

# MÔ HÌNH PHÂN TÍCH ỨNG XỬ CHỊU XOẮN DẦM BÊ TÔNG CỐT SỢI THÉP

Nguyễn Vĩnh Sáng<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Khoa Công Trình, Trường Đại Học Thủy Lợi, số 175 đường Tây Sơn, phường Kim Liên, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 03/12/2025, Sửa xong 16/01/2026, Chấp nhận đăng 03/02/2026

## Tóm tắt

Mô hình màng hóa mềm chịu xoắn (SMMT) được phát triển nhằm dự báo ứng xử chịu xoắn cho cấu kiện bê tông cốt thép (BTCT). Khác với đặc tính giòn và cường độ chịu kéo thấp của bê tông thông thường, việc bổ sung sợi thép vào bê tông hình thành nên dạng vật liệu bê tông cốt sợi thép (SFRC) nhằm cải thiện các nhược điểm này. Ảnh hưởng của sợi thép dẫn tới ứng xử vật liệu này khác với bê tông thông thường, đặc biệt khi sử dụng làm kết cấu có bố trí cốt thép. Do đó, mục tiêu của nghiên cứu này là đề xuất một mô hình mới để dự báo ứng xử chịu xoắn cho dầm SFRC, bằng cách hiệu chỉnh SMMT (SMMT-SFRC). Trong mô hình đề xuất, yếu tố sợi thép được xem xét như thành phần bổ sung chịu kéo. Đồng thời, ảnh hưởng của sợi thép đến ứng xử mềm hóa bê tông chịu nén và ứng xử sau chảy dẻo cốt thép chịu lực (thép dọc, thép đai) được kể đến. Độ chính xác và tin cậy của mô hình SMMT-SFRC được kiểm chứng với các nghiên cứu thực nghiệm đã được công bố trước đây. Kết quả tính toán cho thấy, mô hình đề xuất dự báo hợp lý ứng xử và khả năng chịu xoắn của dầm SFRC so với thực nghiệm.

*Từ khoá:* xoắn; ứng xử chịu xoắn; dầm; bê tông cốt sợi thép; mô hình màng hóa mềm cho xoắn hiệu chỉnh.

## TORSIONAL BEHAVIOR ANALYTIC MODEL OF STEEL FIBER REINFORCED CONCRETE BEAMS

### Abstract

The softened membrane model for torsion (SMMT) was developed to predict the torsional behavior of reinforced concrete (RC) members. In contrast to the brittle responses and low tensile strength of normal concrete, steel fiber-reinforced concrete (SFRC) incorporates steel fibers to address these limitations. The inclusion of steel fibers results in distinct material behavior compared to normal concrete, particularly in structures with reinforcement arrangements. Therefore, the objective of this study was to propose a new model for predicting the comprehensive behavior of SFRC beams by modifying the SMMT (SMMT-SFRC). In the proposed model, steel fibers were considered as an additional tensile component. Additionally, the model incorporates the effects of steel fibers on the compressive behavior of concrete and the plastic responses of reinforcement (both longitudinal and transverse steel). The accuracy and reliability of the SMMT-SFRC model are validated against previously published experimental studies. The results indicate that the proposed model provides a rational prediction of both the torsional response and torsional capacity of SFRC beams, in good agreement with experimental observations.

*Keywords:* torsion; torsional behavior; beams; steel fiber-reinforced concrete; modified softened membrane model for torsion.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2026-20\(1V\)-08](https://doi.org/10.31814/stce.huce2026-20(1V)-08) © 2026 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

## 1. Giới thiệu

Bê tông cốt sợi thép (SFRC) là một loại vật liệu composite tiên tiến, trong đó bê tông thông thường được trộn với sợi thép có chiều dài ngắn và đường kính nhỏ. Trong lĩnh vực kỹ thuật xây dựng và khoa học vật liệu hiện đại, SFRC được xem là vật liệu thay thế để cải thiện đặc tính giòn của bê tông thông thường [1, 2]. Nhiều nghiên cứu đã được tiến hành từ những năm 1960 về ứng xử chịu kéo, uốn và cắt của các cấu kiện SFRC [1, 3], cho thấy nhiều ưu điểm của vật liệu này sử dụng trong kết cấu. Các nghiên cứu hiện cho thấy rằng việc bổ sung sợi thép vào bê tông cải thiện đáng kể khả năng kiểm soát nứt và co ngót của bê tông, tăng ứng suất kéo, khả năng chịu uốn và hiệu quả kháng cắt [3–7]. Ngoài ra, SFRC có thể được áp dụng để chuyển đổi dạng phá hoại giòn của các cấu kiện bê tông sang cơ chế phá hủy dẻo [8]. Tuy nhiên, chỉ có một số ít nghiên cứu về ứng xử chịu xoắn của các cấu kiện SFRC được thực hiện và phần lớn các nghiên cứu tập trung vào việc khảo sát ứng xử kéo hoặc cắt [4–7].

\*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: [sangnv@tlu.edu.vn](mailto:sangnv@tlu.edu.vn) (Sáng, N. V.)

Việc xem xét các ảnh hưởng xoắn trong thiết kế hiện nay trở nên quan trọng hơn trước đây [9], do các công trình xây dựng và cơ sở hạ tầng dân dụng hiện đại thường bao gồm các kết cấu bất đối xứng với hình dạng phức tạp hoặc tự do. Vì vậy, hiệu ứng xoắn kết cấu SFRC là một chủ đề nghiên cứu quan trọng và cần được làm rõ.

Một số mô hình lý thuyết đã được phát triển để đánh giá ứng xử và khả năng chịu xoắn thuần túy của các cấu kiện BTCT thông thường và SFRC, bao gồm lý thuyết trường nén cải tiến (MCFT) [6, 10], mô hình giàn hóa mềm góc xoay thay đổi (RA-STM) [11], mô hình giàn hóa mềm góc cố định (FA-STM) [12–14], mô hình giàn góc biến thiên hóa mềm tổng quát (GVASTM) [15], và SMMT [16–19]. MCFT chủ yếu được áp dụng cho SFRC chịu cắt và xoắn đồng thời [20], thay vì chịu xoắn thuần túy [10]. GSVATM chỉ sử dụng để dự báo kết cấu BTCT và bê tông ứng suất trước chịu xoắn. RA-STM đã được hiệu chỉnh để dự báo ứng xử chịu xoắn dầm SFRC; tuy nhiên, ảnh hưởng của sợi thép đến cấu thành vật liệu bê tông và ứng xử cốt thép chưa được xem xét. Trong khi đó, SMMT tập trung vào ứng xử xoắn thuần túy của bê tông thông thường có hoặc không có gia cường bằng vật liệu bọc ngoài như polyme cốt sợi (FRP), bê tông cốt lưới dệt (FRCM). Ngược lại, FA-STM được sử dụng để dự báo ứng xử trước và sau nứt cho kết cấu SFRC chịu xoắn thuần túy, sợi thép được xem xét là thành phần chịu kéo bổ sung nhưng không kể đến ảnh hưởng của sợi thép đến ứng suất nén bê tông và cốt thép chịu lực. Khác với FA-STM, SMMT xem xét ảnh hưởng của hiện tượng Poisson bằng cách chuyển đổi biến dạng đơn trục thành biến dạng hai trục thông qua hiệu chỉnh hệ số Hsu/Zhu [16], giúp dự báo ứng xử chịu xoắn và nhánh sau khả năng chịu xoắn của đường cong mô men xoắn - góc xoắn. Do đó, SMMT có thể phù hợp hơn để đánh giá ứng xử chịu xoắn dầm SFRC. Tuy nhiên, khác với bê tông thông thường, SFRC chịu ảnh hưởng đáng kể bởi sợi thép làm thay đổi đặc tính cơ học của vật liệu bao gồm: tăng độ dẻo, cường độ chịu nén và kéo, cũng như ảnh hưởng đến cốt thép chịu lực. Các mối quan hệ cấu thành bê tông và cốt thép thông thường ban đầu được sử dụng trong SMMT, cần được hiệu chỉnh để xem xét ảnh hưởng của sợi thép trong thành phần SFRC.

Nhằm mục đích lấp đầy khoảng trống kiến thức của các mô hình dự báo hiện có; nghiên cứu này đề xuất một mô hình để dự báo tốt hơn ứng xử chịu xoắn thuần túy dầm SFRC bằng cách cải tiến mô hình SMMT [16] (SMMT-SFRC). Độ chính xác và tin cậy của SMMT-SFRC sẽ được kiểm chứng với các nghiên cứu thực nghiệm của các tác giả khác trên thế giới.

