trường lên tấm nano FGM áp từ có bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi. Điều này cho thấy sự cần thiết của việc nghiên cứu để lấp đầy khoảng trống trên. Do đó, bài báo xây dựng mô hình giải tích phân tích dao động tấm NaPoMag trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak dưới tác động kết hợp của nhiệt, ẩm và từ trường, dựa trên lý thuyết SFSST. Nghiên cứu này góp phần cung cấp cơ sở khoa học cho việc ứng dụng các kết cấu tấm nano FGM trong điều kiện thực tế, khi xét đến ảnh hưởng của nền đàn hồi cũng như các tác động của môi trường nhiệt độ, độ ẩm và từ trường.

## 2. Mô hình lý thuyết

### 2.1. Mô hình tấm NaPoMag đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak

Hình 1 mô tả tấm chữ nhật bằng vật liệu FGM áp từ có chứa các vi bọt rỗng, đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak với các hệ số độ cứng gồm:  $k_w$  (độ cứng của lớp nền lò xo),  $k_p$  (độ cứng của lớp nền chịu cắt). Tấm được chế tạo từ hai loại vật liệu, với bề mặt trên là  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  và bề mặt dưới là Terfenol-D. Tấm chịu tác động của từ trường  $\Psi(x, y, z)$ , như minh họa trong Hình 1.



Hình 1. Mô hình tấm NaPoMag đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak và các kiểu phân bố bọt rỗng: (a) phân bố đều, (b) dạng chữ X, (c) dạng chữ A, (d) dạng chữ V

Sự biến thiên theo chiều dày của các tính chất vật liệu hiệu dụng của tấm NaPoMag được mô tả bằng quy luật lũy thừa sửa đổi của Doroushi và cs. [21]:

$$\mathfrak{I}(z) = \mathfrak{I}_l + (\mathfrak{I}_u - \mathfrak{I}_l) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p - \frac{e_0}{2} (\mathfrak{I}_u + \mathfrak{I}_l) \mathfrak{N} \quad (1)$$

trong đó  $\mathfrak{I}(z)$  là các tính chất hiệu dụng của vật liệu áp từ có bọt rỗng (PoFGMag) bao gồm: Mô đun đàn hồi  $E_{ij}(z)$ , hằng số áp từ  $q_{ij}(z)$ , hệ số từ thẩm  $\chi_{ij}$ , hệ số giãn nở nhiệt  $\alpha_{ij}$ , hệ số giãn nở ẩm  $\beta_{ij}$  và khối lượng riêng  $\rho(z)$ ;  $p$  là chỉ số tỷ lệ thể tích của vật liệu FGM; hệ số Poisson  $\nu(z)$  lấy gần đúng là hằng số theo chiều dày tấm;  $\mathfrak{I}_u$  và  $\mathfrak{I}_l$  lần lượt là các tính chất của vật liệu tại mặt trên và dưới;  $e_0$  là hệ số bọt rỗng;  $\mathfrak{N}(z)$  là hàm phân bố bọt rỗng, xác định theo Bảng 1.

Nghiên cứu này xem xét bốn kiểu phân bố vi bọt rỗng (KPB) theo Karaca và Esen [22]: Phân bố đều (PB-U, Hình 1(a)), Phân bố chữ X (PB-X, Hình 1(b)), Phân bố chữ V (PB-V, Hình 1(c)) và Phân bố chữ A (PB-A, Hình 1(d)).

Bảng 1. Hàm số xác định kiểu phân bố vi bọt rỗng  $\mathfrak{N}(z)$ 

KPB	PB-U	PB-X	PB-A	PB-V
$\mathfrak{N}(z)$	1	$(1 - e_0) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	$(1 - e_0) \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right)$	$(1 - e_0) \cos\left(\frac{\pi z}{2h} - \frac{\pi}{4}\right)$

## 2.2. Các hệ thức cơ bản

Để phân tích dao động của tấm NaPoMag đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak, bài báo sử dụng lý thuyết tấm SFSĐT.

Trường chuyển vị của một điểm bất kỳ thuộc tấm được giả thiết theo Thai và Choi [23] như sau:

$$u(x, y, z, t) = u_0 - zw_{b,x}; \quad v(x, y, z, t) = v_0 - zw_{b,y}; \quad w(x, y, z, t) = w_b + w_s. \quad (2)$$

ở đây,  $u_0, v_0$  là các chuyển vị của mặt trung bình theo hai phương  $x, y$ ;  $w_b$  và  $w_s$  là các thành phần chuyển vị ngang do tác động của mômen uốn và lực cắt.

Để đảm bảo điều kiện Maxwell cho trường từ theo chiều dày tấm, Ebrahimi và Gholami [8] đã giả định hàm từ thế có dạng:

$$\Psi(x, y, z, t) = -\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\psi_0 + \frac{2z}{h}\Omega \quad (3)$$

trong đó  $\Omega$  và  $\psi_0$  lần lượt là từ trường ngoài và từ trường tại mặt trung bình của tấm.

Trường biến dạng  $\{\varepsilon\}$  được suy ra từ trường chuyển vị:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \\ \partial w_s/\partial x \\ \partial w_s/\partial y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} - zw_{b,xx} \\ v_{0,y} - zw_{b,yy} \\ u_{0,y} + zv_{0,x} - 2zw_{b,xy} \\ w_{s,x} \\ w_{s,y} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Theo (3), véc tơ từ trường  $\{H\} = \{H_x \ H_y \ H_z\}^T$  được xác định như sau:

$$\begin{aligned} H_x &= -\Psi_{,x} = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\psi_{0,x}; & H_y &= -\Psi_{,y} = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\psi_{0,y}; \\ H_z &= -\Psi_{,z} = -\frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\psi_0 - \frac{2\Omega}{h}. \end{aligned} \quad (5)$$

Đối với tấm NaPoMag tuyến tính tiếp xúc với tải trọng cơ-từ, quan hệ ứng suất - biến dạng theo lý thuyết đàn hồi phi cục bộ được biểu diễn [24–26]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha_{11}\Delta T - \beta_{11}\Delta C \\ \varepsilon_{yy} - \alpha_{22}\Delta T - \beta_{22}\Delta C \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{q}_{31} \\ 0 & 0 & \tilde{q}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{q}_{15} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix}; \\ \mathfrak{R} &= (1 - \xi^2 \nabla^2) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathfrak{R} \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{q}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{q}_{15} \\ \tilde{q}_{31} & \tilde{q}_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\chi}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\chi}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\chi}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\lambda}_{33} \end{bmatrix} \Delta T + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\eta}_{33} \end{bmatrix} \Delta C$$

trong đó  $\xi = e_0^N a^N$  là tham số phi cục bộ,  $e_0^N$  là hằng số phi cục bộ không thứ nguyên và  $a^N$  là chiều dài đặc trưng của vật liệu nano,  $\tilde{C}_{ij}$ ,  $\tilde{q}_{ij}$ ,  $\tilde{\chi}_{ij}$ ,  $\tilde{\lambda}_{33}$ ,  $\tilde{\eta}_{33}$  là các thuộc tính của vật liệu FGMag;  $\{\sigma_{ij}\}$  và  $\{B_i\}$  lần lượt là véc tơ ứng suất và chuyển dịch từ trường;  $\{\varepsilon_{kl}\}$ ,  $\{H_m\}$  là véc tơ biến dạng và từ trường;  $\alpha_{ij}^c$  và  $\beta_{ij}^c$  là các hệ số giãn nở do nhiệt độ và độ ẩm.

Trong nghiên cứu này, nhiệt độ và độ ẩm được giả thiết phân bố đều trên toàn bộ tấm NaPoMag. Sự biến thiên của nhiệt độ và độ ẩm được xác định lần lượt theo:

$$\Delta T = (T - T_0); \quad \Delta C = (C - C_0) \quad (7)$$

với  $T$  là nhiệt độ làm việc (nhiệt độ môi trường) và  $T_0$  là nhiệt độ tham chiếu ban đầu;  $C$  là độ ẩm làm việc (độ ẩm môi trường) và  $C_0$  là độ ẩm tham chiếu ban đầu.

