

TỐI ƯU TẤM SANDWICH FGM CÓ GÂN GIA CƯỜNG XIÊN GÓC DỰA TRÊN TẦN SỐ DAO ĐỘNG TỰ DO

Trần Hữu Quốc^a, Vũ Văn Thắm^{a,*}

^aKhoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,
55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 29/9/2025, Sửa xong 12/11/2025, Chấp nhận đăng 18/11/2025

Tóm tắt

Nghiên cứu này tập trung vào tối ưu hóa thiết kế tấm sandwich FGM có gân gia cường xiên góc nhằm đạt tần số cơ bản lớn nhất. Tấm được cấu tạo bởi hai lớp bề mặt làm từ vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM), lớp lõi bằng vật liệu xốp có cơ tính biến thiên (FGP), và được gia cường bằng các gân xiên góc nhằm tăng cường độ cứng. Mô hình phần tử hữu hạn (FEM) dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất của Mindlin (FSDT) và kỹ thuật san đều gân Lekhnitskii được xây dựng. Bài toán tối ưu được giải quyết bằng thuật toán Rao-3, một phương pháp tối ưu hóa hiện đại không yêu cầu các tham số phức tạp. Các biến thiết kế bao gồm: số lượng gân, phương đặt gân (góc xiên) và cấu hình của tấm sandwich. Các kết quả số đã chứng minh tính chính xác và độ tin cậy của mô hình đề xuất. Đồng thời, nghiên cứu cũng chỉ ra ảnh hưởng của các tham số thiết kế đến tần số cơ bản của tấm. Bằng cách tối ưu hóa, tần số cơ bản của tấm được cải thiện đáng kể, qua đó nâng cao hiệu suất và khả năng chịu tải của tấm.

Từ khoá: sandwich; FGM; gân gia cường; tối ưu; thuật toán Rao-3.

OPTIMIZATION OF SANDWICH FGM PLATE REINFORCED BY ARBITRARILY OBLIQUE STIFFENERS BASED ON NATURAL VIBRATION FREQUENCY

Abstract

This study focuses on optimizing the design of functionally graded material (FGM) sandwich plates with oblique stiffeners to maximize the fundamental frequency. The plate consists of two FGM face sheets, a porous core made of functionally graded porous material (FGP), and angled stiffeners to enhance its stiffness. A finite element model (FEM) based on Mindlin's first-order shear deformation theory (FSDT) and the Lekhnitskii's stiffener-smearing technique is developed. The optimization problem is solved using the Rao-3 algorithm, a modern optimization method that requires no complex parameter tuning. Design variables include the number of stiffeners, their orientation (oblique angle), and the sandwich plate configuration. Numerical results validate the accuracy and reliability of the proposed model. Additionally, the study elucidates the influence of design parameters on the fundamental frequency. Through optimization, the fundamental frequency of the plate is significantly improved, thereby enhancing its performance and load-bearing capacity.

Keywords: sandwich; FGM; stiffened plates; optimization; Rao-3.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2025-19\(4V\)-05](https://doi.org/10.31814/stce.huce2025-19(4V)-05) © 2025 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Kết cấu sandwich, với đặc trưng gồm hai lớp mặt mỏng có độ bền cao kẹp một lớp lõi dày và nhẹ, sở hữu nhiều ưu điểm vượt trội, bao gồm tỉ số độ bền trên khối lượng và độ cứng trên khối lượng rất cao. Kết cấu này giúp giảm trọng lượng tổng thể trong khi vẫn duy trì khả năng chịu tải ấn tượng. Vì vậy, sandwich đã và đang được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực, từ dân dụng, cánh máy bay, thân tàu thủy cho đến các bộ phận của tàu vũ trụ. Khả năng làm việc của kết cấu phụ thuộc chủ yếu vào việc lựa chọn vật liệu cho lớp bề mặt và lớp lõi.

Các nghiên cứu về kết cấu sandwich đã chỉ ra sự đa dạng trong vật liệu được sử dụng cho lớp mặt và lớp lõi. Các lớp mặt bằng kim loại [1] nổi bật với độ bền và độ cứng cao, nhưng nhược điểm là khối lượng lớn. Vì vậy, vật liệu composite đã trở thành lựa chọn thay thế tiềm năng nhờ ưu điểm về độ bền riêng cao, trọng lượng nhẹ và khả năng chống ăn mòn. Đặc biệt, vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) được ứng dụng làm lớp mặt nhằm tăng cường khả năng chịu nhiệt và kháng tác nhân hóa học

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: thamvv@huce.edu.vn (Thắm, V. V.)

trong môi trường khắc nghiệt [2]. Đối với lớp lõi, nhiều dạng kết cấu đã được nghiên cứu, mỗi loại mang lại những lợi ích riêng. Các lõi có kết cấu dạng tổ ong [3, 4], lượn sóng [5] và mạng tinh thể [6] nổi bật với độ bền riêng và độ cứng cao, đồng thời có khả năng chống va đập tốt. Trong khi đó, lõi xốp [7] lại ưu thế hơn về khả năng hấp thụ năng lượng và cách âm. Ngoài việc cải tiến vật liệu, việc tích hợp các gân gia cường cũng là một giải pháp hữu hiệu nhằm tăng cường hiệu suất và khả năng chịu lực của tấm sandwich. Giải pháp này đang thu hút sự quan tâm lớn từ cộng đồng nghiên cứu, vì chúng cho phép điều chỉnh độ cứng cục bộ mà không làm tăng đáng kể khối lượng tổng thể. Các nghiên cứu về tấm sandwich có gân gia cường đã được công bố rộng rãi, từ phân tích tĩnh đến động [8–10]. Nhiều phương pháp được áp dụng để phân tích tấm có gân gia cường, trong đó phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) được xem là công cụ hiệu quả [11–13]. Bên cạnh đó, kỹ thuật san đều tác dụng của gân là một phương pháp nổi bật, giúp đơn giản hóa bài toán bằng cách coi các gân gia cường được phân bố đều trên tấm [14–16]. Các nghiên cứu đã sử dụng kỹ thuật này để phân tích các cấu trúc có gân gia cường làm từ vật liệu nguyên khối [17] cũng như composite và FGM [18, 19].