## 2. Mô hình phân tích

Mô hình SMMT được đề xuất ban đầu bởi CH Jeng và Hsu [16] để dự báo ứng xử và khả năng chịu xoắn cho dầm BTCT. Trong nghiên cứu này, SMMT-SFRC được hiệu chỉnh từ SMMT để dự báo ứng xử dầm SFRC chịu xoắn. Các cải tiến trong SMMT-SFRC bao gồm: (1) kể đến đóng góp của sợi thép được xác định dựa trên mô hình truyền lực kéo trực tiếp (DTFTM) và đưa vào mô hình đề xuất xem như thành phần bổ sung chịu kéo  $\sigma_1^{sf}$ ; (2) xem xét ảnh hưởng của sợi thép thông qua hệ số  $F_f$  đến ngăn cản mềm hóa bê tông chịu nén, qua đó làm tăng hệ số mềm hóa bê tông và hệ số mềm hóa mới được đề xuất cho kết cấu SFRC  $\zeta_{sfrc}$ , dựa theo đề xuất bởi Hoffman [21]; (3) mối quan hệ ứng suất-biến dạng hai trục của cốt thép nhúng trong bê tông thông thường được hiệu chỉnh, kể đến ảnh hưởng của sợi thép  $F_f$  đến ứng xử chảy dẻo của cốt thép nhúng trong SFRC. Các sửa đổi (1), (2) và (3) nhằm nâng cao độ chính xác của mô hình dự báo đề xuất. Các mối quan hệ ứng suất - biến dạng của vật liệu (bê tông, cốt thép, sợi thép) được tích hợp vào các phương trình cân bằng và tương thích biến dạng theo nguyên lý Navier. Đồng thời các điều kiện cân bằng ứng suất kéo và nén, cân bằng ứng suất cắt làm tiêu chí hội tụ cho toàn bộ quá trình giải của bài toán.

### 2.1. Các phương trình cân bằng và tương thích biến dạng

Dầm SFRC tiết diện chữ nhật chịu ngoại lực tác dụng là mô men xoắn  $T$  và trạng thái ứng suất của phân tử chịu cắt  $\tau_H$  được thể hiện trên Hình 1. Dưới tác dụng của ngoại lực xoắn  $T$ , dầm SFRC

hình thành một cơ cấu giàn cơ học được tạo bởi thanh chống nghiêng bê tông chịu nén, cốt thép dọc và thép đai đóng vai trò thanh giàn chịu kéo để chống lại ngoại lực này. Hơn nữa, sợi thép (SF) được xem là thành phần bổ sung chịu kéo chống lại các vết nứt bê tông do  $T$  gây ra. Xem xét một phân tố  $A$  trong dòng cắt (dòng ứng suất tiếp  $\tau_{lt}$ ) có kích thước bằng một đơn vị được thể hiện trên Hình 1(a). Giả thiết rằng vết nứt bê tông đi qua phân tố  $A$  có góc nghiêng so với dọc trục dầm là  $\alpha_2$  (chính là góc hợp bởi trục  $l$  và  $2$ ), chia phân tố này thành 2 phần dạng hình nêm ( $I$ ) và ( $II$ ), được minh họa trên Hình 1(b). Trạng thái ứng suất có thể biểu diễn bằng vòng tròn Mohr bằng cách xác định tọa độ trục  $l - t$  là phương của cốt thép dọc và phương đứng của thép đai, tọa độ  $2 - 1$  là phương của ứng suất chính. Phân tố  $A$  phải đảm bảo cân bằng ứng suất theo các phương  $l - t$ , ba phương trình cân bằng trong mặt phẳng được đề xuất khi kể đến đóng góp của thành phần sợi thép chịu kéo (1), (2) và (3). Theo lý thuyết ống thành mỏng của Bredt [22], nội lực sinh ra trong toàn bộ chu vi kín phải cân bằng với ngoại lực tác dụng được thể hiện qua phương trình (3). Trong đó,  $A_0$  và  $p_0$  lần lượt là diện tích và chu vi tính đến trọng tâm của dòng cắt được xác định bởi phương trình (4) và (5) tương ứng.

Tương tự, các cấu kiện chịu xoắn phải thỏa mãn các điều kiện tương thích cục bộ và tổng thể. Khả năng tương thích trong mặt phẳng của phân tố  $A$  trong Hình 1(c) theo Hsu và Zhu [23] có thể được biểu diễn bằng vòng tròn Mohr biến dạng, phải đảm bảo ba phương trình tương thích (7)-(9). Dựa trên điều kiện tương thích tiết diện, góc xoắn trên đơn vị chiều dài của cấu kiện chịu xoắn  $\theta$  là hàm của biến dạng cắt trung bình của tiết diện  $\gamma_{lt}$  và kích thước tiết diện của dòng cắt ( $A_0$  và  $p_0$ ), được biểu diễn bởi phương trình (10). Các phương trình cân bằng và tương thích của cấu kiện chịu xoắn được tóm tắt trong Bảng 1.

Bảng 1. Các phương trình cân bằng và tương thích

Phương trình cân bằng	$\sigma_l = \sigma_2^c \cos^2 \alpha_2 + (\sigma_1^c + \sigma_1^{sf}) \sin^2 \alpha_2 + 2\tau_{21}^c \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \rho_{sl} f_{sl}$	(1)
	$\sigma_t = \sigma_2^c \sin^2 \alpha_2 + (\sigma_1^c + \sigma_1^{sf}) \cos^2 \alpha_2 - 2\tau_{21}^c \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \rho_{st} f_{st}$	(2)
phẳng	$\tau_{lt} = (-\sigma_2^c + \sigma_1^c + \sigma_1^{sf}) \sin^2 \alpha_2 - 2\tau_{21}^c \sin \alpha_2 \cos \alpha_2$	(3)
Phương trình cân bằng	$T = \tau_{lt} (2A_0 t_d)$	(4)
Bredt's	$A_0 = A_c - \frac{1}{2} p_c t_d + t_d^2$	(5)
	$p_0 = p_c - 4t_d$	(6)
	$\varepsilon_t = \varepsilon_2 \sin^2 \alpha_2 + \varepsilon_1 \cos^2 \alpha_2 - \gamma_{21} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2$	(7)
	$\varepsilon_l = \varepsilon_2 \cos^2 \alpha_2 + \varepsilon_1 \sin^2 \alpha_2 + \gamma_{21} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2$	(8)
	$\gamma_{lt} = 2(-\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \gamma_{21} (\cos \alpha_2 - \sin \alpha_2)$	(9)
Tương thích trên toàn bộ tiết diện	$\theta = p_0 \gamma_{lt} / (2A_0)$	(10)
Uốn ngoài	$\psi = -\varphi = \theta \sin 2\alpha_2$	(11)
mặt phẳng của thanh chống bê tông	$\varphi = \bar{\varepsilon}_{1s} / t_d = 2\bar{\varepsilon}_1 / t_d$ và $\psi = \bar{\varepsilon}_{2s} / t_d = 2\bar{\varepsilon}_2 / t_d$	(12)
	$k_{1c} = \frac{1}{\zeta f_c' \bar{\varepsilon}_{2s}} \int_0^{\bar{\varepsilon}_{2s}} \sigma_2(\bar{\varepsilon}, \zeta) d\bar{\varepsilon}$	(13)
	$k_{1t} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{1s} f_{cr}} \int_0^{\bar{\varepsilon}_{1s}} \sigma_1(\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon}$	(14)

$$t_d = \frac{1}{2 \times (Q + 4)} \times \left[ p_c \times \left( 1 + \frac{Q}{2} \right) - \sqrt{\left( 1 + \frac{Q}{2} \right)^2 \times (p_c)^2 - 4Q \times (Q + 4) \times A_c} \right]; \quad (15)$$

$$Q = \frac{2\bar{\varepsilon}_{2s}}{\gamma_{lt} \sin 2\alpha_2} = \frac{4\bar{\varepsilon}_2}{\gamma_{lt} \sin 2\alpha_2}$$

Hàm lượng cốt thép	$\rho_{sl} = \frac{A_{sl}}{p_0 t_d}$		(16)
--------------------	--------------------------------------	--	------

	$\rho_{st} = \frac{A_{st}}{s t_d}$		(17)
--	------------------------------------	--	------

Mối quan hệ hai trục	$(v_{12})_{torsion} = 0.16 + 680\varepsilon_{sf}$ khi $\varepsilon_{sf} \leq \varepsilon_{sy}$ ;	$(v_{12})_{torsion} = 1.52$ khi $\varepsilon_{sf} > \varepsilon_{sy}$	(18)
----------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------	------

	$\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 + (v_{12})_{torsion} \varepsilon_2$ ;	$\bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2$	(19)
--	----------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------	------