Các thuộc tính vật liệu PoFGMag được xác định theo Ebrahimi và cs. [27]:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{11} &= C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}; & \tilde{C}_{12} &= C_{12} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}; & \tilde{C}_{44} &= \tilde{C}_{55} = \tilde{C}_{66} = C_{66}; \\ \tilde{q}_{31} &= q_{31} - \frac{q_{33}C_{13}^2}{C_{33}}; & \tilde{q}_{15} &= q_{15}; & \tilde{\chi}_{11} &= \chi_{11}; & \tilde{\chi}_{33} &= \chi_{33} + \frac{q_{33}^2}{C_{33}}; \\ \tilde{\lambda}_{33} &= \lambda_{33} + \frac{q_{33}k_{33}}{C_{33}}; & \tilde{\eta}_{33} &= \eta_{33} + \frac{q_{33}h_{33}}{C_{33}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Tích phân các biểu thức trong phương trình (6) theo chiều dày tấm ta được:

$$\begin{aligned} \Re \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{b,xx} \\ -w_{b,yy} \\ -2w_{b,xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{31}^m \\ A_{31}^m \\ 0 \end{Bmatrix} \psi_0 \\ \Re \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{b,xx} \\ -w_{b,yy} \\ -2w_{b,xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_{31}^m \\ E_{31}^m \\ 0 \end{Bmatrix} \psi_0 \\ \Re \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{s,x} \\ w_{s,y} \end{Bmatrix} - A_{15}^m \begin{Bmatrix} \psi_{0,x} \\ \psi_{0,y} \end{Bmatrix} \\ \int_{-h/2}^{h/2} \Re \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \end{Bmatrix} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz &= E_{15}^m \begin{Bmatrix} w_{s,x} \\ w_{s,y} \end{Bmatrix} + X_{11}^m \begin{Bmatrix} \psi_{0,x} \\ \psi_{0,y} \end{Bmatrix} \\ \int_{-h/2}^{h/2} \Re B_z \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz &= A_{31}^m (u_{0,x} + v_{0,y}) - E_{31}^m \nabla^2 w_b - X_{33}^m \psi_0 + F_{33}^m \Delta T + L_{33}^m \Delta C \end{aligned} \quad (9)$$

trong đó  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $A_{ij}^m$ ,  $E_{ij}^m$  là các hệ số độ cứng được xác định bởi:

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{C}_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (ij = 11, 12, 66) \\ A_{44} = A_{55} = k_s & \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{C}_{55} dz; \quad \{A_{31}^m, E_{31}^m\} = \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{q}_{31} \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \{1, z\} dz \\ A_{15}^m &= \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{q}_{15} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz; \quad \{F_{33}^m, L_{33}^m\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \{\tilde{\lambda}_{33}, \tilde{\eta}_{33}\} dz \\ \{X_{11}^m, X_{33}^m\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \tilde{\chi}_{11} \cos^2\left(\frac{\pi z}{h}\right), \tilde{\chi}_{33} \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right\} dz. \end{aligned} \quad (10)$$

Phương trình chuyển động được thiết lập từ nguyên lý Hamilton mở rộng:

$$\int_0^t \delta(\Pi_S - \Pi_W - \Pi_K) dt = 0 \quad (11)$$

trong đó  $\Pi_S$  là năng lượng biến dạng,  $\Pi_W$  là công do ngoại lực thực hiện và  $\Pi_K$  là động năng. Biến phân của năng lượng biến dạng có thể được viết là:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_S &= \int_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV \\ &= \int_V \left( \sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta\gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta\gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta\gamma_{yz} - B_x \delta H_x - B_y \delta H_y - B_z \delta H_z \right) dV \end{aligned} \quad (12)$$

Thay thế các phương trình (4) vào phương trình (12) ta được:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_S &= \int_A \left( N_x \delta u_{0,x} - M_x \delta w_{b,xx} + N_y \delta v_{0,y} - M_y \delta w_{b,yy} + N_{xy} (\delta u_{0,y} + \delta v_{0,x}) \right) dx dy \\ &\quad - 2M_{xy} \delta w_{b,xy} + Q_{xz} \delta w_{s,x} + Q_{yz} \delta w_{s,y} \\ &\quad + \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left( -B_x \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \delta\psi_{0,x} - B_y \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \delta\psi_{0,y} + B_z \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \delta\psi_0 \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (13)$$

Các thành phần nội lực và mômen  $N_{ij}$ ,  $M_{ij}$ ,  $Q_{ij}$  được xác định theo:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (z\sigma_x, z\sigma_y, z\sigma_{xy}) dz; \quad (Q_{xz}, Q_{yz}) = \int_{-h/2}^{h/2} k_s (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \end{aligned} \quad (14)$$

với  $k_s$  là hệ số hiệu chỉnh cắt, trong nghiên cứu này lấy  $k_s = 5/6$ .

Biến phân của công được thực hiện bởi các lực tác dụng lên tấm NaPoMag đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak được viết dưới dạng của Liu và cs. [28]:

$$\delta\Pi_W = \int_A \left( N_x^0 (w_b + w_s)_{,x} \delta(w_b + w_s)_x + N_y^0 (w_b + w_s)_{,y} \delta(w_b + w_s)_y - k_w \delta(w_b + w_s) + k_p ((w_b + w_s)_{,xx} + (w_b + w_s)_{,yy}) \delta(w_b + w_s) \right) dx dy \quad (15)$$

trong đó  $N_x^0$ ,  $N_y^0$ ,  $N_{xy}^0$  là các tải trọng trong mặt phẳng;  $k_w$ ,  $k_p$  là các hệ số nền đàn hồi và không xét đến hiệu ứng phi cục bộ của nền.

Trong nghiên cứu này, giả định rằng tấm NaPoMag chịu tác động của nhiệt độ  $T$ , độ ẩm  $C$ , từ trường ngoài  $\Omega$ , và bỏ qua tải trọng cắt. Do đó,  $N_{xy}^0 = 0$  và  $N_x^0$ ,  $N_y^0$  là các tải trọng tác dụng trong mặt phẳng, được định nghĩa như sau [27, 29]:

$$\begin{aligned} N_x^0 &= N_y^0 = N^H + N^T + N^C; \quad N_x^H = N_y^H = - \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{q}_{31} \frac{2\Omega}{h} dz \\ N_x^T &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tilde{C}_{11} \tilde{\alpha}_{11} + \tilde{C}_{12} \tilde{\alpha}_{22}) \Delta T dz; \quad N_y^T = \int_{-h/2}^{h/2} (\tilde{C}_{11} \tilde{\alpha}_{22} + \tilde{C}_{12} \tilde{\alpha}_{11}) \Delta T dz \\ N_x^C &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tilde{C}_{11} \tilde{\beta}_{11} + \tilde{C}_{12} \tilde{\beta}_{22}) \Delta C dz; \quad N_y^C = \int_{-h/2}^{h/2} (\tilde{C}_{11} \tilde{\beta}_{22} + \tilde{C}_{12} \tilde{\beta}_{11}) \Delta C dz \end{aligned} \quad (16)$$

Biến phân của động năng của tấm được viết dưới dạng:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_K &= \int_V \rho(z) (\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}) dAdz \\ &= \int_A \left( \begin{aligned} &I_0 (\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0\delta\dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta(\dot{w}_b + \dot{w}_s)) \\ &- I_1 (\dot{u}_0\delta\dot{w}_{b,x} + \dot{w}_{b,x}\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0\delta\dot{w}_{b,y} + \dot{w}_{b,y}\delta\dot{v}_0) \\ &+ I_2 (\dot{w}_{b,x}\delta\dot{w}_{b,x} + \dot{w}_{b,y}\delta\dot{w}_{b,y}) \end{aligned} \right) dA \end{aligned} \quad (17)$$

trong đó  $(I_0, I_1, I_2)$  là các mô men quán tính khối lượng được xác định bởi:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, z, z^2) dz \quad (18)$$

với  $\rho(z)$  là khối lượng riêng.

Thay thế các biểu thức (9), (13), (15) và (17) vào phương trình Hamilton (11), sau khi thực hiện phép biến phân và tích phân từng phần, đồng nhất các hệ số của các biến thiên độc lập  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_b$ ,  $\delta w_s$  và  $\delta\psi_0$ , suy ra hệ phương trình chuyển động của tấm NaPoMag theo nội lực.

Xét riêng biến phân  $\delta u_0$  trong (11), sau khi thực hiện phép biến phân và tích phân từng phần, phương trình cân bằng cục bộ có dạng:  $N_{x,x} + N_{xy,y} = I_0\ddot{u}_0 - I_1\ddot{w}_{b,x}$ .

Với mô hình phi cục bộ, nội lực thỏa mãn quan hệ vật liệu (9) dưới dạng:  $\mathfrak{R}\{N\} = (\dots)$ . Áp dụng toán tử  $\mathfrak{R}$  lên hai vế của phương trình cân bằng và sử dụng (9) để thay thế  $\mathfrak{R}N_x$  và  $\mathfrak{R}N_{xy}$ , thu được phương trình thứ nhất trong hệ (19). Các phương trình còn lại được suy ra tương tự khi xét các biến thiên  $\delta v_0$ ,  $\delta w_b$ ,  $\delta w_s$  và  $\delta\psi_0$ .

Trên cơ sở đó, hệ phương trình chuyển động của tấm NaPoMag có xét hiệu ứng phi cục bộ được biểu diễn dưới dạng các ẩn chuyển vị như sau:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A_{11}u_{0,xx} + A_{66}u_{0,yy} + (A_{12} + A_{66})v_{0,xy} - B_{11}w_{b,xxx} - (B_{12} + 2B_{66})w_{b,xyy} \\ & + A_{31}^m\psi_{0,x} - \mathfrak{R}(I_0\ddot{u}_0 - I_1\ddot{w}_{b,x}) = 0 \\ \delta v_0 : & A_{22}v_{0,yy} + A_{66}v_{0,xx} + (A_{12} + A_{66})u_{0,xy} - B_{11}w_{b,yyy} - (B_{12} + 2B_{66})w_{b,xyy} \\ & + A_{31}^m\psi_{0,y} - \mathfrak{R}(I_0\ddot{v}_0 - I_1\ddot{w}_{b,y}) = 0 \\ \delta w_b : & B_{11}u_{0,xxx} + (B_{12} + 2B_{66})u_{0,xyy} + (B_{12} + 2B_{66})v_{0,xyy} + B_{22}v_{0,yyy} \\ & - D_{11}w_{b,xxxx} - 2(D_{12} + 2D_{66})w_{b,xyy} - D_{22}w_{b,yyyy} \\ & + E_{31}^m\nabla^2\psi_0 + \mathfrak{R}(-(N^T + N^C + N^H - k_p)\nabla^2(w_b + w_s) - k_w(w_b + w_s) \\ & - I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_1(\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) + I_2\nabla^2\ddot{w}_b) = 0 \\ \delta w_s : & A_{55}w_{s,xx} + A_{44}w_{s,yy} + F_{31}^m\nabla^2\psi_0 + \mathfrak{R}(-(N^T + N^C + N^H - k_p)\nabla^2(w_b + w_s) \\ & - k_w(w_b + w_s) - A_{15}^m\nabla^2\psi_0 - I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_1(\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) + I_2\nabla^2\ddot{w}_b) = 0 \\ \delta\psi_0 : & A_{31}^m(u_{0,x} + v_{0,y}) - E_{31}^m\nabla^2w_b + E_{15}^m\nabla^2w_s + X_{11}^m\nabla^2\psi_0 - X_{33}^m\psi_0 = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