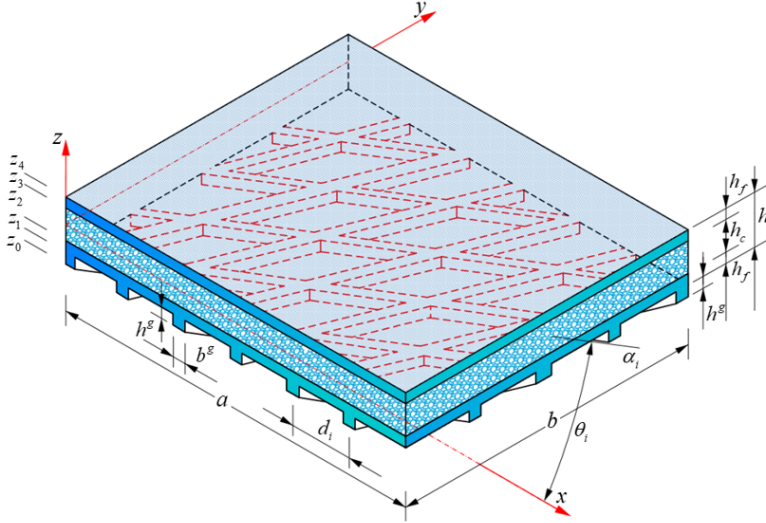
Các nghiên cứu trước đây chủ yếu tập trung vào tấm sandwich có gân gia cường trục giao, song cách tiếp cận này bị hạn chế khi áp dụng cho các kết cấu có hình học phức tạp. Để khắc phục nhược điểm đó, các nghiên cứu gần đây đã chuyển hướng sang khảo sát tấm sandwich có gân gia cường xiên góc. Một số nghiên cứu tiêu biểu có thể kể đến như công trình của Quan và cs. [20], trong đó nhóm tác giả đã phân tích ổn định phi tuyến của vỏ sandwich FGM có gân gia cường xiên lệch tâm. Dong và cs. [21] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) để khảo sát đặc tính mất ổn định và uốn của tấm sandwich FGM có gân xiên. Tương tự, Cong và cs. [22] đã nghiên cứu dao động phi tuyến của tấm sandwich có gân gia cường xiên trong khuôn khổ lý thuyết FSDT. Tuy nhiên, các công trình này nhìn chung vẫn giới hạn trong phạm vi bố trí gân gia cường theo dạng lưới cố định.

Từ tổng quan trên có thể thấy rằng, mặc dù đã có những nỗ lực nghiên cứu về tấm sandwich có gân xiên, nhưng vẫn thiếu một khảo sát toàn diện về đặc tính của loại kết cấu này, đặc biệt khi các gân được bố trí với góc lệch tùy ý. Nhằm lấp đầy khoảng trống đó, bài báo này tập trung vào việc tối ưu hóa tấm sandwich FGM có gân xiên góc dựa trên tiêu chí tần số dao động tự do cơ bản. Việc lựa chọn tiêu chí tối ưu này được biện giải dựa trên các lý do sau: (1) Tần số dao động cơ bản tỉ lệ thuận với độ cứng uốn tổng thể của kết cấu. Do đó, việc tối đa hóa tần số này thường được coi là phương pháp tối ưu đơn giản và hiệu quả để nâng cao độ cứng tổng thể, từ đó cải thiện cả khả năng chịu tải tĩnh và động; (2) Đối với các kết cấu chịu kích thích động tần số thấp (như rung động máy móc, tải trọng gió, hay động đất), tần số cơ bản là tần số dễ bị kích thích nhất và thường nằm gần các dải tần kích thích phổ biến. Việc tối đa hóa tần số cơ bản sẽ đẩy kết cấu ra khỏi dải tần nguy hiểm này, đảm bảo độ an toàn; (3) Tối ưu đa tần số (hoặc tối ưu đa mục tiêu) làm tăng đáng kể độ phức tạp tính toán do yêu cầu phải theo dõi các dạng dao động (mode tracking) và xử lý không gian mục tiêu lớn hơn. Việc giới hạn ở tần số cơ bản giúp đơn giản hóa bài toán, đặc biệt khi sử dụng các thuật toán mới như Rao-3, giúp chứng minh hiệu quả của thuật toán trên một bài toán đơn giản, rõ ràng. Cách tiếp cận tối đa hóa tần số cơ bản này cũng đã được áp dụng rộng rãi trong nhiều nghiên cứu về tối ưu hóa các kết cấu composite và sandwich trên các tạp chí uy tín [23–25]. Để thực hiện mục tiêu, một mô hình tính toán được xây dựng kết hợp phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất với kỹ thuật san bằng gân của Lekhnitskii, nhằm phân tích đặc tính dao động của kết cấu. Cuối cùng, thuật toán Rao-3 được áp dụng để xác định cấu hình gân gia cường tối ưu, từ đó nâng cao hiệu suất làm việc của kết cấu phức tạp này.

2. Mô hình lý thuyết

2.1. Mô tả bài toán

Xét tấm sandwich có chiều dài a , chiều rộng b và chiều cao h như trình bày trên Hình 1. Tấm được gia cường bởi các hệ gân theo các phương α_i , các gân gia cường có mặt cắt ngang hình chữ nhật với kích thước $h_i^g \times b_i^g$. Trên mỗi phương α_i , các gân được giả thiết là có kích thước mặt cắt ngang như nhau và cách đều với khoảng cách d_i . Các phương α_i hợp với phương trục x một góc θ_i .