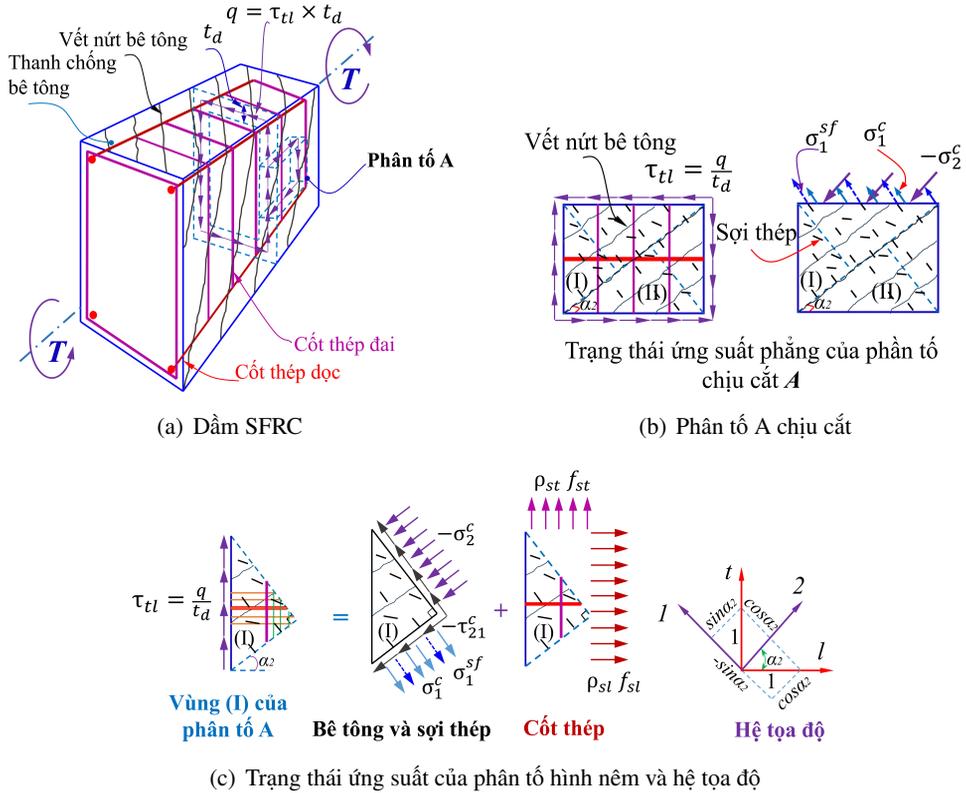
và đơn trục	$\bar{\varepsilon}_l = \bar{\varepsilon}_2 \cos^2 \alpha_2 + \bar{\varepsilon}_1 \sin^2 \alpha_2 + \gamma_{12} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2$		(20)
-------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	------

	$\bar{\varepsilon}_t = \bar{\varepsilon}_2 \sin^2 \alpha_2 + \bar{\varepsilon}_1 \cos^2 \alpha_2 - \gamma_{12} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2$		(21)
--	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	------

Hơn nữa, dưới tác dụng của lực xoắn gây ra biến dạng cong vênh ngoài mặt phẳng đối với các thanh chống bê tông theo phương 1 và 2, gây ra sự phân bố ứng suất và biến dạng không đồng đều trong chiều dày hiệu dụng của thành dầm  $t_d$ , được minh họa trên Hình 1.  $\varphi$  và  $\psi$  lần lượt là độ cong của thanh chống bê tông theo phương 1 và 2 được thể hiện ở phương trình (11), được xem xét trong mối quan hệ của góc xoắn trên một đơn vị chiều dài  $\theta$ . Ngoài ra, dưới giả thuyết biến dạng tuyến tính, các độ cong của thanh chống bê tông ( $\varphi$  và  $\psi$ ) có mối quan hệ đơn giản với chiều dày hiệu dụng của thành dầm  $t_d$  và biến dạng kéo và nén trung bình ( $\varepsilon_1$  và  $\varepsilon_2$ ), được biểu diễn bởi phương trình (12). Xem xét các mối quan hệ ứng suất-biến dạng phi tuyến, các hệ số ứng suất trung bình ( $k_{2c}$  và  $k_{1t}$ ) được tính toán bằng các phương trình (13), (14) và được áp dụng để tính toán ứng suất kéo và nén trung bình trong chiều dày  $t_d$ . Ngoài ra, chiều dày hiệu dụng của thành dầm  $t_d$  được xác định bằng cách tích hợp phương trình (5), (6), (10) và (12), và được biểu diễn bởi phương trình (15).

Mô hình SMMT được phát triển dựa trên mô hình SMM cho cầu kiện chịu cắt, hiệu chỉnh biến dạng cong vênh ngoài mặt phẳng do xoắn bằng cách giảm 20% hệ số Hsu/Zhu so với chịu cắt  $(v_{12})_{torsion}$ , được thể hiện qua các phương trình (18)-(19). Từ đó, mối quan hệ giữa biến dạng đơn trục và biến dạng hai trục bằng phép chuyển đổi được thể hiện qua các phương trình (20)-(21) [16].

trong đó  $\sigma_l$  và  $\sigma_t$  lần lượt là ứng suất pháp tuyến tác dụng theo phương dọc  $l$  và phương ngang  $t$  của phần tử SFRC;  $\sigma_1^c$  và  $\sigma_2^c$  tương ứng là ứng suất pháp tuyến trung bình của bê tông theo phương 1 và phương 2;  $\tau_{lt}$  là ứng suất cắt tác dụng theo phương tọa độ  $l-t$  của các cốt thép;  $\tau_{21}^c$  là ứng suất cắt trên vết nứt trơn của bê tông theo tọa độ 2-1;  $\alpha_2$  là góc của ứng suất nén chính tác dụng giữa trục 2 và trục  $l$ ;  $\sigma_1^{sf}$  là ứng suất kéo của sợi thép;  $\rho_{sl}$  và  $\rho_{st}$  tương ứng là hàm lượng thép dọc và cốt thép đai;  $f_{sl}$  và  $f_{st}$  lần lượt là ứng suất kéo của thép dọc và cốt thép đai;  $A_{sl}$  là tổng diện tích thép dọc;  $A_{st}$  là diện tích tiết diện một nhánh đai;  $s$  là khoảng cách cốt thép đai;  $A_0$  và  $p_0$  diện tích và chu vi của dòng cắt tương ứng;  $A_c = b \times h$  và  $p_c = 2(b + h)$  tương ứng là diện tích và chu vi hình chữ nhật có chiều rộng ( $b$ ) và chiều cao ( $h$ );  $\varepsilon_l$  và  $\varepsilon_t$  tương ứng là biến dạng trung bình của thép dọc và cốt đai theo phương dọc và đứng;  $\gamma_{lt}$  là biến dạng cắt trung bình theo hệ trục  $l-t$ ;  $\varepsilon_1$  và  $\varepsilon_2$  là biến dạng hai trục trung bình theo phương 1 và 2 tương ứng;  $\psi$  và  $\varphi$  lần lượt là độ cong theo phương 1 và 2;  $\gamma_{12}$  là biến dạng cắt trung bình trong hệ tọa độ 2-1;  $v_{12}$  và  $v_{21}$  là hệ số Hsu/Zhu và  $(v_{12})_{torsion}$  là hệ số Hsu/Zhu cho xoắn;  $\varepsilon_{sf}$  là biến dạng trung bình của các thanh thép chảy dẻo đầu tiên;  $\varepsilon_{sy}$  là biến dạng chảy của cốt thép;  $T$  và  $\theta$  lần lượt là mô men xoắn và góc xoắn trên một đơn vị chiều dài (góc xoắn đơn vị). Vì ứng suất pháp tuyến trong phần tử chịu lực xoắn thuần túy bằng không, nên theo cơ học vật liệu với phần tử vô cùng nhỏ được thể hiện trong Hình 1, ở trạng thái ứng suất cắt thuần túy ( $\sigma_l = \sigma_t = 0$  và  $\alpha_2 = 45^\circ$ ).



Hình 1. Dầm SFRC chịu xoắn thuần túy và trạng thái ứng suất phẳng

## 2.2. Quan hệ ứng suất-biến dạng của vật liệu

### a. Quan hệ ứng suất-biến dạng của sợi thép

Bằng cách sử dụng mô hình truyền lực kéo trực tiếp (DTFTM) kết hợp với mô hình giàn vết nứt trơn (smeared-truss model), ứng xử xoắn của cấu kiện SFRC có thể được dự đoán chính xác một cách tương đối đơn giản. Trong mô hình DTFTM, sợi thép được xem là thành phần chịu kéo độc lập và bỏ qua ảnh hưởng sự phân bố ngẫu nhiên của các sợi, giả thiết hướng sợi vuông góc với vết nứt [13]. Ngoài ra, ứng xử xoắn của cấu kiện SFRC được đánh giá bằng cách xem xét hiệu suất liên kết khác nhau của các loại sợi thép (sợi thẳng, sợi uốn cong và sợi có móc). Hơn nữa, ứng xử trượt sợi thép khỏi bề mặt vết nứt bê tông được sử dụng bằng DTFTM cho phép biểu diễn cơ chế ứng xử phù hợp với thực tế của các cấu kiện SFRC. Từ đó, mối quan hệ ứng suất - biến dạng của sợi thép trong SFRC bằng phương pháp DTFTM được rút ra và minh họa trên Hình 2(a). Ứng suất kéo trung bình của sợi thép theo hướng vết nứt  $\sigma_1^{sf}$  kể đến ảnh hưởng của gradient biến dạng trong thanh giằng bê tông như thể hiện trong Hình 2(b) như sau:

$$\sigma_1^{sf} = k_{sf} \sigma_{\max}^{sf} \quad (22)$$

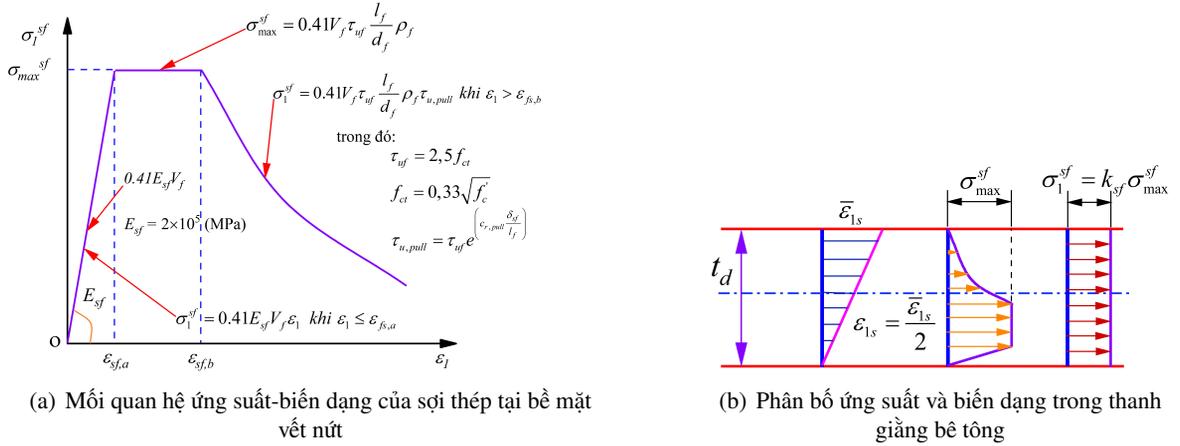
trong đó,  $k_{sf}$  và  $\sigma_{\max}^{sf}$  là tỷ số giữa ứng suất kéo trung bình và ứng suất kéo lớn nhất của sợi thép tại bề mặt vết nứt được biểu diễn bởi các phương trình sau:

$$k_{sf} = \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{2\varepsilon_{sf,a}} \quad \text{khi} \quad \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{\varepsilon_{sf,a}} \leq 1 \quad (23)$$

$$k_{sf} = \left[ \frac{\varepsilon_{sf,a} \sigma_{\max}^{sf}}{2} + (\bar{\varepsilon}_{1s} - \varepsilon_{sf,a}) \sigma_{\max}^{sf} \right] / (\sigma_{\max}^{sf} \bar{\varepsilon}_{1s}) \quad \text{khi} \quad \varepsilon_{sf,a} < \bar{\varepsilon}_{1s} \leq \varepsilon_{sf,b} \quad (24)$$

$$k_{sf} = \left[ \frac{\varepsilon_{sf,a} \sigma_{max}^{sf}}{2} + (\varepsilon_{sf,b} - \varepsilon_{sf,a}) \sigma_{max}^{sf} + I \right] / (\sigma_{max}^{sf} \bar{\varepsilon}_{1s}) \quad \text{khi } \bar{\varepsilon}_{1s} > \varepsilon_{sf,b} \quad (25)$$

trong đó  $\varepsilon_{sf,a}$  là biến dạng kéo trung bình tại bề mặt vết nứt khi các sợi thép đạt cường độ kéo trượt trung bình cực hạn;  $\varepsilon_{sf,b}$  là biến dạng kéo trung bình tại bề mặt vết nứt khi chiều rộng vết nứt đạt  $w_d$ ;  $I$  là diện tích được bao quanh bởi đường cong ứng suất-biến dạng kéo và trục biến dạng vượt quá  $\varepsilon_{sf,b}$  (ứng xử tuột sợi thép) của SFRC [13], trong đó phương pháp tích phân số 4 điểm Gauss sử dụng vì trong vùng suy giảm đa thức hàm mũ “e” rất khó thực hiện tích phân theo lời giải giải tích chính xác.



Hình 2. Mối quan hệ ứng suất-biến dạng của sợi thép trong SFRC

b. Hiệu chỉnh quan hệ ứng suất - biến dạng của bê tông chịu nén

Mối quan hệ ứng suất và biến dạng của bê tông dạng phân bố ( $\sigma-\varepsilon$ ) được đề xuất bởi Belarbi và Hsu vào năm 1995 [24], và được sử dụng mô hình SMMT [16]. Mối quan hệ phân bố này cho bê tông thông thường đã được sử dụng và chứng minh trong các nghiên cứu trước đây [11, 15]. Trên Hình 3(a) thể hiện mối quan hệ ứng suất-biến dạng nén của bê tông có tính đến hiệu ứng ngăn cản hóa mềm của bê tông và xét đến ảnh hưởng của sợi thép được thể hiện qua phương trình sau:

$$\sigma_{(\varepsilon)} = \begin{cases} \sigma_p \left( 2 \frac{\bar{\varepsilon}_2}{\varepsilon_p} - \left( \frac{\bar{\varepsilon}_2}{\varepsilon_p} \right)^2 \right) & \text{khi } \frac{\bar{\varepsilon}_2}{\varepsilon_p} \leq 1,0 \\ \sigma_p \left( 1 - \left( \frac{\bar{\varepsilon}_2 - \varepsilon_p}{4\varepsilon_0 - \varepsilon_p} \right)^2 \right) & \text{khi } \frac{\bar{\varepsilon}_2}{\varepsilon_p} > 1,0 \end{cases} \quad (26)$$

Ứng suất nén hình trụ lớn nhất  $\sigma_p$  và biến dạng tương ứng  $\varepsilon_p$  tại điểm ứng suất tại đỉnh chịu nén của bê tông SFRC mềm hóa được xác định bởi phương trình (27) và (28).

$$\sigma_p = \zeta_{sfrc} f'_c \quad (27)$$

$$\varepsilon_p = \zeta_{sfrc} \varepsilon_0 \quad (28)$$

Đối với bê tông thông thường, hệ số  $\zeta$  xem xét sự hóa mềm của bê tông thông thường chịu nén dựa trên ba biến số: cường độ nén của bê tông  $f'_c$ , biến dạng kéo chính  $\bar{\varepsilon}_1$ , góc lệch  $\bar{\beta}$  [25], được thể hiện trong các phương trình (29)-(32) [16].

$$\zeta = f(f'_c) f(\bar{\varepsilon}_1) f(\bar{\beta}) \quad (29)$$

$$f_{(f'_c)} = \frac{5,8}{\sqrt{f'_c}} \leq 0,9 \quad (30)$$

$$f_{(\bar{\varepsilon}_1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{400\bar{\varepsilon}_1}{\eta_s}}} \quad \text{và} \quad \eta_s = \frac{A_{st}f_{yt}p_h - \sigma_t}{A_{sl}f_{yl}s - \sigma_t} \quad (31)$$

$$f_{(\bar{\beta})} = \left(1 - \frac{|\bar{\beta}|}{24^\circ}\right) \quad \text{và} \quad \bar{\beta} \text{ (deg)} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\gamma_{21}}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \right) \frac{180}{\pi} \quad (32)$$

trong đó  $f_{yt}$  và  $f_{yl}$  lần lượt là cường độ chảy dẻo của thép đai và thép dọc;  $p_h$  là chu vi tính từ trọng tâm cốt đai;  $\eta_s$  đặc trưng cho tỷ số thép đai và thép dọc bố trí trong dầm SFRC.

Khác với bê tông thông thường, kết cấu SFRC do ảnh hưởng của sợi thép làm tăng hệ số mềm hóa của bê tông  $\zeta_{sfrc}$ . Hệ số mềm hóa của bê tông thông thường  $\zeta$  được hiệu chỉnh bằng cách bổ sung hệ số  $f_{sfrc}$  để tính đến hiệu ứng này, được đề xuất bởi Hoffman [21], đồng thời áp đặt giới hạn trên bằng 0,9 theo các phương trình sau:

$$\zeta_{sfrc} = \zeta f_{sfrc} \leq 0,9 \quad (33)$$

$$f_{sfrc} = 1 + 0,5F_f \quad (34)$$

Trong phương trình (34),  $F_f$  là hệ số sợi (fiber factor), được xác định bằng tỷ số ( $l_f \times V_f/d_f$ ); trong đó  $l_f$  và  $d_f$  lần lượt là chiều dài và đường kính của sợi thép, và  $V_f$  là hàm lượng thể tích của sợi thép, được Hoffman đề xuất vào năm 2010 [21], dựa trên loại sợi thép được sử dụng trong các tấm PSFC thử nghiệm chịu cắt tại Đại học Houston (sợi thép Dramix-Bekaert có đầu móc). Tuy nhiên, các sợi có hình dạng khác nhau sẽ đóng vai trò quan trọng trong việc xác định liên kết giữa sợi và bê tông. Hyunjin Ju và cs. [26] đề xuất ảnh hưởng của sợi thép khi xét thêm hệ số liên kết dính bám (hệ số hình dạng sợi) tính đến các đặc điểm liên kết khác nhau của các loại sợi được sử dụng trong nghiên cứu này, thông qua hệ thức:

$$F_f = \frac{l_f}{d_f} V_f \rho_f \quad (35)$$

trong đó  $\rho_f$  là hệ số hình dạng sợi được lấy bằng 1,0 đối với sợi móc (hooked-type), bằng 0,75 đối với sợi cong (crimped-type), và bằng 0,5 với sợi thẳng (straight-type).