### 2.3. Lời giải Navier

Trong trường hợp tấm NaPoMag chữ nhật bốn cạnh tựa khớp (SSSS), điều kiện biên được áp dụng đối với chuyển vị uốn, và được biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{aligned} v_0 = w_b = w_s = \psi_0 = M_x = 0, \text{ tại } x = 0, a \\ u_0 = w_b = w_s = \psi_0 = M_y = 0, \text{ tại } y = 0, b \end{aligned} \quad (20)$$

Nghiên cứu này xét điều kiện biên SSSS chỉ đối với chuyển vị uốn của tấm. Ảnh hưởng của nhiệt độ và độ ẩm được xét thông qua các lực màng nhiệt-ẩm, được mô hình hóa dưới dạng ứng suất màng ban đầu trong phương trình chuyển động.

Các chuyển vị thỏa mãn điều kiện biên (20), được giả thiết như sau:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\omega t} \cos \zeta x \sin \vartheta y; & v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega t} \sin \zeta x \cos \vartheta y \\
 w_b &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} e^{i\omega t} \sin \zeta x \sin \vartheta y; & w_s &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} e^{i\omega t} \sin \zeta x \sin \vartheta y \\
 \psi_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} e^{i\omega t} \sin \zeta x \sin \vartheta y
 \end{aligned} \tag{21}$$

trong đó  $\zeta = m\pi/a$ ,  $\vartheta = n\pi/b$ ,  $\omega$  là tần số dao động riêng (rad/s) và các hệ số cần xác định là  $\{X\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}, \psi_{mn}\}^T$ .

Sau khi thay các phương trình (9), (10) và (21) vào hệ phương trình chuyển động (19) và thực hiện các biến đổi đại số, phương trình thu được có dạng:

$$\left\{ \left[ \tilde{K} \right] - \omega^2 \left[ \tilde{M} \right] \right\} \{X\} = \{0\} \tag{22}$$

trong đó các hệ số  $k_{ij}$  và  $m_{ij}$  cấu thành ma trận độ cứng  $\left[ \tilde{K} \right]$  và ma trận khối lượng  $\left[ \tilde{M} \right]$  được trình bày trong Phụ lục A. Các tần số dao động của tấm NaPoMag đặt trên nền đàn hồi được xác định từ nghiệm của bài toán trị riêng sau:

$$\left| \left[ \tilde{K} \right] - \omega^2 \left[ \tilde{M} \right] \right| = 0 \tag{23}$$

Giải phương trình trị riêng thu được các tần số góc  $\omega_{mn}$  ứng với các mode dao động  $(m, n)$ ; trong đó tần số dao động riêng cơ bản được xác định theo  $\omega = \min \{\omega_{mn}\}$ .

### 3. Kết quả số và thảo luận

#### 3.1. Kiểm chứng mô hình

Mô hình đề xuất được kiểm chứng thông qua hai ví dụ. Trong ví dụ thứ nhất, xét tấm nano đẳng hướng, trong đó các tần số dao động riêng không thứ nguyên  $\tilde{\omega}$  được liệt kê trong Bảng 2 và đối chiếu với các kết quả giải tích dựa trên lý thuyết tấm bậc ba (TSĐT) và lý thuyết tấm bậc nhất (FSĐT) của Aghababaei và Reddy [30].

Bảng 2. So sánh tần số dao động cơ bản không thứ nguyên  $\tilde{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$  của tấm nano đẳng hướng ( $a = b = 10$ ,  $E = 30.10^6$ ,  $\nu = 0,3$ )

$\xi^2$ (nm) <sup>2</sup>	Mô hình		
	FSĐT [30]	TSĐT [30]	Bài báo
0	0,0930	0,0935	0,0933
1	0,0850	0,0854	0,0852
5	0,0660	0,0663	0,0662

Khi không có điện thế ngoài áp đặt ( $V = 0$ ), mô hình áp điện-từ đối với tấm PoFGMEE suy biến về trường hợp áp từ thuần túy, nên ví dụ so sánh thứ hai được tiến hành kiểm chứng đối với tần số dao động cơ bản không thứ nguyên  $\tilde{\omega} = \omega a^2/h \sqrt{\rho_{CoFe_2O_3}/C_{11CoFe_2O_4}}$  của tấm PoFGMEE

(CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>/BaTiO<sub>3</sub>) chịu từ trường ngoài áp đặt. Các kết quả so sánh được trình bày trong Bảng 3 và được đối chiếu với mô hình giải tích sử dụng lý thuyết HSDT-4 trong [27]. Các thông số vật liệu của CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> được trích dẫn theo [27].

Bảng 3. So sánh tần số  $\bar{\omega}$  của tấm PoFGMEE (CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>/BaTiO<sub>3</sub>) ( $\xi = 0, a = b = 100h; e_0 = 0,2; \Omega = -500; K_w = K_p = 0$ )

Kiểu phân bố bọt rỗng	$p = 0,2$		$p = 1$		$p = 5$	
	[27]	Bài báo	[27]	Bài báo	[27]	Bài báo
FGMag-I	3,27061	3,23256	3,46440	3,34986	3,86939	3,74004
FGMag-II	3,43608	3,37691	3,59537	3,47099	3,93172	3,79315

Các kết quả so sánh trong Bảng 2 và Bảng 3 cho thấy sai số rất nhỏ, qua đó khẳng định độ tin cậy của mô hình đề xuất và chương trình tính toán, đồng thời làm cơ sở cho các phân tích tiếp theo.

### 3.2. Phân tích dao động tấm NaPoMag đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak

Trong mục này, tần số dao động của các tấm NaPoMag (CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>/Terfenol-D) đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak như minh họa trong Hình 1 được nghiên cứu và thảo luận chi tiết. Kích thước tấm theo chiều rộng  $a = 1$  (nm). Các thông số vật liệu của CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> được lấy theo [31, 32]:  $C_{11} = C_{22} = 286$  (GPa),  $C_{33} = 269,5$  (GPa),  $C_{13} = C_{23} = 170,5$  (GPa),  $C_{12} = 173$  (GPa),  $C_{55} = 45,3$  (GPa),  $C_{66} = 56,5$  (GPa),  $q_{31} = 580,3$  (N/Am),  $q_{33} = 699,7$  (N/Am),  $q_{15} = 550$  (N/Am),  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 10.10^{-5}$  (K<sup>-1</sup>),  $\beta_{11} = 0, \beta_{22} = 1,1.10^{-4}$  (wt.% H<sub>2</sub>O)<sup>-1</sup>,  $\chi_{11} = 800.10^{-6}$  (Ns<sup>2</sup>C<sup>-2</sup>/2),  $\chi_{33} = 930.10^{-6}$  (Ns<sup>2</sup>C<sup>-2</sup>/2),  $\rho = 5300$  (kg m<sup>-3</sup>),  $\lambda_{33} = 3,2.10^{-4}$  (H/m<sup>2</sup>K),  $\eta_{33} = 0$ . Các thông số vật liệu của Terfenol-D được cho như sau theo Calkins và Flatau [33, 34]:  $C_{11} = C_{22} = 110$  (GPa),  $C_{33} = 120$  (GPa),  $C_{13} = C_{23} = 60$  (GPa),  $C_{12} = 55$  (GPa),  $C_{55} = 25$  (GPa),  $C_{66} = 30$  (GPa),  $q_{31} = 90$  (N/Am),  $q_{33} = 100$  (N/Am),  $q_{15} = 90$  (N/Am),  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 12.10^{-5}$  (K<sup>-1</sup>),  $\beta_{11} = 0, \beta_{22} = 0,06$  (wt.% H<sub>2</sub>O)<sup>-1</sup>,  $\chi_{11} = 800.10^{-6}$  (Ns<sup>2</sup>C<sup>-2</sup>/2),  $\chi_{33} = 900.10^{-6}$  (Ns<sup>2</sup>C<sup>-2</sup>/2),  $\rho = 9250$  (kg m<sup>-3</sup>),  $\lambda_{33} = 2,8.10^{-4}$  (H/m<sup>2</sup>K),  $\eta_{33} = 0$ .