Hình 1. Mô hình tấm sandwich FGM/FGP có gân gia cường

2.2. Mô hình vật liệu

Hai lớp bề mặt của tấm và các gân gia cường được làm bằng vật liệu FGM, lớp lõi được làm bằng vật liệu xốp có cơ tính biến thiên (FGP). Để đảm bảo tính liên tục của vật liệu giữa các lớp, vật liệu gốc của lớp lõi được sử dụng là thành phần kim loại ở hai lớp bề mặt. Theo phương chiều dày, mặt dưới của gân, mặt dưới của tấm, mặt dưới của lớp lõi, mặt trên của lớp lõi và mặt trên của tấm lần lượt có tọa độ là $z_0 = -h/2 - h^g$, $z_1 = -h/2$, $z_2 = -h_c/2$, $z_3 = h_c/2$ và $z_4 = h/2$. Tính chất vật liệu hiệu dụng $\mathcal{F}(z)$ của gân và hai lớp bề mặt gồm module đàn hồi E , khối lượng riêng ρ và hệ số Poisson ν được xác định theo công thức sau:

$$\mathcal{F}(z) = V_c \mathcal{F}_c + V_m \mathcal{F}_m \quad (1)$$

trong đó $\mathcal{F}_c$ và $\mathcal{F}_m$ lần lượt là tính chất của hai vật liệu thành phần gốm và kim loại. V_c và V_m , là tỷ lệ thể tích của gốm và kim loại, được xác định như sau:

$$\begin{aligned} V_c &= \left(\frac{z_0 - z}{z_0 - z_1} \right)^{p_z}, \quad z \in [z_0; z_1] \\ V_c &= \left(\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} \right)^{p_z}, \quad z \in [z_1; z_2] \\ V_c &= \left(\frac{z_3 - z}{z_3 - z_4} \right)^{p_z}, \quad z \in [z_3; z_4] \\ V_m &= 1 - V_c \end{aligned} \quad (2)$$

Tính chất vật liệu của lớp lõi FGP được xác định theo công thức:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m (1 - e_0 \psi(z)), \quad z \in [z_2; z_3] \\ \rho(z) &= \rho_m (1 - e_m \psi(z)), \quad z \in [z_2; z_3] \\ e_m &= 1 - \sqrt{1 - e_0} \end{aligned} \quad (3)$$

trong đó e_0 là hệ số lỗ rỗng, e_m là hệ số mật độ nền, $\psi(z)$ là tham số phụ thuộc vào dạng phân bố lỗ rỗng và được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \cos\left(\frac{\pi z}{h_c}\right) && \text{khi lỗ rỗng phân bố đối xứng (SPD)} \\ \psi(z) &= \cos\left(\frac{\pi z}{2h_c} + \frac{\pi}{4}\right) && \text{khi lỗ rỗng phân bố bất đối xứng (APD)} \\ \psi(z) &= \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 && \text{khi lỗ rỗng phân bố đều (UPD)} \end{aligned} \quad (4)$$

2.3. Lý thuyết FSDT cho tấm sandwich FGM/FGP có gân gia cường

Trong nghiên cứu này, lý thuyết tấm FSDT được sử dụng để xét đến biến dạng cắt ngang, phù hợp cho phân tích các tấm composite có độ dày trung bình. Lý thuyết này được áp dụng để thiết lập mô hình FEM. Trường chuyển vị được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (5)$$

trong đó u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của mặt trung tính theo phương x, y, z ; φ_x, φ_y là góc xoay của tiết diện ngang quanh trục y và x ; z là tọa độ theo chiều dày tấm; và t là biến thời gian. Các thành phần biến dạng được xác định bởi:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_0\} + z\{\kappa\} \\ \{\gamma\} &= \{\gamma_0\} \end{aligned} \quad (6)$$

trong đó $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T$ và $\{\gamma\} = \{\gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}\}^T$; $\{\varepsilon_0\}$, $\{\kappa\}$ và $\{\gamma\}$ lần lượt là các thành phần biến dạng màng, biến dạng uốn và biến dạng cắt ngang. Các thành phần biến dạng này được xác định theo:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_0\} &= \{\varepsilon_{x0} \quad \varepsilon_{y0} \quad \gamma_{xy0}\}^T = \{u_{0,x} \quad v_{0,y} \quad u_{0,y} + v_{0,x}\}^T \\ \{\kappa\} &= \{\kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy}\}^T = \{\varphi_{x,x} \quad \varphi_{y,y} \quad \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}\}^T \\ \{\gamma_0\} &= \{\gamma_{xz0} \quad \gamma_{yz0}\}^T = \{w_{0,x} + \varphi_x \quad w_{0,y} + \varphi_y\}^T \end{aligned} \quad (7)$$

Quan hệ ứng suất-biến trong lớp k của tấm dạng được xác định như sau:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^k \\ \sigma_y^k \\ \tau_{xy}^k \\ \tau_{yz}^k \\ \tau_{xz}^k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^k & C_{22}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (8)$$

với C_{ij} là các hệ số đàn hồi phụ thuộc vào $E(z)$ và $\nu(z)$:

$$C_{11}^k = C_{22}^k = \frac{E^k(z)}{1 - \nu^k(z)^2}, \quad C_{12}^k = \frac{\nu^k(z) E^k(z)}{1 - \nu^k(z)^2}, \quad C_{44}^k = C_{55}^k = C_{66}^k = \frac{E^k(z)}{2[1 - \nu^k(z)]} \quad (9)$$

Các gân gia cường được xem là các dầm, do đó quan hệ ứng suất biến dạng trong gân thứ i được xác định trong hệ tọa độ địa phương của gân như sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\alpha_i}^g \\ \tau_{\alpha_i z}^g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E^g(z) & 0 \\ 0 & G^g(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\alpha_i}^g \\ \gamma_{\alpha_i z}^g \end{Bmatrix} \text{ với } G^g(z) = \frac{E^g(z)}{2[1 + \nu^g(z)]} \quad (10)$$

Thực hiện chuyển trục các thành phần ứng suất trong gân từ phương α_i về hệ trục (x, y) [26]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^g \\ \sigma_y^g \\ \sigma_{xy}^g \\ \sigma_{yz}^g \\ \sigma_{xz}^g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

trong đó $\bar{C}_{ij}$ là các hệ số đàn hồi được chuyển sang hệ trục (x, y) :