Để chuyển đổi một cấu kiện chịu xoắn trong không gian ba chiều thành một phần tử phẳng hai chiều, ứng suất nén trung bình trong thanh chống bê tông với độ dày hiệu dụng của thanh  $t_d$  cần được ước lượng, có kể đến các gradient biến dạng tuyến tính do mô men xoắn gây ra [16]. Ứng suất nén trung bình của các thanh chống bê tông có thể được biểu diễn bằng hệ số ứng suất nén trung bình  $k_{1c}$ , như sau:

$$\sigma_2^c = -\eta k_{1c} \sigma_p \quad (36)$$

Hệ số ứng suất trung bình thu được bằng cách tích hợp các phương trình biến dạng ứng suất trong Hình 3(a), như sau:

$$k_{1c} = \left[ \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\varepsilon_p} - \frac{1}{3} \left( \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\varepsilon_p} \right)^2 \right] \quad \text{khi} \quad \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\varepsilon_p} \leq 1 \quad (37)$$

$$k_{1c} = 1 - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_p}{\bar{\varepsilon}_{2s}} - \frac{(\bar{\varepsilon}_{2s} - \varepsilon_p)^3}{3\bar{\varepsilon}_{2s}(4\varepsilon_0 - \varepsilon_p)^2} \quad \text{khi} \quad \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\varepsilon_p} > 1 \quad (38)$$

trong đó  $\varepsilon_0$  là biến dạng bê tông tại ứng suất nén cực đại lấy bằng  $-0,003$  và  $\varepsilon_p = \zeta_{sfrc} \varepsilon_0$  [26]; biến dạng  $\bar{\varepsilon}_{2s} = 2\bar{\varepsilon}_2$  là biến dạng ở mặt ngoài thanh chống bê tông.

c. Quan hệ ứng suất - biến dạng của bê tông chịu kéo

Hơn nữa, mô hình SMMT xem xét sự đóng góp của cường độ kéo bê tông có thể dự đoán nhánh trước nứt của quan hệ mô men xoắn-góc xoắn. Mỗi quan hệ cấu thành kéo cho bê tông SFRC cũng được xác định giống bê tông thông thường được thể hiện trong Hình 3(b).

$$\sigma_1^c = E_c \bar{\varepsilon}_1 \quad \text{khi } \bar{\varepsilon}_1 \leq \varepsilon_{cr} \quad (39)$$

$$\sigma_1^c = f_{cr} \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\bar{\varepsilon}_1} \right)^{0,4} \quad \text{khi } \bar{\varepsilon}_1 > \varepsilon_{cr} \quad (40)$$

$$\varepsilon_{cr} = \mu (0,00008) \quad \text{và} \quad f_{cr} = \lambda \mu (0,31) \sqrt{f'_c} \quad (41)$$

$$E_c = \lambda (0,31) \sqrt{f'_c} \quad (42)$$

Tương tự bê tông chịu nén, gradient biến dạng kéo trong độ dày hiệu dụng của thành  $t_d$  theo hướng vuông góc với thanh chống nén cũng được xem xét bằng cách sử dụng hệ số ứng suất kéo trung bình  $k_{1t}$ . Dựa trên hệ số này, ứng suất kéo trung bình  $\sigma_1^c$  có thể được biểu diễn như sau [16]:

$$\sigma_1^c = \eta k_{1t} f_{cr} \quad (43)$$

trong đó  $k_{1t}$  là tỷ lệ giữa ứng suất kéo trung bình và ứng suất nứt kéo của thanh giằng SFRC. Hệ số ứng suất kéo trung bình  $k_{1t}$  được xác định theo cùng cách như hệ số ứng suất nén trung bình [16].

$$k_{1t} = \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{2\varepsilon_{cr}} \quad \text{khi } \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{\varepsilon_{cr}} \leq 1 \quad (44)$$

$$k_{1t} = \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{2\varepsilon_{cr}} + \frac{(\varepsilon_{cr})^{0,4}}{(0,6)\bar{\varepsilon}_{1s}} \left[ (\bar{\varepsilon}_{1s})^{0,6} - (\varepsilon_{cr})^{0,6} \right] \quad \text{khi } \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{\varepsilon_{cr}} > 1 \quad (45)$$

trong đó các hệ số khuếch đại ứng suất nén và kéo  $\eta$ , biến dạng kéo  $\mu$  và mô đun đàn hồi  $\lambda$  của bê tông; đối với đầm đặc lấy các hệ số khuếch đại của bê tông được lấy bằng  $\mu = \lambda = 1,45$  và  $\eta = 1$  [16];  $f_{cr}$  và  $\varepsilon_{cr}$  lần lượt là cường độ kéo nứt và biến dạng nứt của bê tông;  $\bar{\varepsilon}_{1s} = 2\bar{\varepsilon}_1$  là biến dạng kéo ở mép ngoài của bê tông.

d. Quan hệ của bê tông chịu cắt

Giống như trong SMMT, mỗi quan hệ ứng suất cắt của bê tông với biến dạng cắt như sau:

$$\tau_{21}^c = \frac{\sigma_1^c - \sigma_2^c}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \gamma_{21} \quad (46)$$

e. Hiệu chỉnh quan hệ ứng suất - biến dạng của cốt thép

Ứng suất kéo trong vết nứt trơn của bê tông được sử dụng trong mô hình SMMT, mỗi quan hệ ứng suất - biến dạng của cốt thép dọc và thép đai thông thường được thay thế mỗi quan hệ ứng suất và biến dạng khi xét đến ứng suất kéo nứt của bê tông vì cốt thép được nhúng trong bê tông theo Belarbi và Hsu [24]. Đối với kết cấu SFRC, do ảnh hưởng của sợi thép làm thay đổi ứng xử sau chảy dẻo của cốt thép chịu lực [27]. Do đó, mô hình cốt thép nhúng trong SFRC được hiệu chỉnh trong SMMT-SFRC khi xét đến ảnh hưởng của yếu tố sợi  $F_f$ , minh họa trên Hình 3(c) và thể hiện qua các phương trình sau:

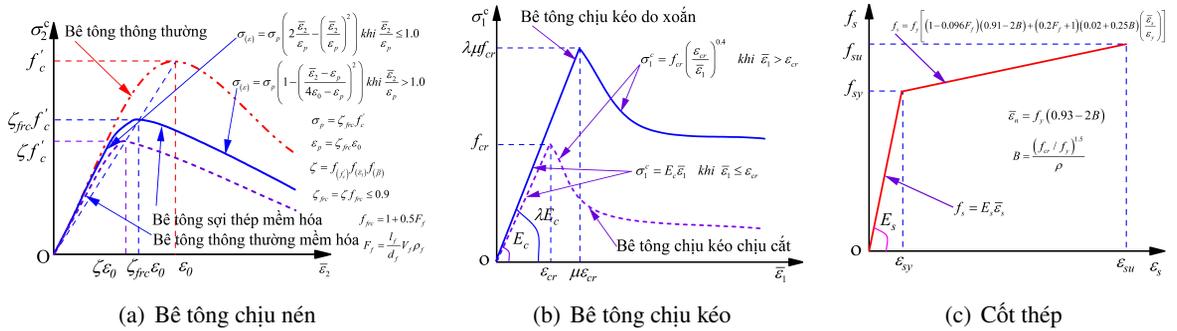
$$f_s = E_s \bar{\varepsilon}_s \quad \text{khi } \bar{\varepsilon}_s \leq \bar{\varepsilon}_n \quad (47)$$

$$f_s = f_y \left[ (1 - 0,096F_f)(0,91 - 2B) + (0,2F_f + 1)(0,02 + 0,25B) \left( \frac{\bar{\varepsilon}_s}{\varepsilon_y} \right) \right] \quad \text{khi } \bar{\varepsilon}_s > \bar{\varepsilon}_n \quad (48)$$

$$\bar{\varepsilon}_n = f_y(0,93 - 2B) \quad (49)$$

$$B = \frac{\left( \frac{f_c}{f_y} \right)^{1,5}}{\rho} \quad (50)$$

trong đó  $f_s$ ,  $E_s$  và  $\bar{\varepsilon}_s$  là ứng suất, mô đun đàn hồi, biến dạng đơn trục của cốt thép đang xét (thép đai hoặc thép dọc);  $f_y$  và  $\varepsilon_y$  lần lượt là cường độ và biến dạng chảy dẻo của cốt thép;  $B$  là hệ số không thứ nguyên;  $\rho$  là hàm lượng cốt thép dọc và đai được xác định ở phương trình (16), (17) tương ứng.