Các công thức tính tần số và tham số độ cứng nền đàn hồi không thứ nguyên:

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_{CoFe_2O_3}}{C_{11CoFe_2O_3}}}; \quad K_w = k_w \frac{a^4}{h^3 C_{11c}}; \quad K_s = k_s \frac{a^2}{h^3 C_{11c}} \quad (24)$$

#### a. Ảnh hưởng của tham số phi cực bộ và các đặc trưng vật liệu tấm NaPoMag

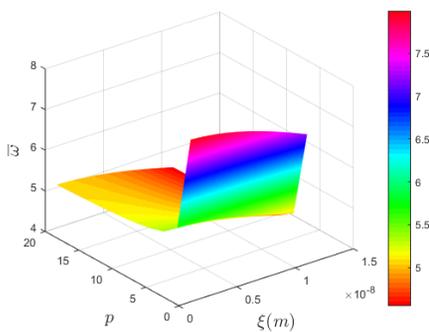
Bảng 4 và Hình 2 trình bày sự biến thiên của tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  của tấm NaPoMag theo tham số phi cực bộ  $\xi$  và chỉ số phân bố thể tích  $p$ . Các kết quả số chỉ ra rằng tần số dao động tự do giảm khi tham số phi cực bộ  $\xi$  tăng. Hiện tượng này phản ánh tác động của hiệu ứng phi cực bộ làm suy giảm độ cứng của vật liệu; do đó, khi  $\xi$  giảm, độ cứng của tấm NaPoMag tăng lên và đạt giá trị lớn nhất trong trường hợp  $\xi = 0$ . Ngoài ra, khi chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  tăng, tần số dao động riêng của tấm NaPoMag có xu hướng giảm. Nguyên nhân là do tấm nano FGM được cấu tạo từ hai pha vật liệu CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> và Terfenol-D; trong đó, Terfenol-D có mô đun đàn hồi nhỏ hơn. Việc tăng  $p$  làm tăng hàm lượng Terfenol-D trong kết cấu, dẫn đến độ cứng tổng thể của tấm giảm, từ đó làm giảm tần số dao động riêng.

Ảnh hưởng của kiểu phân bố bọt rỗng và hệ số lỗ rỗng  $e_0$  đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm NaPoMag được minh họa trong Hình 3. Khi tấm không đặt trên nền đàn hồi (Hình 3(a)), tần số dao động tăng theo  $e_0$  đối với các kiểu phân bố bọt rỗng PB-X và PB-V, trong khi lại có xu hướng giảm đối với các kiểu PB-U và PB-A. Sự khác biệt này xuất phát từ đặc điểm phân bố vật liệu theo chiều dày của tấm, dẫn

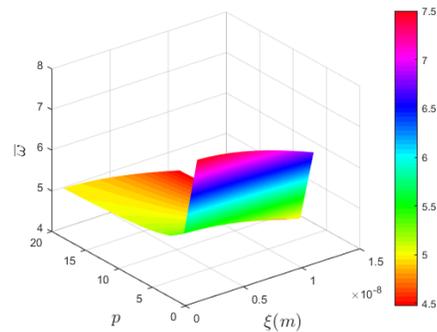
đến mức độ suy giảm độ cứng hiệu dụng khác nhau giữa các kiểu phân bố. Đối với mọi giá trị của  $e_0$ , tấm có kiểu phân bố bọt rỗng PB-X luôn cho tần số dao động riêng lớn nhất, cho thấy kiểu phân bố này duy trì được độ cứng kết cấu tốt hơn so với các dạng còn lại.

Bảng 4. Ảnh hưởng của tham số phi cục bộ  $\xi$  và chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  đến tần số dao động riêng  $\bar{\omega}$  của tấm NaPoMag trên nền đàn hồi ( $b = a = 100 \text{ nm}$ ;  $a/h = 20$ ;  $e_0 = 0,2$ ;  $\Omega = 0$ ;  $K_w = 10$ ,  $K_p = 10$ ;  $\Delta T = \Delta C = 0$ )

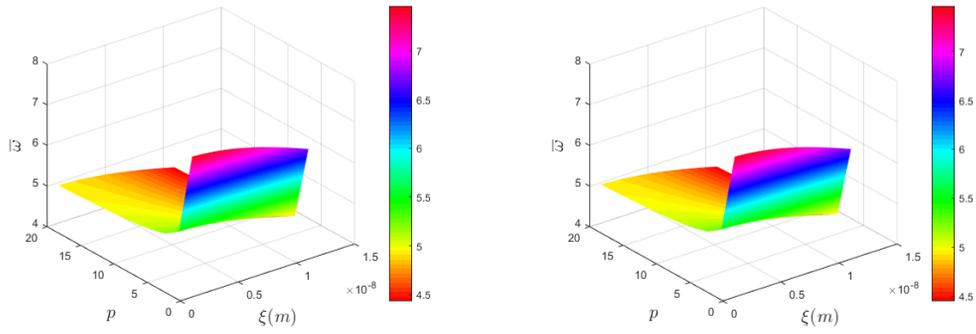
KPB	$\xi$ (nm)	$p = 0$	$p = 1$	$p = 3$	$p = 5$	$p = 10$
PB-U	0	8,0052	6,0517	5,4733	5,3162	5,1661
PB-U	1	7,9973	6,0457	5,4679	5,3110	5,1610
PB-U	3	7,9350	5,9986	5,4254	5,2696	5,1208
PB-U	5	7,8147	5,9077	5,3431	5,1897	5,0432
PB-U	7	7,6441	5,7787	5,2264	5,0764	4,9331
PB-U	9	7,4330	5,6191	5,0821	4,9362	4,7969
PB-X	0	7,5030	5,8560	5,3484	5,2059	5,0670
PB-X	1	7,4809	5,8388	5,3327	5,1906	5,0521
PB-X	3	7,4445	5,8104	5,3068	5,1654	5,0276
PB-X	5	7,3945	5,7714	5,2711	5,1307	4,9938
PB-X	7	7,3316	5,7223	5,2263	5,0870	4,9513
PB-X	9	7,2569	5,6640	5,1731	5,0352	4,9009
PB-A	0	7,4633	5,7954	5,2858	5,1472	5,0152
PB-A	1	7,4414	5,7783	5,2703	5,1320	5,0004
PB-A	3	7,4052	5,7502	5,2447	5,1071	4,9761
PB-A	5	7,3555	5,7116	5,2094	5,0728	4,9427
PB-A	7	7,2929	5,6630	5,1652	5,0296	4,9007
PB-A	9	7,2186	5,6053	5,1125	4,9784	4,8508
PB-V	0	7,4633	5,8428	5,3389	5,1931	5,0474
PB-V	1	7,4414	5,8256	5,3232	5,1779	5,0326
PB-V	3	7,4052	5,7973	5,2973	5,1527	5,0081
PB-V	5	7,3555	5,7583	5,2617	5,1181	4,9745
PB-V	7	7,2929	5,7094	5,2170	5,0746	4,9322
PB-V	9	7,2186	5,6512	5,1638	5,0229	4,8819



(a) PB-U



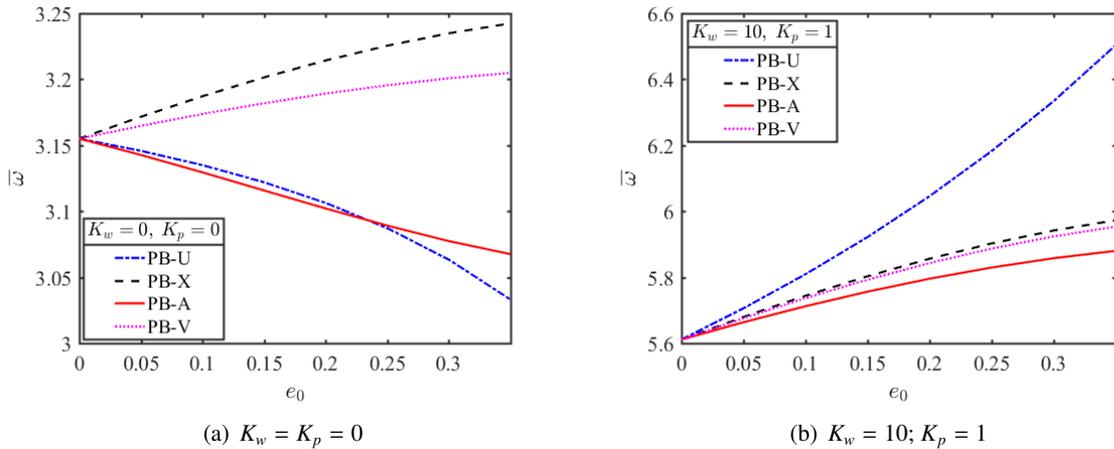
(b) PB-X



(c) PB-A

(d) PB-V

Hình 2. Ảnh hưởng của tham số  $\xi$  và  $p$  đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm NaPoMag trên nền đàn hồi ( $b = a = 100$  nm;  $a/h = 20$ ;  $e_0 = 0,2$ ;  $\Omega = 0$ ;  $K_w = 10$ ,  $K_p = 10$ ;  $\Delta T = \Delta C = 0$ )



(a)  $K_w = K_p = 0$

(b)  $K_w = 10$ ;  $K_p = 1$

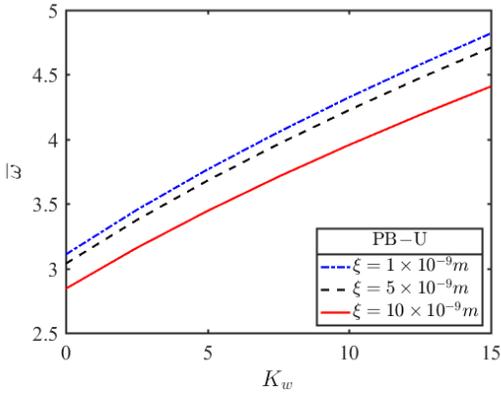
Hình 3. Ảnh hưởng của kiểu phân bố bọt rỗng và hệ số lỗ rỗng  $e_0$  đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm NaPoMag ( $b = a = 100$  nm;  $a/h = 20$ ;  $p = 1$ ;  $\xi = 1$  nm;  $\Omega = 0$ ;  $\Delta T = \Delta C = 0$ )