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= E(z) \cos^4 \alpha_i; & \bar{C}_{12} &= E(z) \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i; & \bar{C}_{16} &= E(z) \cos^3 \alpha_i \sin \alpha_i \\ \bar{C}_{22} &= E(z) \sin^4 \alpha_i; & \bar{C}_{26} &= E(z) \cos \alpha_i \sin^3 \alpha_i; & \bar{C}_{66} &= E(z) \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i \\ \bar{C}_{44} &= G(z) \sin^2 \alpha_i; & \bar{C}_{45} &= G(z) \cos \alpha_i \sin \alpha_i; & \bar{C}_{55} &= G(z) \cos^2 \alpha_i \end{aligned} \quad (12)$$

2.4. Công thức phần tử hữu hạn

a. Ma trận độ cứng và ma trận khối lượng

Để phân tích bằng FEM, tấm được chia thành các phần tử tứ giác 4 nút với 5 bậc tự do mỗi nút. Ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$ và ma trận khối lượng phần tử $[M_e]$ được rút ra từ việc áp dụng nguyên lý công ảo:

$$\delta \Pi = \delta U - \delta T = 0 \quad (13)$$

trong đó U là thế năng biến dạng đàn hồi:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\{\varepsilon_0\}^T [A] \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon_0\}^T [B] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} + \{\gamma\}^T [A_c] \{\gamma\} \right) d\Omega \quad (14)$$

với $[A]$, $[B]$, $[D]$ và $[A_c]$ là các ma trận độ cứng vật liệu, được xác định bằng cách tích phân các tính chất vật liệu theo chiều dày có sử dụng kỹ thuật san đều tác dụng gân Lekhnitskii và được trình bày trong Phụ lục.

T là động năng:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \dot{u}^2 dV \quad (15)$$

Từ đó xác định được ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của phần tử như sau:

$$\begin{aligned} [K_e] &= \int_{\Omega} [B_e]^T [D_e] [B_e] d\Omega \\ [M_e] &= \int_{\Omega} [N]^T [I] [N] d\Omega \end{aligned} \quad (16)$$

trong đó $[B_e]$ và $[D_e]$ lần lượt là ma trận tính biến dạng và ma trận độ cứng trụ; $[N]$ và $[I]$ là ma trận các hàm dạng [27] và ma trận các mô men quán tính. Mô hình dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất nên các hàm dạng được lựa chọn là các hàm Lagrange sẽ giúp mô hình có được tốc độ xử lý nhanh và là các hàm dạng đã được kiểm chứng về độ chính xác và hội tụ. Các ma trận này được trình bày trong Phụ lục.

2.5. Phương trình dao động toàn hệ

Ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của từng phần tử được ghép nối thành ma trận tổng thể $[K]$ và $[M]$. Phương trình dao động tự do toàn cục có dạng:

$$([K] - \omega^2 [M])\{D\} = \{0\} \quad (17)$$

Đây là một bài toán giá trị riêng tuyến tính. Giải phương trình này sẽ cho ra tần số dao động tự nhiên và dạng dao động tương ứng của tấm sandwich FGM/FPG có gân gia cường.

3. Tối ưu tấm sandwich

3.1. Giới thiệu thuật toán Rao-3

Thuật toán Rao-3, do Rao [28] đề xuất, là một phương pháp metaheuristic đơn giản và không yêu cầu điều chỉnh tham số. Thuật toán này cập nhật nghiệm dựa trên sự tương tác giữa nghiệm tốt nhất, nghiệm kém nhất và một nghiệm ngẫu nhiên trong quần thể. Nhờ tính gọn nhẹ và không phụ thuộc vào các tham số điều chỉnh phức tạp, Rao-3 cho thấy ưu thế trong việc giảm phụ thuộc vào kinh nghiệm người dùng và tăng tính ổn định, đặc biệt hiệu quả khi áp dụng cho các bài toán tối ưu hóa phi tuyến trong kỹ thuật, như tối ưu hóa kết cấu dầm, tấm sandwich. So với các thuật toán như Genetic Algorithm (GA) hoặc Particle Swarm Optimization (PSO), Rao-3 có ưu điểm về tốc độ hội tụ và khả năng xử lý các bài toán với không gian tìm kiếm đa chiều. Trong nghiên cứu này, Rao-3 được chọn để tối ưu hóa tần số dao động tự do thứ nhất của tấm sandwich với lớp bề mặt là FGM, lõi xốp có cơ tính biến đổi (FGP) và được gia cường bởi các gân đặt xiên góc.

3.2. Xác định bài toán tối ưu

Mục tiêu của bài toán tối ưu là tối đa hóa tần số dao động tự do thứ nhất ω_1 của tấm sandwich, được tính toán thông qua mô hình FEM dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Hàm mục tiêu được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} \text{Tối đa hoá: } f(x) &= \omega_1(x) \\ \text{Ràng buộc: } x^L &\leq x \leq x^U \end{aligned} \quad (18)$$

trong đó x là vectơ các biến thiết kế, $x = \{p_z, e_0, p_D, \chi, \theta_i\}$, x^L và x^U lần lượt là giới hạn dưới và trên của các biến. Các biến thiết kế x bao gồm cả biến liên tục và rời rạc:

- Biến liên tục: Chỉ số tỷ lệ thể tích p_z , hệ số độ rỗng e_0 , θ_i là góc tạo bởi phương đặt gân i so với phương trục x , và $\chi = h_c/h$ là tỷ lệ chiều dày lớp lõi so với chiều dày tổng.
- Biến rời rạc: Loại phân bố độ rỗng p_D .
- Giới hạn các biến: $0 \leq p_z \leq 10$; $0 \leq e_0 \leq 0,8$; $0^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$, $0 \leq \chi \leq 0,8$, biến rời rạc được mã hóa thành số nguyên ($p_D = 1$ cho SPD, $p_D = 2$ cho APD, $p_D = 3$ cho UD).