Hình 3. Quan hệ ứng suất - biến dạng của bê tông và cốt thép

### 2.3. Sơ đồ thuật toán

Giống như SMMT cho dầm BTCT chịu xoắn được đề xuất bởi CH Jeng [16], điều kiện hội tụ của mô hình đề xuất được xem xét. Bằng cách tích hợp các phương trình cân bằng trong mặt phẳng, các tiêu chí hội tụ được rút ra và đảm bảo độ chính xác cho các tính toán lý thuyết qua tất cả giai đoạn chịu tải trong mô hình SMMT-SFRC. Trong đó, sợi thép được xem xét là thành phần chịu kéo bổ sung. Hơn nữa, các điều kiện về xoắn thuần túy ( $\sigma_t = \sigma_r = 0$  và  $\alpha_2 = 45^\circ$ ) [16], ta có hai phương trình (51) và (52) làm tiêu chí hội tụ cho quá trình tính toán.

$$\rho_{st} f_{st} + \rho_{st} f_{st} = -(\sigma_2^c + \sigma_1^c + \sigma_1^{sf}) \quad (51)$$

$$\rho_{st} f_{st} - \rho_{st} f_{st} = -(\sigma_2^c - \sigma_1^c - \sigma_1^{sf}) - 2\tau_{21}^c \quad (52)$$

Sơ đồ thuật toán của SMMT-SFRC cho dầm SFRC được hiệu chỉnh từ SMMT do xem xét thêm yếu tố sợi thép, và các bước giải trong đường cong quan hệ mô men xoắn và góc xoắn đơn vị được thể hiện trên Hình 4. Một chương trình được sử dụng trong môi trường MATLAB bằng thuật toán thử và sai để tính toán từng điểm của đường cong quan hệ mô men xoắn - góc xoắn trên một đơn vị chiều dài. Trong nghiên cứu này, giá trị  $\varepsilon_2$  thay đổi từ 0 đến cực hạn là  $\varepsilon_{cu}$  được lấy bằng  $-0,0035$  [26]. Chiều rộng vết nứt  $w_{sfrc}$  cũng thay đổi từ 0 đến chiều rộng vết nứt giới hạn  $w_d = 2w_{sfrc}$  [3]. Giới hạn của  $\varepsilon_2$  và  $w_{sfrc}$  cũng là chỉ số đánh giá dạng phá hoại do bê tông bị nén vỡ hoặc tuột sợi thép. Ở mỗi bước xác định điểm mô men xoắn và góc xoắn đơn vị, ban đầu chọn giá trị  $\varepsilon_2$ , sau đó giả thiết  $\gamma_{21}$ ,  $\varepsilon_1$ , tiếp đến tiến hành tính toán và kiểm tra hội tụ theo phương trình (51) và (52). Phương pháp cát tuyến (scant method) và chia đôi (bisection method) để xác định nghiệm của đa thức có tích số trái dấu được sử dụng trong MATLAB [28] của nghiên cứu này. Dung sai hội tụ của hai phương trình (51) và (52) được lấy bằng  $10^{-10}$  tại mỗi bước tương ứng với giá trị  $\varepsilon_2$ .

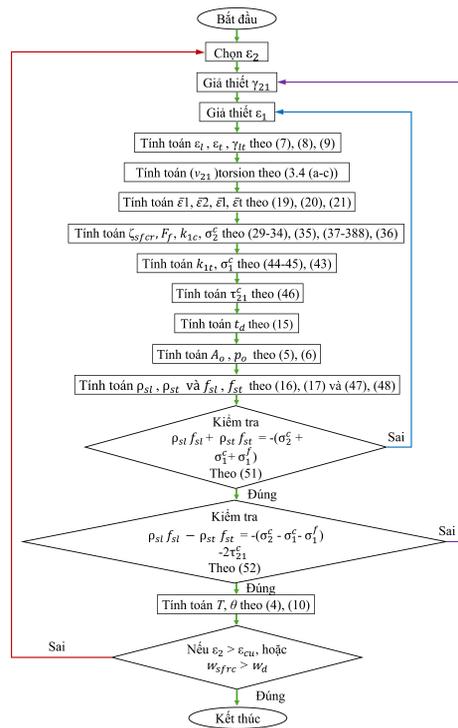
### 3. Kiểm chứng mô hình

Tổng cộng 24 dầm thử nghiệm được thu thập của các nghiên cứu của Rao [9, 29], Hassan và cs. [30], được sử dụng để đánh giá độ chính xác và tin cậy của mô hình đề xuất. Các dầm có hàm lượng cốt thép (đọc và đai), tỉ lệ kích thước hình học và cường độ bê tông, các loại sợi thép và hàm lượng sợi thép khác nhau.

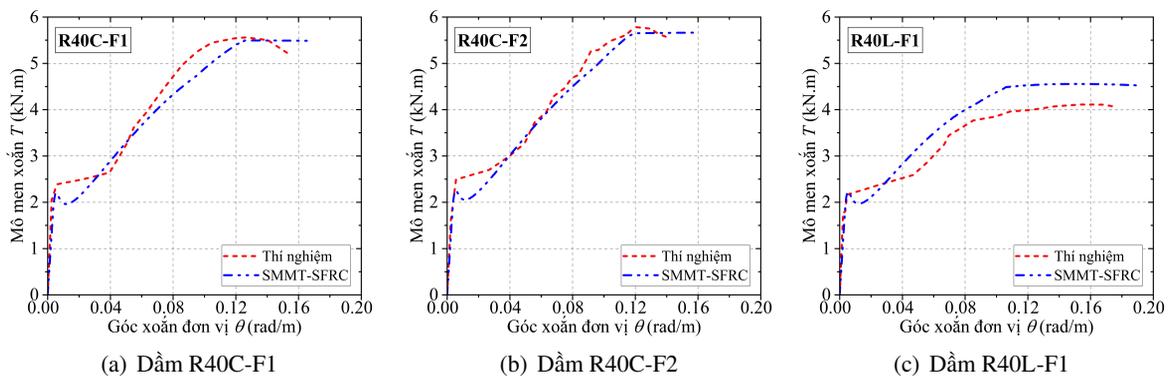
#### 3.1. Ứng xử chịu xoắn

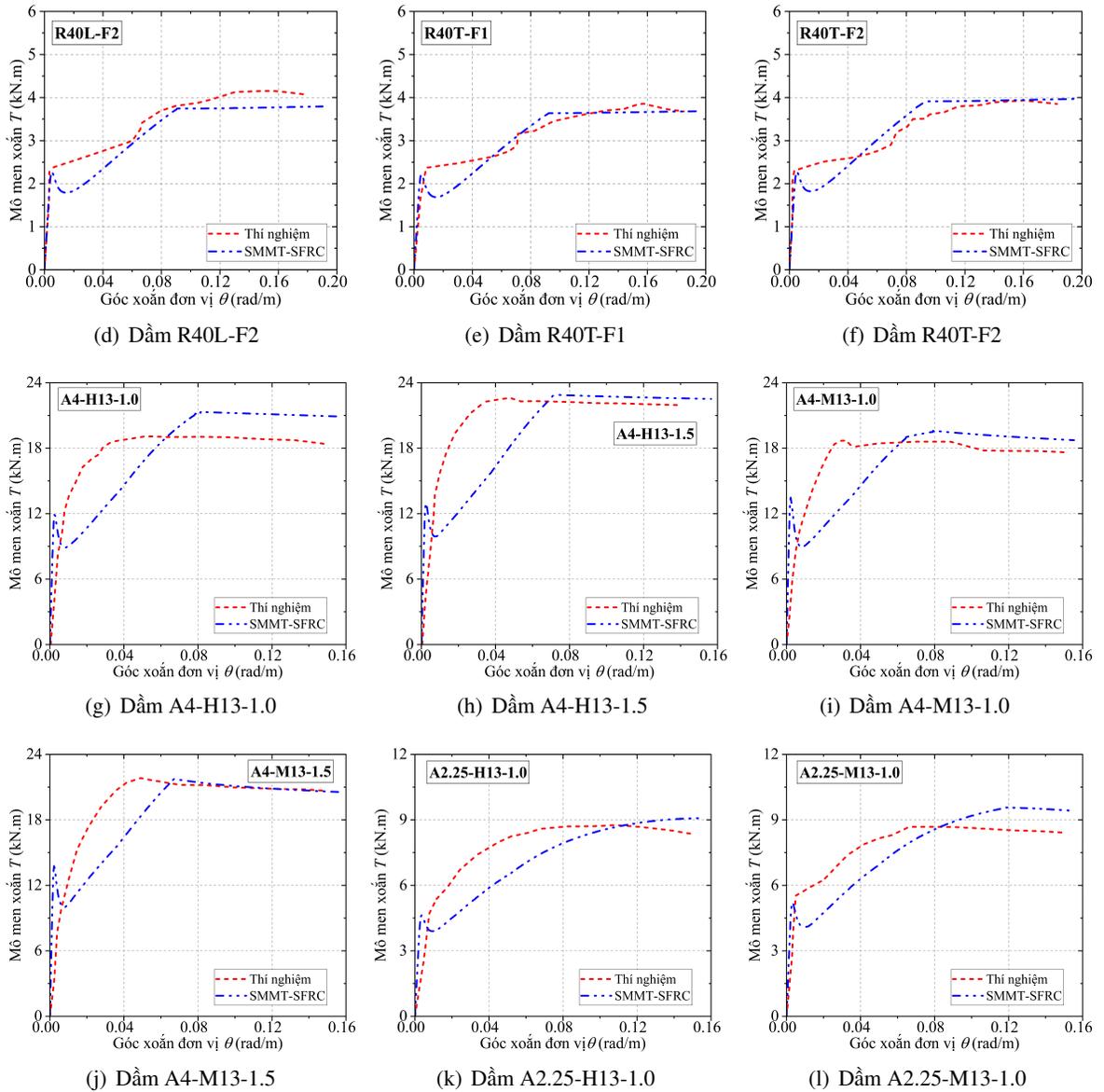
Đường cong quan hệ mô men xoắn ( $T$ ) và góc xoắn đơn vị ( $\theta$ ) được biểu diễn trên Hình 5. Về tổng thể, mô hình SMMT-SFRC đã dự đoán hợp lý ứng xử qua các giai đoạn chịu lực so với thực nghiệm của các dầm SFRC. Giai đoạn đầu dầm ứng xử tuyến tính đến khi nứt bê tông; tiếp đến giai đoạn chuyển pha sau nứt, ở giai đoạn này mô men giảm xuống và góc xoắn đơn vị tiếp tục tăng lên; cuối cùng ứng xử phi tuyến tính thể hiện qua mô men xoắn và góc xoắn đơn vị tăng lên đến khả năng chịu lực lớn nhất, sau đó mô men xoắn giảm dần đến khi phá hoại dầm.