Khi tấm được đặt trên nền đàn hồi (Hình 3b) với các hệ số nền không thứ nguyên  $K_w = 10$  và  $K_p = 1$ , tần số dao động riêng  $\bar{\omega}$  của bốn tấm với kiểu phân bố bọt rỗng PB-U, PB-X, PB-A và PB-V đều tăng khi hệ số lỗ rỗng  $e_0$  tăng. Trong trường hợp này, tấm có kiểu phân bố bọt rỗng PB-U cho tần số dao động riêng lớn nhất, trong khi tấm PB-A cho giá trị nhỏ nhất. Nguyên nhân là do sự có mặt của nền đàn hồi làm tăng đáng kể độ cứng tổng thể của hệ kết cấu, qua đó làm suy giảm vai trò chi phối của phân bố vật liệu theo chiều dày; vì vậy, sự khác biệt về độ cứng giữa các kiểu phân bố bọt rỗng trở nên kém rõ rệt hơn so với trường hợp không có nền đàn hồi.

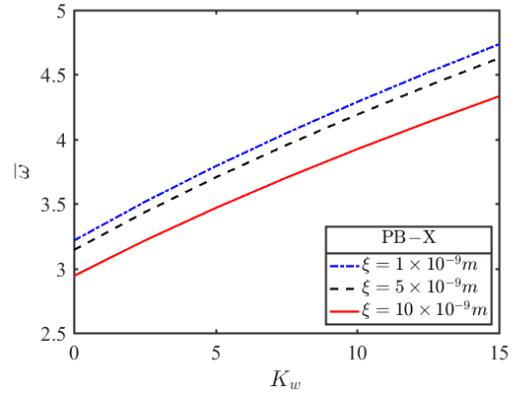
a. Ảnh hưởng của các hệ số độ cứng nền đàn hồi Winkler-Pasternak

Hình 4 và Hình 5 minh họa ảnh hưởng của các hệ số nền đàn hồi Winkler-Pasternak,  $K_w$  và  $K_p$ , đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm NaPoMag. Kết quả cho thấy một xu hướng nhất quán: khi các hệ số nền đàn hồi tăng, tần số dao động riêng của tấm nano cũng tăng đối với cả bốn kiểu phân bố bọt rỗng PB-U, PB-X, PB-A và PB-V. Điều này cho thấy nền đàn hồi góp phần làm tăng độ cứng tổng thể của hệ kết cấu, từ đó làm tăng tần số dao động riêng của tấm. Bên cạnh đó, các kết quả trong Hình 4 và Hình 5 cũng chỉ ra rằng ảnh hưởng của hệ số nền Pasternak  $K_p$  đến độ cứng hiệu dụng của kết cấu là rõ rệt

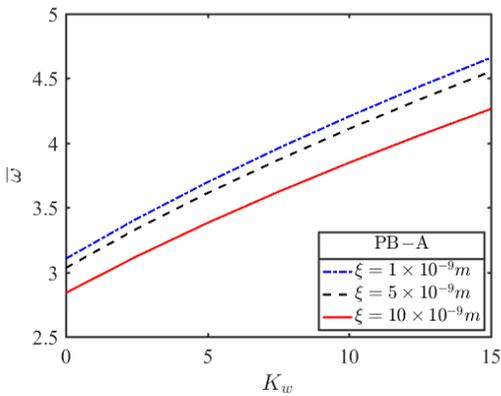
hơn so với hệ số nền Winkler  $K_w$ , do  $K_p$  xét đến tương tác trượt cắt trong nền đàn hồi, qua đó làm tăng độ cứng tổng thể của hệ.



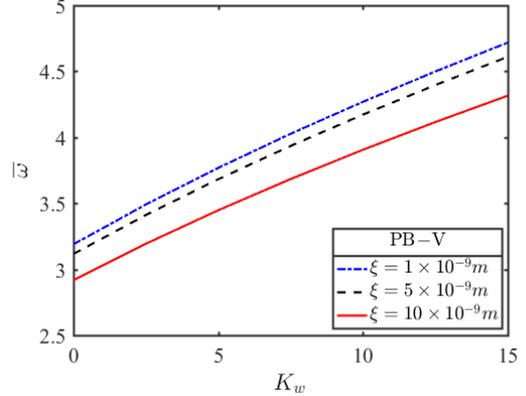
(a) PB-U;  $K_p = 0$



(b) PB-X;  $K_p = 0$

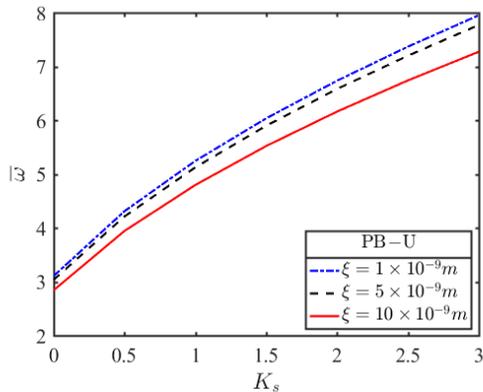


(c) PB-A;  $K_p = 0$

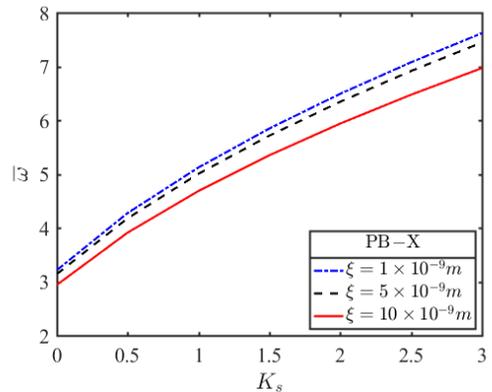


(d) PB-V;  $K_p = 0$

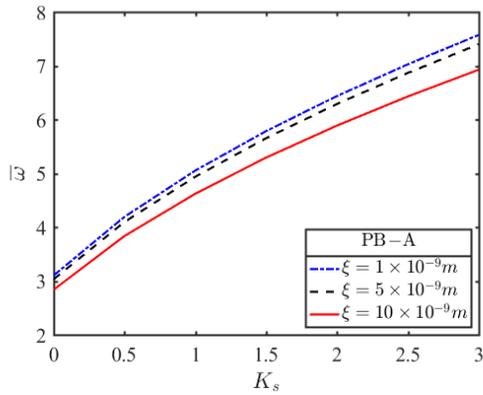
Hình 4. Ảnh hưởng của các hệ số độ cứng nền đàn hồi  $K_w$  đến tần số  $\omega$  của tấm NaPoMag ( $b = a = 100 \text{ nm}$ ;  $a/h = 20$ ;  $p = 1$ ;  $\Omega = 0$ ;  $\Delta T = \Delta C = 0$ )



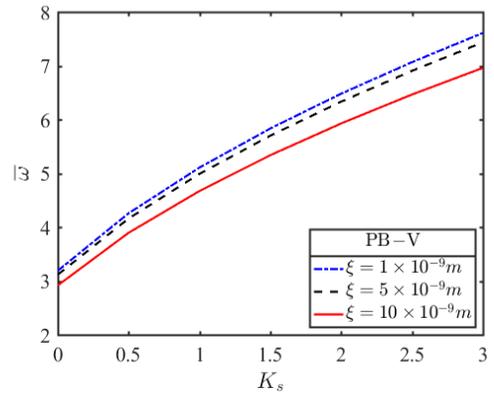
(a) PB-U;  $K_w = 0$



(b) PB-X;  $K_w = 0$



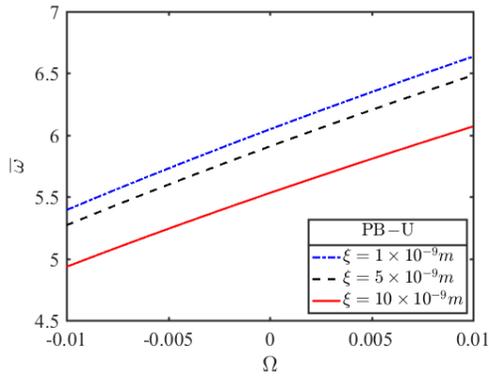
(c) PB-V;  $K_w = 0$



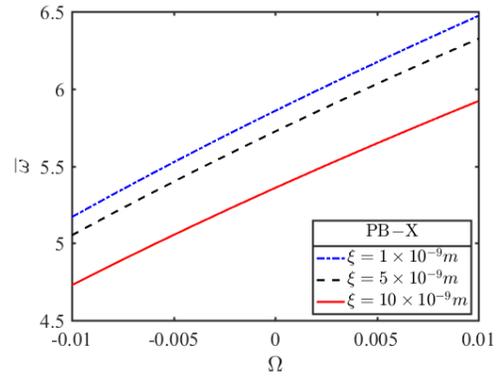
(d) PB-A;  $K_w = 0$

Hình 5. Ảnh hưởng của các hệ số độ cứng nền đàn hồi  $K_p$  đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm NaPoMag ( $b = a = 100 \text{ nm}$ ;  $a/h = 20$ ;  $p = 1$ ;  $\Omega = 0$ ;  $\Delta T = \Delta C = 0$ )