3.3. Quy trình tối ưu hóa

Quy trình tối ưu hóa bằng thuật toán Rao-3 được thực hiện theo các bước sau: Bước 1: Khởi tạo quần thể → Bước 2: Đánh giá hàm mục tiêu → Bước 3: Cập nhật giải pháp bằng Rao-3 → Bước 4: Kiểm tra ràng buộc → Bước 5: Kiểm tra điều kiện dừng.

3.4. Triển khai thuật toán

Thuật toán Rao-3 được lập trình Matlab và tích hợp với mã FEM để tính toán tần số dao động. Các tham số thuật toán được thiết lập như sau:

- Kích thước quần thể: $N = 50$.
- Số lần lặp tối đa: 1000.
- Ngưỡng hội tụ: 10^{-6}

Để tăng hiệu quả tính toán, các phép tính ma trận độ cứng và khối lượng được tối ưu hóa bằng cách sử dụng tích phân Gauss và các hàm dạng phù hợp.

4. Kết quả số và thảo luận

Trong phần này, một số ví dụ so sánh được thực hiện để đánh giá sự hội tụ và độ chính xác của mô hình. Tiếp theo, các ví dụ số được thực hiện để nghiên cứu ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước, số lượng gân, phương đặt gân, hệ số lỗ rỗng, dạng phân bố lỗ rỗng và tỷ lệ độ dày lớp lõi/lớp mặt đến tần số dao động tự do của kết cấu. Cuối cùng, thuật toán Rao-3 được áp dụng để tìm ra phương án tối ưu của tấm sandwich FGM/FGP có gân gia cường.

4.1. Các ví dụ kiểm chứng mô hình

a. Kiểm chứng sự hội tụ của chương trình

Trước hết, ví dụ số đầu tiên được thực hiện để kiểm chứng sự hội tụ của kết quả khi tính toán tần số dao động của tấm sandwich FGM/FGP có gân gia cường bằng mô hình FEM đã thiết lập. Tấm được xét đến trong ví dụ này có chiều dài là $a = 1,2$ m, chiều rộng $b = 1$ m, chiều dày $h = 0,05$ m, cấu hình sandwich là [1-6-1] (biểu thị tỷ lệ chiều dày các lớp), lớp trên và lớp dưới là FGM có $p_z = 1$, lớp lõi là FGP có $e_0 = 0,3$ và phân bố theo kiểu SPD. Tấm được gia cường bởi các gân FGM có mặt cắt ngang là chữ nhật với $b^g \times h^g = 0,03 \times 0,04$ (m²) theo hai phương $\alpha_1 = 68,2^\circ$ và $\alpha_2 = 32^\circ$, các gân theo phương α_1 cách đều nhau một khoảng $d_1 = 0,106$ m, các gân theo phương α_2 cách đều nhau một khoảng $d_1 = 0,1857$ m. Kết quả tính tần số dao động không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm với các lưới chia phần tử khác nhau được trình bày trong Bảng 1.

Bảng 1. Sự hội tụ của tần số $\bar{\omega}$ của tấm sandwich FGM/FGP có gân gia cường

BCs	Lưới chia					
	6×6	10×10	14×14	18×18	20×20	22×22
SSSS	1,976	1,932	1,919	1,914	1,912	1,912
CCCC	3,550	3,391	3,350	3,333	3,326	3,326
SCSC	3,178	3,043	3,007	2,993	2,987	2,987

Từ bảng kết quả có thể nhận thấy rằng, với lưới chia thưa hơn tốc độ hội tụ nhanh hơn sau đó chậm dần với lưới chia dày, rồi hội tụ khi lưới chia là 22×22 phần tử. Lưới chia này sẽ được sử dụng để thực hiện các khảo sát tiếp theo.

b. So sánh dao động tấm đẳng hướng có gân gia cường xiên góc

Ví dụ kiểm chứng thứ hai được thực hiện với tấm đẳng hướng được gia cường bởi các gân xiên góc đẳng hướng. Tấm có kích thước và gia cường gân như ví dụ trên, các gân có kích thước mặt cắt ngang là $0,03 \times 0,03$ (m²). Kết quả tính toán tần số dao động tự do được so sánh với kết quả tính bằng Abaqus và phương pháp Pb2-Ritz được công bố bởi Phạm và cs. [29] trong Bảng 2. Từ kết quả so sánh có thể khẳng định mô hình thiết lập có tính chính xác trong tính toán tần số dao động của tấm có gân gia cường xiên góc.

Bảng 2. So sánh tần số dao động tự do của tấm đẳng hướng có gân gia cường xiên góc

BCs	Dạng dao động	Abaqus [29]	Pb2-Ritz [29]	Bài báo
SSSS	1	237,2	245,7	236,1
	2	505,9	508,1	484,9
	3	654,3	673,5	661,2
CCCC	1	432,2	430,9	423,9
	2	748,6	727,5	715,1
	3	955,7	962,3	963,7

c. So sánh tần số dao động tấm sandwich FGM

Trong ví dụ kiểm chứng thứ ba, đối tượng nghiên cứu là tấm sandwich với lớp mặt bằng vật liệu FGM và lõi đẳng hướng. Bảng 3 cung cấp kết quả tính toán tần số dao động không thứ nguyên $\bar{\omega}$ và so sánh với dữ liệu của Li và cs. [30], thu được từ lý thuyết đàn hồi ba chiều.

Bảng 3. So sánh tần số dao động cơ bản $\bar{\omega}$ của tấm sandwich FGM ($p_z = 1$)

h/a	Mô hình	SSSS		CCCC	
		[2-1-2]	[1-8-1]	[2-1-2]	[1-8-1]
0,01	[30]	1,3297	1,6991	2,4334	3,1138
	Bài báo	1,3337	1,7038	2,4392	3,1155
0,1	[30]	1,3018	1,6511	2,2905	2,8626
	Bài báo	1,3011	1,6527	2,2718	2,8504

Các kết quả ở Bảng 2 và Bảng 3 cho thấy độ chênh lệch rất nhỏ, qua đó khẳng định mô hình và chương trình tính toán được xây dựng có độ tin cậy cao. Trên cơ sở đó, các bài toán khảo sát sẽ được trình bày trong phần tiếp theo.