Hình 5(a-f) thể hiện mối quan hệ giữa mô men xoắn và góc xoắn đơn vị của một số dầm SFRC đại diện của mô hình tính toán và thực nghiệm của Rao [9, 29]. Mô hình SMMT-SFRC cho dự báo tốt ứng xử trước và sau nứt cho hai nhóm mẫu R40C minh họa trên Hình 5(a-b) và R40T được biểu diễn trong Hình 5(c-d). Tuy nhiên, mô hình dự báo ứng xử cao hơn so với thực nghiệm của nhóm mẫu R40L, được thể hiện như trên Hình 5(e-f). Nhóm mẫu R40L sử dụng cốt thép dọc lớn nhất nhưng kết quả thực nghiệm cho cường độ xoắn tổng thể nhỏ hơn các dầm của hai nhóm R40C và R40T có cùng hàm lượng sợi thép và thép đai. Điều này có thể dẫn tới sai khác giữa thực nghiệm và mô hình SMMT-SFRC khi xem xét đến ảnh hưởng và đóng góp của thép dọc vào khả năng chịu xoắn khi giảm biến dạng và chịu ứng suất dọc trục do vết nứt nghiêng do xoắn gây ra ( $\alpha_2 = 45^\circ$ ).



Hình 4. Sơ đồ thuật toán SMMT-SFRC





Hình 5. Mối quan hệ mô men xoắn - góc xoắn giữa SMMT-SFRC và thực nghiệm của Rao [9, 29], Hassan và cs. [30]

Đường cong quan hệ mô men xoắn - góc xoắn đơn vị của một số dầm đại diện giữa mô hình tính toán và thực nghiệm của Hassan và cs. [30] được minh họa trên Hình 5(g-l). Nhóm mẫu A4 cho thấy xu hướng ứng xử phù hợp với thực nghiệm ở giai đoạn trước nứt; ở giai đoạn sau nứt đến trước khi đạt khả năng chịu lực lớn nhất khá chênh lệch, đến nhánh sau mô men xoắn cực hạn đường cong ứng xử gần giống một đường thẳng và tương đồng với thực nghiệm, được thể hiện trên Hình 5(g-j). Điều này có được là ở giai đoạn chảy dẻo cốt thép chịu lực, hệ số ảnh hưởng Poisson thông qua Hsu/Zhu (phương trình (18)) là hằng số dẫn tới mô hình dự báo ở giai đoạn này ít thay đổi. Hình 5(k-l) cho thấy ứng xử của mô hình SMMT-SFRC tương đồng với thực nghiệm đối với mẫu thử nhóm A2 [30].

### 3.2. Khả năng chịu xoắn

Kết quả tính toán mô men xoắn nứt ( $T_{cr}$ ), mô men xoắn cực hạn ( $T_u$ ) và góc xoắn đơn vị tương ứng ( $\theta_{cr}, \theta_u$ ) giữa mô hình SMMT-SFRC được tóm tắt trong Bảng 2. Giá trị trung bình (MV) của tỷ số mô men xoắn nứt giữa tính toán và thực nghiệm ( $T_{cr,cal}/T_{cr,exp}$ ) thu được bằng 1,03 cùng hệ số độ lệch chuẩn (SD) và hệ số biến động (COV) lần lượt là 0,19; 0,18. Ba giá trị MV, SD và COV thu được đối với mô men xoắn cực hạn tương ứng bằng 1,03; 0,07 và 0,07. Trong khi đó, giá trị MV đối với góc xoắn nứt đơn vị  $\theta_{cr}$  và góc xoắn cực hạn đơn vị  $\theta_u$  đạt 0,80 và 1,41. Kết quả này cho thấy, mô hình dự báo tốt cường độ chịu xoắn qua các giai đoạn làm việc ( $T_{cr}, T_u$ ), trong khi ước tính đối với góc xoắn đơn vị tương ứng cho độ chính xác kém hơn. Nguyên nhân bởi góc xoắn đơn vị  $\theta$  phụ thuộc vào độ cứng sau nứt, trong khi mô hình sử dụng ứng suất và biến dạng trung bình; giả thiết hướng sợi vuông góc với bề mặt vết nứt trong phương pháp DTFTM, bỏ qua sự phân bố ngẫu nhiên của sợi; cũng như độ nhạy với điều kiện gối tựa, độ cong vênh, và cách đo trong các thí nghiệm thực tế để xác định  $\theta$ .

Bảng 2. Tóm tắt kết quả tính toán của SMMT-SFRC so với thực nghiệm

Tham khảo	Dầm	Mô men xoắn nứt $T_{cr}$ (kN.m)			Góc xoắn nứt $\theta_{cr}$ (rad/m)			Mô men xoắn cực hạn $T_u$ (kN.m)			Góc xoắn cực hạn $\theta_u$ (rad/m)		
		$T_{cr,exp}$	$T_{cr,cal}$	$\frac{T_{cr,cal}}{T_{cr,exp}}$	$\theta_{cr,exp}$	$\theta_{cr,cal}$	$\frac{\theta_{cr,cal}}{\theta_{cr,exp}}$	$T_{u,exp}$	$T_{u,cal}$	$\frac{T_{u,cal}}{T_{u,exp}}$	$\theta_{u,exp}$	$\theta_{u,cal}$	$\frac{\theta_{u,cal}}{\theta_{u,exp}}$
[9, 29]	R40C-F1	2,39	2,20	0,92	0,0058	0,0052	0,90	5,56	5,49	0,99	0,1263	0,1257	0,99
	R40C-F2	2,49	2,26	0,91	0,0056	0,0053	0,94	5,69	5,67	1,00	0,1205	0,1266	1,05
	R40C-F3	2,63	2,31	0,88	0,0054	0,0053	0,98	5,73	5,83	1,02	0,1232	0,1307	1,06
	R40C-F4	2,81	2,37	0,84	0,0055	0,0053	0,97	5,82	5,99	1,03	0,1260	0,1338	1,06
	R40L-F1	2,19	2,24	1,02	0,0052	0,0054	1,04	4,11	4,56	1,11	0,1577	0,1528	0,97
	R40L-F2	2,28	2,20	0,97	0,0054	0,0062	1,15	4,19	3,79	0,91	0,1547	0,1530	0,99
	R40L-F3	2,45	2,34	0,96	0,0059	0,0055	0,93	4,23	5,06	1,20	0,1621	0,1613	1,00
	R40L-F4	2,80	2,39	0,85	0,0046	0,0054	1,18	4,23	5,30	1,25	0,1453	0,1752	1,21
	R40T-F1	2,40	2,22	0,93	0,0053	0,0050	0,95	3,85	3,68	0,96	0,1577	0,1639	1,04
	R40T-F2	2,50	2,28	0,91	0,0053	0,0051	0,96	3,93	3,97	1,01	0,1584	0,1660	1,05
	R40T-F3	2,65	2,31	0,87	0,0059	0,0050	0,85	3,98	4,08	1,02	0,1523	0,1619	1,06
	R40T-F4	2,81	2,35	0,84	0,0056	0,0050	0,89	4,02	4,18	1,04	0,1451	0,1558	1,07
[30]	A4-M13-0.5	8,80	12,18	1,38	0,00530	0,0027	0,50	15,90	17,34	1,09	0,0580	0,0627	1,08
	A4-M13-1.0	10,30	13,47	1,31	0,00600	0,0023	0,38	18,70	19,60	1,05	0,0320	0,0792	2,47
	A4-M13-1.5	11,30	13,77	1,22	0,00650	0,0022	0,34	21,70	21,76	1,00	0,0530	0,0672	1,27
	A4-H35-0.5	7,40	11,34	1,53	0,00420	0,0027	0,64	15,50	17,89	1,15	0,0505	0,0813	1,61
	A4-H35-1.0	9,50	11,82	1,24	0,00540	0,0029	0,53	19,10	21,32	1,12	0,0520	0,0810	1,56
	A4-H35-1.5	11,00	12,97	1,18	0,00610	0,0024	0,40	22,60	22,90	1,01	0,0475	0,0753	1,59
	A2-M13-0.5	4,80	4,65	0,97	0,00700	0,0036	0,51	8,10	8,16	1,01	0,0540	0,1020	1,89
	A2-M13-1.0	5,20	4,89	0,94	0,00420	0,0044	1,04	8,70	9,57	1,10	0,0680	0,1187	1,75
	A2-M13-1.5	6,50	5,35	0,82	0,00380	0,0034	0,89	10,40	10,34	0,99	0,0400	0,1145	2,86
	A2-H35-0.5	3,50	4,40	1,26	0,00630	0,0035	0,55	7,10	7,68	1,08	0,0620	0,1136	1,83
	A2-H35-1.0	4,60	4,64	1,01	0,00770	0,0036	0,47	8,80	9,08	1,03	0,1070	0,1432	1,34
	A2-H35-1.5	5,20	4,85	0,93	0,00400	0,0044	1,11	10,10	10,56	1,05	0,0620	0,1270	2,05
Trung bình (MV)				1,03			0,80			1,05			1,41
Độ lệch chuẩn (SD)				0,19			0,26			0,07			0,49
Hệ số biến động (COV)				0,18			0,32			0,07			0,35

## 4. Kết luận

Trong khuôn khổ nghiên cứu của bài báo này, có thể thấy rằng hiệu chỉnh SMMT cho dầm BTCT để dự báo ứng xử và cường độ chịu xoắn cho dầm SFRC (SMMT-SFRC). Mô hình đề xuất được kiểm

chúng với thực nghiệm để đánh giá độ chính xác và độ tin cậy về ứng xử và khả năng chịu lực. Từ kết quả phân tích, một số kết luận được rút ra như sau:

- Mô hình SMMT-SFRC được phát triển dựa trên SMMT để dự báo ứng xử chịu xoắn dầm SFRC. Các tham số chính hiệu chỉnh trong mô hình đề xuất bao gồm bổ sung thành phần sợi thép tham gia chịu kéo, tác động của sợi thép đến ngăn cản mềm hóa bê tông và ứng xử sau chảy dẻo của cốt thép.