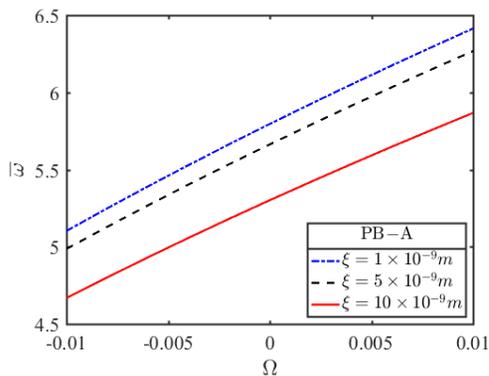
b. Ảnh hưởng của từ trường áp đặt



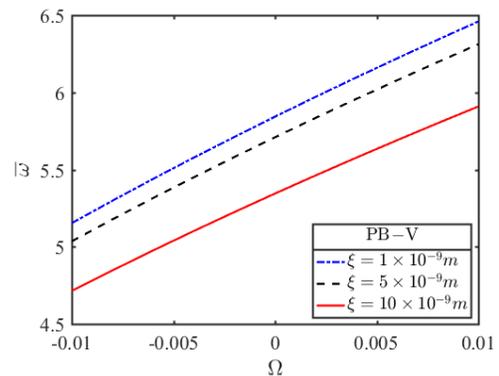
(a) PB-U



(b) PB-X



(c) PB-A



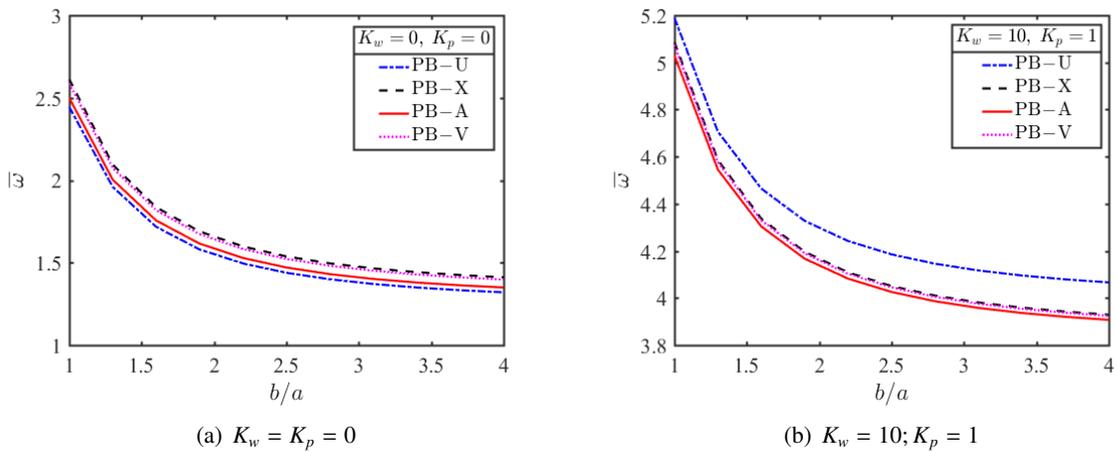
(d) PB-V

Hình 6. Ảnh hưởng của từ trường áp đặt  $\Omega$  đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm NaPoMag trên nền đàn hồi ( $b = a = 100 \text{ nm}$ ;  $a/h = 20$ ;  $e_0 = 0,2$ ;  $K_w = 10K_p = 10$ ;  $\Delta T = \Delta C = 0$ )

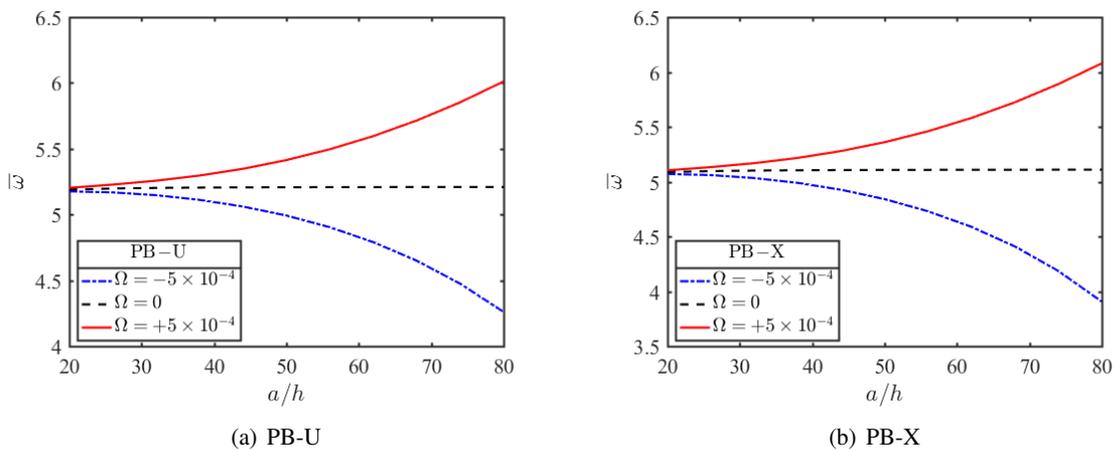
Ảnh hưởng của từ trường áp đặt đến tần số dao động riêng  $\bar{\omega}$  của tấm NaPoMag được thể hiện trong Hình 6. Kết quả cho thấy khi tham số từ trường  $\Omega$  tăng, tần số dao động riêng  $\bar{\omega}$  của các tấm NaPoMag đặt trên nền đàn hồi cũng tăng theo. Điều này cho thấy từ trường ngoài góp phần làm tăng độ cứng hiệu dụng của tấm NaPoMag, qua đó làm tăng tần số dao động riêng, do hiệu ứng ghép từ-đàn hồi giữa trường từ và trường cơ học, làm phát sinh các ứng suất từ cảm ứng và làm tăng độ cứng hiệu dụng của tấm.

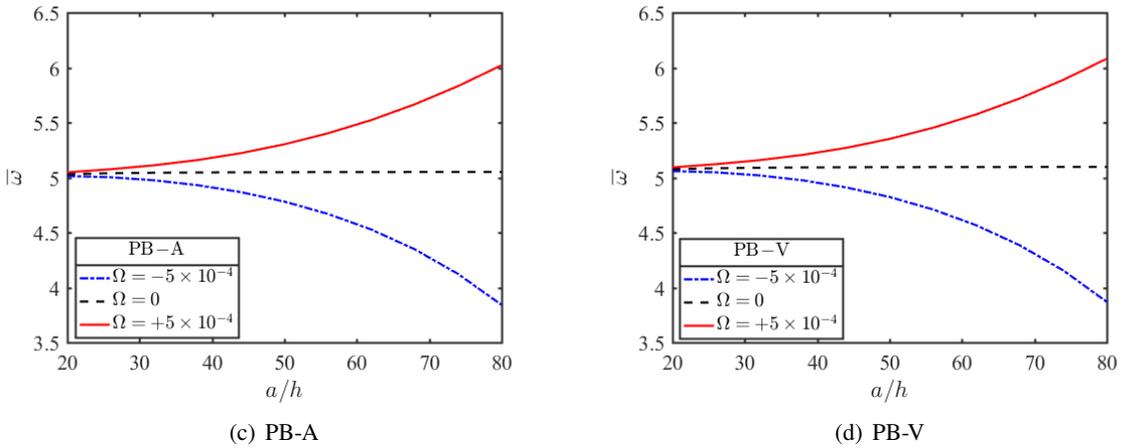
d. Ảnh hưởng của các kích thước hình học

Ảnh hưởng của tỷ số hình học  $b/a$  (với  $a$  cố định và  $b$  thay đổi, không xét đến tác động của từ trường, nhiệt độ và độ ẩm bên ngoài) đến tần số dao động riêng không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  của tấm NaPoMag được minh họa trong Hình 7. Kết quả cho thấy khi tỷ số  $b/a$  tăng, tần số dao động riêng của tấm giảm, phản ánh sự suy giảm độ cứng hiệu dụng của kết cấu. Nguyên nhân là do khi  $b$  tăng, chiều dài nhịp uốn của tấm theo phương dao động tăng, làm tăng độ mềm uốn và giảm khả năng chống biến dạng, từ đó dẫn đến sự suy giảm tần số dao động riêng.