4.2. Phân tích dao động tấm sandwich FGM/FGP có gân gia cường

Trong mục này, tần số dao động của các tấm sandwich FGM/FGP chữ nhật có gân gia cường được nghiên cứu và thảo luận chi tiết. Trong các khảo sát, kích thước hình học của tấm và gân được lấy theo mục 4.1(a). Hai vật liệu thành phần là Al (metal) và Al_2O_3 (ceramic) có tính chất vật liệu được trình bày trong Bảng 4.

Bảng 4. Tính chất vật liệu của các vật liệu thành phần [30]

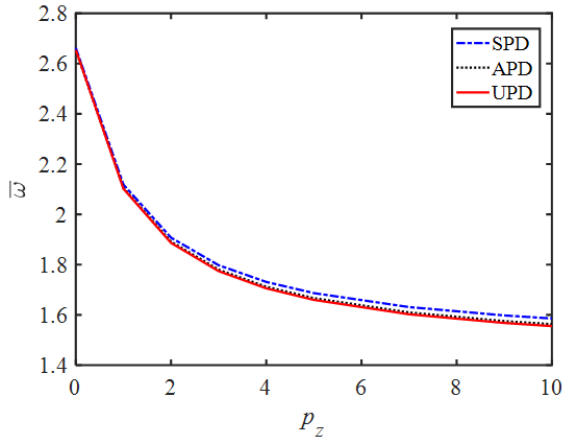
Material	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	ν
Al (metal)	70	2702	0,3
Al_2O_3 (ceramic)	380	3800	0,3

Công thức tần số không thứ nguyên được sử dụng như sau:

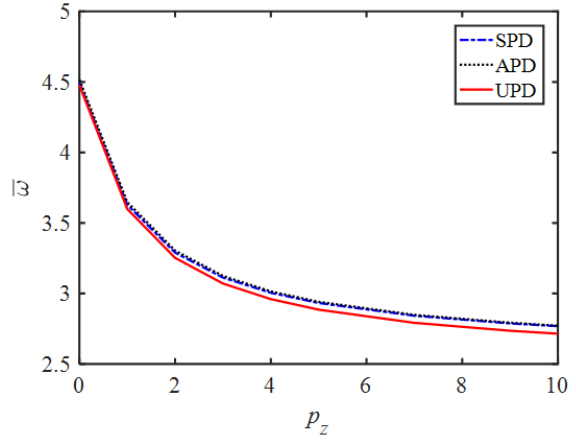
$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}} \quad (\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3, E_0 = 1 \text{ GPa}) \quad (19)$$

a. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích

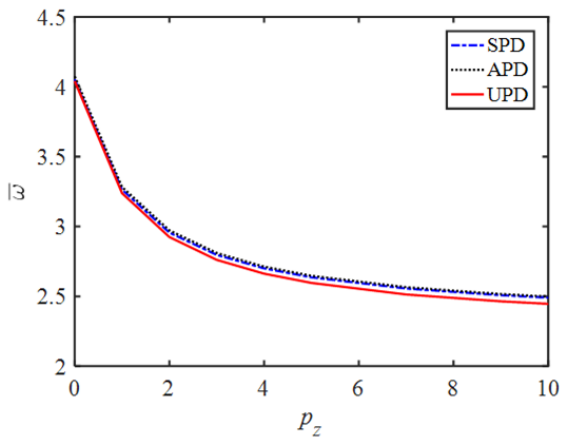
Kết quả thu được từ Bảng 5 và Hình 2 cho thấy, xét trong các điều kiện biên khác nhau, với ba dạng phân bố độ xốp của lớp lõi (SPD, APD, UPD) và các tỷ lệ chiều dày các lớp theo thứ tự: $h_f - h_c - h_f$ khác nhau ([1-0-1], [1-1-1], [1-3-1], [1-4-1], [1-8-1]), tần số dao động cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm có xu hướng giảm khi chỉ số tỷ lệ thể tích p_z tăng. Nguyên nhân là do khi p_z tăng, vật liệu lớp bề mặt FGM chuyển dần từ gốm thuần sang hỗn hợp giữa gốm và kim loại. Việc gia tăng thành phần kim loại có mô đun đàn hồi thấp hơn so với gốm sẽ làm giảm độ cứng tổng thể của tấm, dẫn đến tần số dao động thấp hơn.



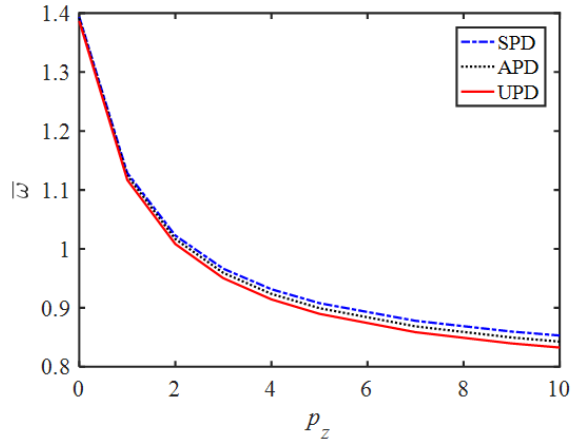
(a) SSSS



(b) CCCC



(c) SCSC



(d) SCSF

Hình 2. Ảnh hưởng của tham số p_z đến tần số dao động $\bar{\omega}$ của tấm sandwich FGM/FGP có gân gia cường xiên góc ($a/b = 1$; $a/h = 10$; $e_0 = 0,6$; [1-8-1])