- Đặc tính liên kết giữa sợi thép và bê tông, ứng xử chịu kéo của sợi thép được xác định bằng mô hình truyền lực kéo trực tiếp (DTFTM), trong đó các sợi thép tại giao diện vết nứt được mô hình hóa như các phần tử kéo dọc trục vuông góc với vết nứt. Tích phân trực tiếp Gauss được sử dụng để giải các phương trình sau tuột sợi, đảm bảo dự báo toàn bộ ứng xử chịu lực.

- Mô hình đề xuất cho dự báo ứng xử xoắn của 24 dầm SFRC tương đồng với thực nghiệm qua các giai đoạn chịu tải. SMMT-SFRC có độ chính xác và tin cậy cao khi dự đoán khả năng chịu xoắn. Giá trị trung bình của mô men xoắn nứt và mô men xoắn cực hạn tương ứng là 1,03 và 1,05. Do đó, mô hình đề xuất khả thi trong việc dự báo ứng xử và phương pháp thiết kế dầm SFRC chịu xoắn.

- Các nghiên cứu trong tương lai, mở rộng SMMT-SFRC dự báo ứng xử chịu xoắn đối với dầm rộng SFRC, phát triển và cải tiến mô hình đề xuất để dự đoán đối với dầm bê tông cốt sợi siêu tính năng (UHPFRC) chịu xoắn, xem xét đến hiệu ứng do ảnh hưởng của hướng sợi và độ cứng sau nứt để dự báo tốt hơn góc xoắn đơn vị.

### Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Nguồn ngân sách khoa học và công nghệ của Trường Đại học Thủy lợi trong đề tài cấp cơ sở năm 2026, mã số: CS2026-41.

### Tài liệu tham khảo

- [1] Romualdi, J. P., Mandel, J. A. (1964). [Tensile strength of concrete affected by uniformly distributed and closely spaced short lengths of wire reinforcement](#). *ACI Journal Proceedings*, 61(6):657–672.
- [2] ACI Committee 544 (1988). *Design consideration for steel fiber reinforced concrete (ACI 544.4R-88)*. American Concrete Institute, USA.
- [3] Lim, T. Y., Paramasivam, P., Lee, S. L. (1987). [Analytical model for tensile behavior of steel fiber concrete](#). *ACI Materials Journal*, 84(4):286–298.
- [4] Bischoff, P. H. (2003). [Tension stiffening and cracking of steel fiber-reinforced concrete](#). *Journal of Materials in Civil Engineering*, 15(2):174–182.
- [5] Kim, K. S., Lee, D. H., Hwang, J. H., Kuchma, D. A. (2012). [Shear behavior model for steel fiber-reinforced concrete members without transverse reinforcements](#). *Composites Part B: Engineering*, 43(5): 2324–2334.
- [6] Mitchell, D., Collins, M. P. (1974). [Diagonal compression field theory-A rational model for structural concrete in pure torsion](#). *ACI Journal Proceedings*, 71(8):396–408.
- [7] Kwak, Y. K., Eom, M. O., Kim, W. S., Kim, J. (2002). [Shear strength of steel fiber-reinforced concrete beams without stirrups](#). *ACI Structural Journal*, 99(4):530–538.
- [8] Dupont, D. (2003). Calculation of crack widths with the (sigma-epsilon) method. *Test and design methods for steel fibre reinforced concrete: Background and experiences, Proceedings of RILEM TC 162-TDF*, Bochum, Germany, RILEM Publications SARL, 119–144.
- [9] Rao, T. D. G., Seshu, D. R. S. (2005). [Analytical model for the torsional response of steel fiber reinforced concrete members under pure torsion](#). *Cement and Concrete Composites*, 27(4):493–501.
- [10] Amin, A., Bentz, E. C. (2018). [Strength of steel fiber reinforced concrete beams in pure torsion](#). *Structural Concrete*, 19(3):684–694.
- [11] Bernardo, L. F. A., Teixeira, M. M. (2018). [Modified softened truss-model for prestressed concrete beams under torsion](#). *Journal of Building Engineering*, 19:49–61.
- [12] Sáng, N. V., Dũng, N. A., Huy, N. X., Thanh Ngọc, T. C. (2024). [Nghiên cứu ứng xử chịu xoắn của dầm bê tông cốt thép trước và sau nứt](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCN XD) - ĐHXDHN*, 18 (3V):1–13.

- [13] Ju, H., Lee, D. H., Hwang, J.-H., Kim, K. S., Oh, Y.-H. (2013). [Fixed-angle smeared-truss approach with direct tension force transfer model for torsional behavior of steel fiber-reinforced concrete members](#). *Journal of Advanced Concrete Technology*, 11(9):215–229.
- [14] Ju, H., Kim, K. S., Lee, D. H., Hwang, J.-H., Choi, S.-H., Oh, Y.-H. (2015). [Torsional responses of steel fiber-reinforced concrete members](#). *Composite Structures*, 129:143–156.
- [15] Bernardo, L. F. A., Andrade, J. M. A. (2020). [A unified softened truss model for RC and PC beams under torsion](#). *Journal of Building Engineering*, 32:101467.
- [16] Jeng, C.-H., Hsu, T. T. C. (2009). [A softened membrane model for torsion in reinforced concrete members](#). *Engineering Structures*, 31(9):1944–1954.
- [17] Sáng, N. V., Dũng, N. A., Thắng, N. N., Dũng, L. Đ. (2024). [Nghiên cứu ứng xử chịu xoắn thuần túy của dầm bê tông cốt thép bằng mô hình màng hóa mềm cho xoắn](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCNXD) - ĐHXDHN*, 18(4V):84–96.
- [18] Jeng, C.-H. (2015). [Unified softened membrane model for torsion in hollow and solid reinforced concrete members: Modeling precracking and postcracking behavior](#). *Journal of Structural Engineering*, 141(10): 04014243.
- [19] Nguyen, A. D., Nguyen, V. S., Nguyen, X. H., Le, D. D., Tran, C. T. N. (2025). [Softened membrane model for forecasting torsional response of reinforced concrete beams strengthened using FRP sheets](#). *Advances in Structural Engineering*, 28(16):3019–3043.
- [20] Zhang, F., Ding, Y., Xu, J., Zhang, Y., Zhu, W., Shi, Y. (2016). [Shear strength prediction for steel fiber reinforced concrete beams without stirrups](#). *Engineering Structures*, 127:101–116.
- [21] Hoffman, N. S. (2010). *Constitutive relationships of prestressed steel fiber concrete membrane elements*. PhD Thesis, University of Houston, USA.
- [22] Bredt, R. (1896). Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, 40(28):785–790.
- [23] Zhu, T. T. C., Hsu, R. R. H. (2002). [Softened membrane model for reinforced concrete elements in shear](#). *ACI Structural Journal*, 99(4):460–469.
- [24] Belarbi, A., Hsu, T. T. C. (1995). [Constitutive laws of softened concrete in biaxial tension-compression](#). *ACI Structural Journal*, 92(5):562–573.
- [25] Wang, J. (2006). *Constitutive relationships of prestressed concrete membrane elements*. PhD Thesis, University of Houston, USA.
- [26] Ju, H., Lee, D. H., Hwang, J.-H., Kang, J.-W., Kim, K. S., Oh, Y.-H. (2013). [Torsional behavior model of steel-fiber-reinforced concrete members modifying fixed-angle softened-truss model](#). *Composites Part B: Engineering*, 45(1):215–231.
- [27] Bernardo, L. F. A., Filho, B. M. V. C., Horowitz, B. (2021). [Efficient softened truss model for prestressed steel fiber concrete membrane elements](#). *Journal of Building Engineering*, 40:102363.
- [28] MathWorks (2023). *MATLAB R2023a*. The MathWorks Inc., USA.
- [29] Rao, T. D. G., Seshu, D. R. (2006). [Torsional response of fibrous reinforced concrete members: Effect of single type of reinforcement](#). *Construction and Building Materials*, 20(3):187–192.
- [30] Hassan, R. F., Al-Saffar, N. H., Mohammed, N. S., Hussein, H. H. (2022). [Experimental study and theoretical prediction on torsional strength with different steel fiber reinforced concretes and Cross-Section areas](#). *Engineering Structures*, 251:113559.