Hình 7. Ảnh hưởng của tỷ số hình học  $b/a$  đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm NaPoMag ( $a = 100 \text{ nm}$ ;  $a/h = 20$ ;  $e_0 = 0,2$ ;  $p = 5$ ;  $\xi = 5 \text{ nm}$ ;  $\Delta T = \Delta C = 0$ )



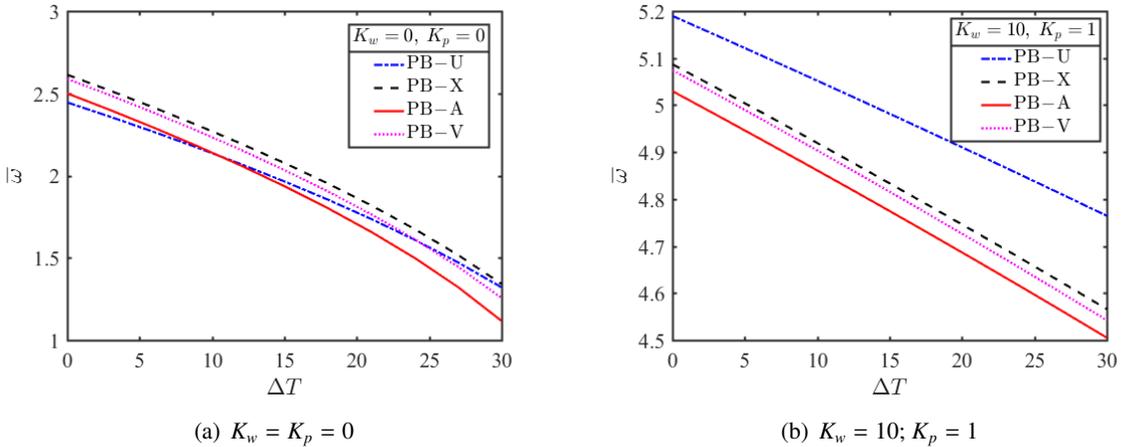


Hình 8. Ảnh hưởng của tỷ số hình học  $a/h$  đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm NaPoMag ( $b = a = 100 \text{ nm}$ ;  $e_0 = 0,2$ ;  $p = 5$ ;  $\xi = 5 \text{ nm}$ ;  $K_w = 10K_p = 10$ ;  $\Delta T = \Delta C = 0$ )

Tiếp theo, ảnh hưởng của tỷ số  $a/h$  đến đặc tính dao động của tấm được phân tích có xét đến tác động của từ trường. Kết quả trình bày trong Hình 8 cho thấy tần số dao động  $\bar{\omega}$  phụ thuộc đáng kể vào tỷ số  $a/h$  khi có từ trường tác dụng. Cụ thể, từ trường dương ( $\Omega > 0$ ) làm tăng tần số dao động, trong khi từ trường âm ( $\Omega < 0$ ) có xu hướng làm giảm tần số. Có thể nhận thấy rằng sự gia tăng của tỷ số  $a/h$  làm cho sự khác biệt giữa các tần số tương ứng với từ trường dương và âm ngày càng lớn. Điều này cho thấy sự tương tác giữa hình học và từ trường chi phối đáng kể đặc tính dao động của kết cấu nano, đặc biệt đối với tấm mỏng.

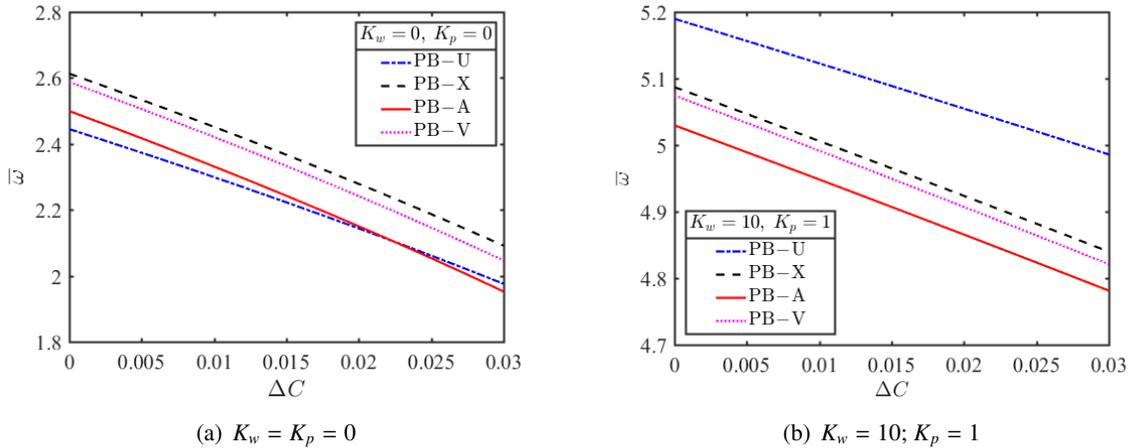
c. Ảnh hưởng của nhiệt độ, độ ẩm

Hình 9 và Hình 10 lần lượt trình bày ảnh hưởng của sự gia tăng nhiệt độ và độ ẩm môi trường đến tần số dao động riêng của tấm NaPoMag với bốn kiểu phân bố bọt rỗng (PB-U, PB-X, PB-A và PB-V). Các kết quả được khảo sát trong hai trường hợp: tấm không đặt trên nền đàn hồi (Hình 9(a), 10(a)) và tấm đặt trên nền đàn hồi (Hình 9(b), 10(b)). Kết quả cho thấy khi nhiệt độ và độ ẩm môi trường tăng, tần số dao động riêng không thứ nguyên của tấm đều có xu hướng giảm.



Hình 9. Ảnh hưởng của sự thay đổi nhiệt độ  $\Delta T$  đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm NaPoMag ( $b = a = 100 \text{ nm}$ ;  $a/h = 20$ ;  $p = 5$ ;  $\xi = 5 \text{ nm}$ ;  $\Omega = 0$ ;  $\Delta C = 0$ )

Sự gia tăng nhiệt độ gây giãn nở nhiệt trong vật liệu, nhưng do bị ràng buộc bởi điều kiện biên nên xuất hiện ứng suất nén nội sinh, làm suy giảm độ cứng hiệu dụng và dẫn đến giảm tần số dao động riêng. Tương tự, sự gia tăng hàm lượng ẩm gây giãn nở do ẩm, đồng thời làm tăng khối lượng và giảm mô đun đàn hồi, từ đó làm giảm tần số dao động. Kết quả thu được khẳng định ảnh hưởng đáng kể của điều kiện nhiệt-ẩm đến tần số dao động riêng của tấm NaPoMag, nhấn mạnh vai trò của các yếu tố môi trường trong thiết kế và tối ưu hóa kết cấu tấm nano thông minh.



Hình 10. Ảnh hưởng của sự thay đổi độ ẩm  $\Delta C$  đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm NaPoMag  
( $b = a = 100 \text{ nm}$ ;  $a/h = 20$ ;  $p = 5$ ;  $\xi = 5 \text{ nm}$ ;  $\Omega = 0$ ;  $\Delta T = 0$ )

#### 4. Kết luận

Bài báo đã phát triển một mô hình giải tích dựa trên lý thuyết tấm SFSDT kết hợp lý thuyết đàn hồi phi cục bộ (NET) để khảo sát có hệ thống ảnh hưởng của các yếu tố vật lý, hình học và môi trường, bao gồm tham số phi cục bộ, nền đàn hồi, tính chất vật liệu, kích thước hình học, nhiệt độ, độ ẩm và từ trường, đến đặc trưng dao động của tấm nano FGM áp từ có lỗ rỗng đặt trên nền Winkler-Pasternak. Nghiên cứu này mở rộng các mô hình hiện có khi xét đồng thời tác động của nhiệt độ-độ ẩm-từ trường và phân bố từ trường theo chiều dày trong cùng một khuôn khổ phân tích. Kết quả thu được cho thấy tần số dao động cơ bản không thứ nguyên của tấm chịu ảnh hưởng đáng kể của các yếu tố nêu trên. Trên cơ sở đó, các kết luận chính được rút ra như sau:

- Tần số dao động giảm khi tham số phi cục bộ hoặc chỉ số tỷ lệ thể tích tăng, phản ánh sự suy giảm độ cứng hiệu dụng của vật liệu.
- Kiểu phân bố bọt rỗng và hệ số lỗ rỗng ảnh hưởng rõ rệt đến tần số; nền đàn hồi làm tăng độ cứng tổng thể và giảm sự khác biệt giữa các kiểu phân bố. Hệ số nền đàn hồi  $K_p$  có ảnh hưởng rõ rệt hơn  $K_w$ .
- Từ trường áp đặt làm tăng tần số dao động thông qua hiệu ứng ghép từ-đàn hồi.
- Tần số dao động giảm khi tăng tỷ lệ các kích thước hình học, sự tương tác giữa kích thước hình học và từ trường chi phối đặc tính dao động, đặc biệt với các tấm mỏng.
- Tăng nhiệt độ và độ ẩm môi trường làm giảm tần số dao động do ứng suất nén nội sinh và giảm mô đun đàn hồi, nhấn mạnh vai trò quan trọng của các yếu tố môi trường trong thiết kế và tối ưu hóa tấm nano thông minh.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Zhang, D., Lei, Y., Shen, Z. (2017). Thermo-electro-mechanical vibration analysis of piezoelectric nanoplates resting on viscoelastic foundation with various boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 131–132:1001–1015.
- [2] Pehlivan, F., Esen, I., Aktas, K. G. (2024). The effect of the foam structure and distribution on the thermomechanical vibration behavior of sandwich nanoplates with magneto-electro-elastic face layers. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 31(29):11259–11288.
- [3] Ghobadi, A., Beni, Y. T., Golestanian, H. (2019). Size dependent thermo-electro-mechanical nonlinear bending analysis of flexoelectric nano-plate in the presence of magnetic field. *International Journal of Mechanical Sciences*, 152:118–137.
- [4] Farajpour, A., Yazdi, M. R. H., Rastgoo, A., Mohammadi, M. (2016). A higher-order nonlocal strain gradient plate model for buckling of orthotropic nanoplates in thermal environment. *Acta Mechanica*, 227(7):1849–1867.
- [5] Eringen, A. C., Edelen, D. G. B. (1972). On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 10(3):233–248.
- [6] Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54(9):4703–4710.
- [7] Ebrahimi, F., Barati, M. R. (2017). Buckling analysis of smart size-dependent higher order magneto-electro-thermo-elastic functionally graded nanosize beams. *Journal of Mechanics*, 33(1):23–33.
- [8] Ansari, R., Gholami, R. (2017). Size-dependent buckling and postbuckling analyses of first-order shear deformable magneto-electro-thermo elastic nanoplates based on the nonlocal elasticity theory. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 17(01):1750014.
- [9] Żur, K. K., Arefi, M., Kim, J., Reddy, J. (2020). Free vibration and buckling analyses of magneto-electro-elastic FGM nanoplates based on nonlocal modified higher-order sinusoidal shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 182:107601.
- [10] Ebrahimi, F., Barati, M. R. (2017). Dynamic modeling of magneto-electrically actuated compositionally graded nanosize plates lying on elastic foundation. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 42(5):1977–1997.
- [11] Arefi, M., Amabili, M. (2021). A comprehensive electro-magneto-elastic buckling and bending analyses of three-layered doubly curved nanoshell, based on nonlocal three-dimensional theory. *Composite Structures*, 257:113100.
- [12] Gogotsi, Y. (2006). *Nanomaterials Handbook*. CRC Press.
- [13] Esen, I., Aktas, K. G., Pehlivan, F. (2025). Investigation of the Critical Buckling Temperatures and Free Vibration Response of Porous Functionally Graded Magneto-Electro-Elastic Sandwich Higher-Order Nanoplates with Temperature-Dependent Material Properties. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 13(2):1–29.
- [14] Esen, I., Özmen, R. (2022). Thermal vibration and buckling of magneto-electro-elastic functionally graded porous nanoplates using nonlocal strain gradient elasticity. *Composite Structures*, 296:115878.
- [15] Kiran, M. C., Kattimani, S. C., Vinyas, M. (2018). Porosity influence on structural behaviour of skew functionally graded magneto-electro-elastic plate. *Composite Structures*, 191:36–77.
- [16] Ebrahimi, F., Barati, M. R. (2016). Size-dependent thermal stability analysis of graded piezomagnetic nanoplates on elastic medium subjected to various thermal environments. *Applied Physics A*, 122(10):1–17.
- [17] Thẩm, V. V. (2025). Phân tích dao động của tấm Sandwich Nano Graphene đàn hồi-điện-từ đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCN XD) - ĐHXDHN*, 19(3V).
- [18] Xu, C., Li, Y., Dai, Z. (2023). Investigation on buckling of Timoshenko nanobeams resting on Winkler-Pasternak foundations in a non-uniform thermal environment via stress-driven nonlocal elasticity and nonlocal heat conduction. *Journal of Thermal Stresses*, 46(4):317–332.
- [19] Lezgy-Nazargah, M., Cheraghi, N. (2016). An exact Peano Series solution for bending analysis of imperfect layered functionally graded neutral magneto-electro-elastic plates resting on elastic foundations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 24(3):183–199.

- [20] Zhang, F., Bai, C., Wang, J. (2023). Study on dynamic stability of magneto-electro-thermo-elastic cylindrical nanoshells resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using nonlocal strain gradient theory. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 45(1):23.
- [21] Doroushi, A., Eslami, M., Komeili, A. (2011). Vibration analysis and transient response of an FGPM beam under thermo-electro-mechanical loads using higher-order shear deformation theory. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 22(3):231–243.
- [22] Karaca, M. M., Esen, I. (2025). On the effect of foam structures on thermo-mechanical vibration response of functionally graded piezoelectric smart plates. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 21(4):849–875.
- [23] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2013). A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 101:332–340.
- [24] Amir, S., Bidgoli, E. M.-R., Arshid, E. (2018). Size-dependent vibration analysis of a three-layered porous rectangular nano plate with piezo-electromagnetic face sheets subjected to pre loads based on SSDT. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 27(8):605–619.
- [25] Aktaş, K. G. (2024). Three-dimensional thermomechanical wave propagation analysis of sandwich nanoplate with graphene-reinforced foam core and magneto-electro-elastic face layers using nonlocal strain gradient elasticity theory. *Acta Mechanica*, 235(9):5587–5619.
- [26] Yıldız, T., Esen, I. (2023). The effect of the foam structure on the thermomechanical vibration response of smart sandwich nanoplates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 31(28):10279–10297.
- [27] Ebrahimi, F., Jafari, A., Barati, M. R. (2017). Vibration analysis of magneto-electro-elastic heterogeneous porous material plates resting on elastic foundations. *Thin-Walled Structures*, 119:33–46.
- [28] Liu, H., Liu, H., Yang, J. (2018). Vibration of FG magneto-electro-viscoelastic porous nanobeams on visco-Pasternak foundation. *Composites Part B: Engineering*, 155:244–256.
- [29] Thuy Anh, V. T., Quang, V. D., Duc, N. D., Thinh, P. N. (2021). Impact of blast and mechanical loads on the shear deformable stiffened sandwich plate with an auxetic core layer in thermal environment. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 24(1):663–695.
- [30] Aghababaei, R., Reddy, J. (2009). Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates. *Journal of Sound and Vibration*, 326(1–2):277–289.
- [31] Li, Z., Wang, Q., Qin, B., Zhong, R., Yu, H. (2020). Vibration and acoustic radiation of magneto-electro-thermo-elastic functionally graded porous plates in the multi-physics fields. *International Journal of Mechanical Sciences*, 185:105850.
- [32] Pham, T.-T., Tran, H.-Q., Tran, M.-T., Nguyen, H.-N., Vu, V.-T. (2025). Vibration behavior of stiffened functionally graded porous sandwich plates with a magneto-electro-elastic face resting on an elastic foundation under hygrothermal, electrical, and magnetic fields. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1–41.
- [33] Calkins, F., Flatau, A. (1997). Terfenol-D Sensor Design and Optimization. *Noise-Con 97*, The Pennsylvania State University, University Park, PA, Noise Control Foundation.
- [34] Davino, D., Giustiniani, A., Visone, C. (2012). The piezo-magnetic parameters of Terfenol-D: An experimental viewpoint. *Physica B: Condensed Matter*, 407(9):1427–1432.

**Phụ lục A.**

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= -\varsigma^2 A_{11} - \vartheta^2 A_{66}; & k_{12} &= -\varsigma \vartheta (A_{12} - A_{66}); & k_{13} &= \varsigma^3 B_{11} + \varsigma \vartheta^2 (B_{12} + 2B_{66}); & k_{14} &= 0; \\
 k_{15} &= \varsigma A_{31}^m; & k_{22} &= -\varsigma^2 A_{66} - \vartheta^2 A_{22}; & k_{23} &= \varsigma^2 \vartheta (B_{12} + 2B_{66}) + \vartheta^3 B_{22}; & k_{24} &= 0; & k_{25} &= \vartheta A_{31}^m; \\
 k_{33} &= -\varsigma^4 D_{11} - 2\varsigma^2 \vartheta^2 (D_{12} + 2D_{66}) - \vartheta^4 D_{22} \\
 &\quad - (1 + \xi^2 (\varsigma^2 + \vartheta^2)) (k_w - (N^E + N^H - k_p) (\varsigma^2 + \vartheta^2)); \\
 k_{34} &= - (1 + \xi^2 (\varsigma^2 + \vartheta^2)) (k_w - (N^H + N^T + N^C - k_p) (\varsigma^2 + \vartheta^2)); & k_{35} &= -E_{31}^m (\varsigma^2 + \vartheta^2); \\
 k_{44} &= -\varsigma^2 A_{55}^s - \vartheta^2 A_{44}^s - (1 + \xi^2 (\varsigma^2 + \vartheta^2)) (k_w - (N^H + N^T + N^C - k_p) (\varsigma^2 + \vartheta^2)); \\
 k_{45} &= (A_{15}^m + F_{31}^m) (\varsigma^2 + \vartheta^2); & k_{55} &= X_{11}^m (\varsigma^2 + \vartheta^2) + X_{33}^m; \\
 m_{11} &= m_{22} = (1 + \xi^2 (\varsigma^2 + \vartheta^2)) I_1; & m_{13} &= - (1 + \xi^2 (\varsigma^2 + \vartheta^2)) I_2 \varsigma; & m_{14} &= - (1 + \xi^2 (\varsigma^2 + \vartheta^2)) I_4 \varsigma; \\
 m_{23} &= - (1 + \xi^2 (\varsigma^2 + \vartheta^2)) I_2 \vartheta; & m_{24} &= - (1 + \xi^2 (\varsigma^2 + \vartheta^2)) I_4 \vartheta; & m_{31} &= - (1 + \xi^2 (\varsigma^2 + \vartheta^2)) I_2 \varsigma; \\
 m_{33} &= (1 + \xi^2 (\varsigma^2 + \vartheta^2)) (I_1 + I_3 (\varsigma^2 + \vartheta^2)); & m_{34} &= (1 + \xi^2 (\varsigma^2 + \vartheta^2)) (I_1 + I_5 (\varsigma^2 + \vartheta^2)); \\
 m_{44} &= (1 + \xi^2 (\varsigma^2 + \vartheta^2)) (I_1 + I_6 (\varsigma^2 + \vartheta^2)); & m_{12} &= m_{15} = m_{25} = m_{35} = m_{45} = m_{55} = 0.
 \end{aligned}$$