b. Ảnh hưởng của lỗ rỗng

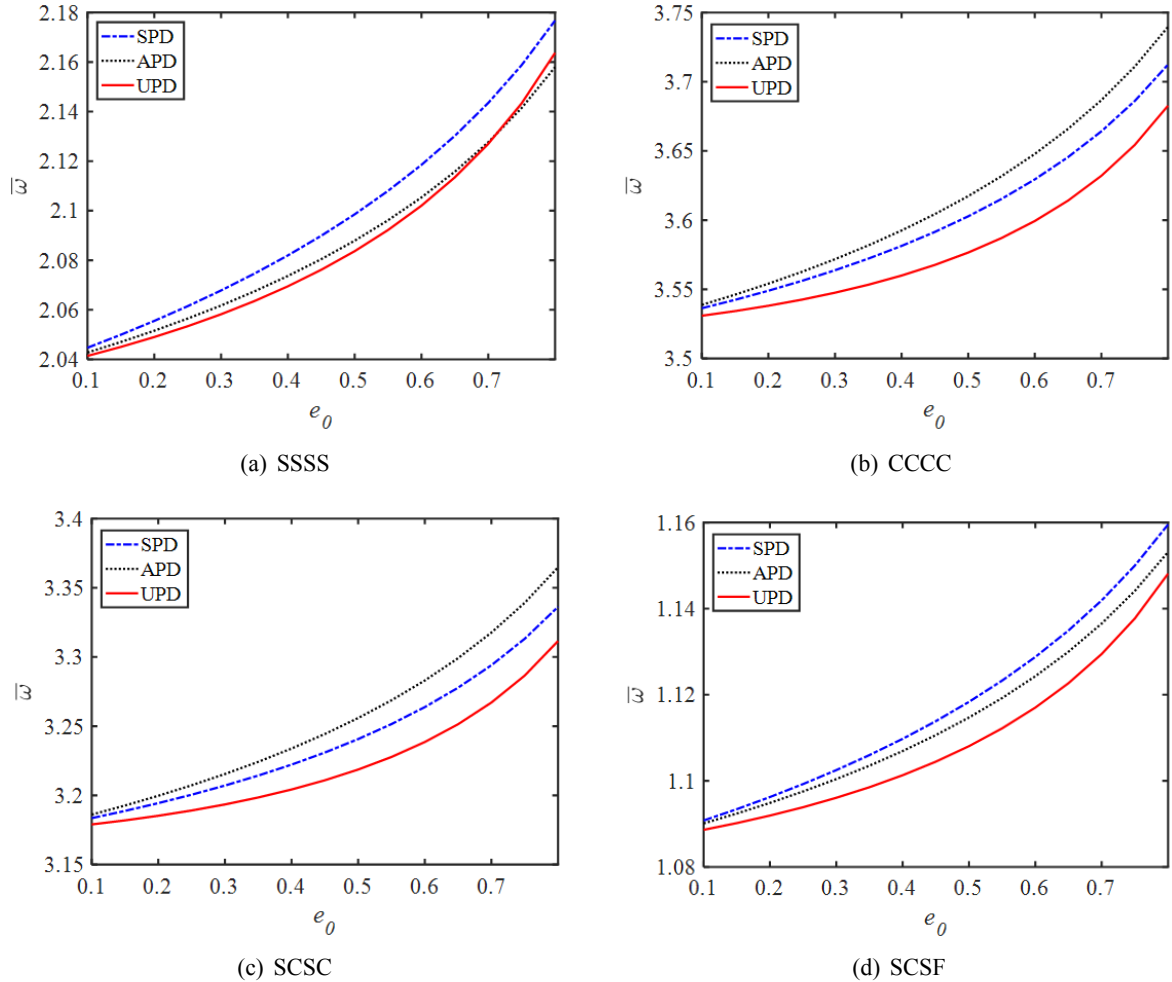
Hình 3 minh họa sự biến thiên tần số không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm sandwich FGM/FGP có gân gia cường xiên góc theo hệ số rỗng e_0 . Kết quả cho thấy, đối với cả bốn loại điều kiện biên được xét, tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ tăng dần khi e_0 tăng, áp dụng cho cả ba kiểu phân bố lỗ rỗng SPD, APD và UPD. Đáng chú ý, khi $e_0 < 0,7$, kiểu phân bố UPD luôn cho tần số nhỏ nhất dưới cả bốn điều

Bảng 5. Tần số không thứ nguyên cơ bản $\bar{\omega}$ của tấm FGM/FGP có gân gia cường xiên góc ($e_0 = 0,6$)

BC	Kiểu phân bố lỗ rỗng	p_z	[1-0-1]	[1-1-1]	[1-3-1]	[1-4-1]	[1-8-1]
SSSS	SPD	1	2,4236	2,4123	2,3092	2,2603	2,1185
		5	1,9547	1,8954	1,8027	1,7697	1,6869
		10	1,7685	1,7254	1,6625	1,6405	1,5859
	APD	1	2,4236	2,4119	2,3051	2,2542	2,1054
		5	1,9547	1,8948	1,7965	1,7603	1,6669
		10	1,7685	1,7246	1,6552	1,6295	1,5632
	UPD	1	2,4236	2,4157	2,3083	2,2560	2,1020
		5	1,9547	1,8974	1,7967	1,7588	1,6599
		10	1,7685	1,7268	1,6545	1,6270	1,5554
CCCC	SPD	1	4,2915	4,2306	4,0060	3,9073	3,6295
		5	3,4551	3,3323	3,1517	3,0888	2,9328
		10	3,1278	3,0377	2,9138	2,8715	2,7681
	APD	1	4,2915	4,2332	4,0146	3,9184	3,6479
		5	3,4551	3,3355	3,1591	3,0969	2,9410
		10	3,1278	3,0412	2,9208	2,8784	2,7723
	UPD	1	4,2915	4,2359	4,0034	3,8987	3,5994
		5	3,4551	3,3351	3,1402	3,0688	2,8854
		10	3,1278	3,0394	2,8988	2,8472	2,7152
SCSC	SPD	1	3,8405	3,7889	3,5932	3,5070	3,2638
		5	3,0843	2,9799	2,8247	2,7704	2,6359
		10	2,7973	2,7213	2,6155	2,5792	2,4906
	APD	1	3,8405	3,7914	3,6020	3,5183	3,2830
		5	3,0843	2,9830	2,8328	2,7799	2,6472
		10	2,7973	2,7248	2,6234	2,5878	2,4987
	UPD	1	3,8405	3,7936	3,5914	3,5000	3,2386
		5	3,0843	2,9824	2,8151	2,7536	2,5959
		10	2,7973	2,7229	2,6030	2,5589	2,4459
SCSF	SPD	1	1,3348	1,3215	1,2522	1,2203	1,1288
		5	1,0841	1,0440	0,9833	0,9618	0,9080
		10	0,9761	0,9460	0,9038	0,8892	0,8531
	APD	1	1,3348	1,3216	1,2513	1,2187	1,1243
		5	1,0841	1,0441	0,9814	0,9585	0,8995
		10	0,9761	0,9461	0,9013	0,8850	0,8428
	UPD	1	1,3348	1,3233	1,2509	1,2168	1,1170
		5	1,0841	1,0450	0,9790	0,9543	0,8899
		10	0,9761	0,9467	0,8982	0,8800	0,8327

kiện biên SSSS, CCCC, SCSC và SCSF. Hiện tượng này có thể được lý giải như sau: khi hệ số lỗ

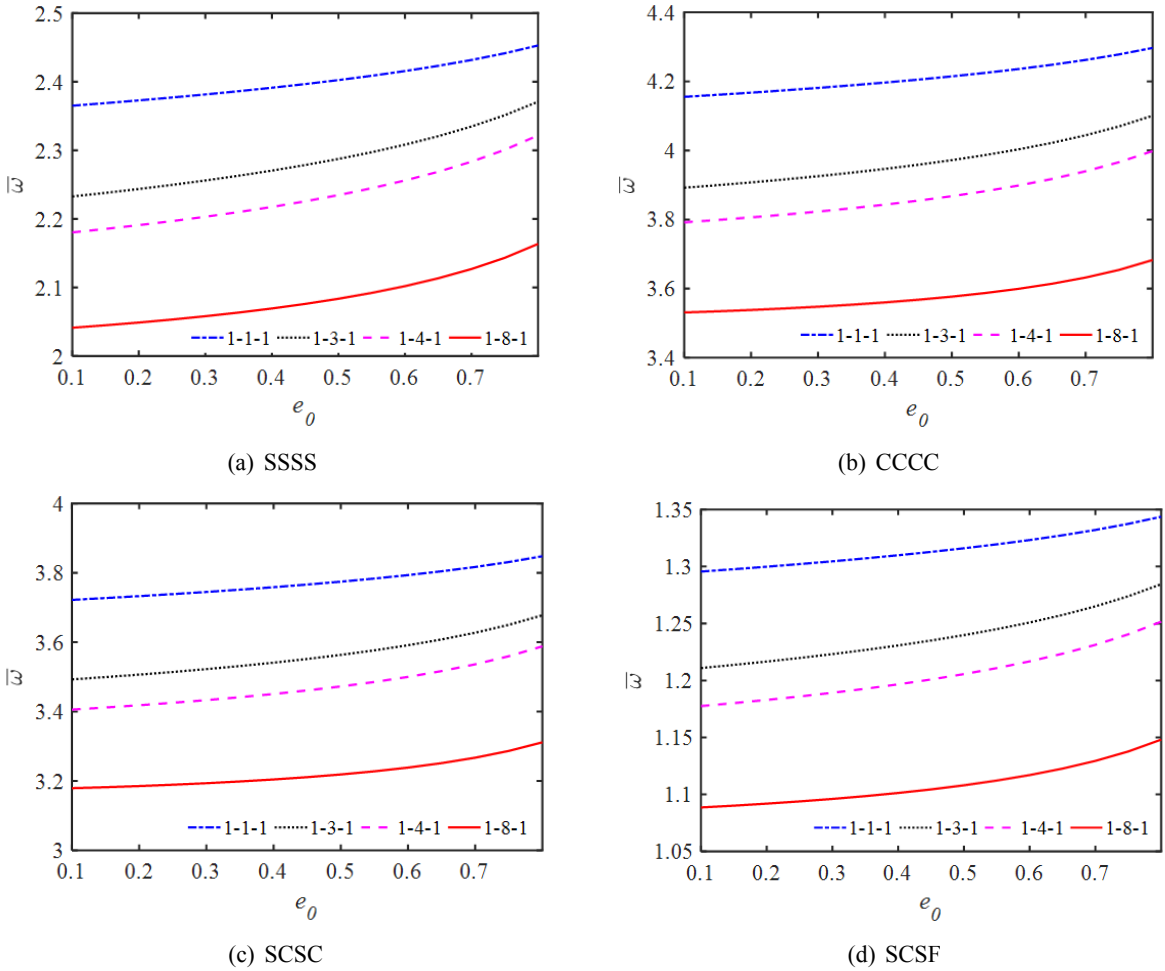
rỗng tăng, độ cứng của hệ giảm, dẫn đến tần số dao động giảm (hiệu ứng độ cứng). Tuy nhiên, đồng thời, khối lượng của hệ cũng giảm, điều này làm tăng tần số dao động (hiệu ứng khối lượng). Trong nghiên cứu này, lỗ rỗng chỉ xuất hiện trong lớp lõi, trong khi hai lớp bề mặt và các gân gia cường được làm bằng FGM. Khi hệ số lỗ rỗng trong lớp lõi tăng, tần số dao động của hệ tăng có thể là do hiệu ứng khối lượng chiếm ưu thế so với hiệu ứng độ cứng. Về tần số lớn nhất, kết quả phụ thuộc vào điều kiện biên: kiểu phân bố SPD đạt giá trị cao nhất khi điều kiện biên có mức độ ràng buộc thấp (SSSS, SCSF), trong khi kiểu phân bố APD cho kết quả vượt trội khi điều kiện biên có mức độ ràng buộc cao hơn (CCCC, SCSC).



Hình 3. Ảnh hưởng của tham số e_0 đến tần số dao động riêng không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm sandwich FGM/FGP có gân gia cường xiên góc ($a/b = 1$; $a/h = 10$; $p_z = 1$; [1-8-1])

c. Ảnh hưởng của tỷ số chiều dày

Hình 4 trình bày ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dày các lớp cấu tạo đến tần số dao động riêng không thứ nguyên của tấm sandwich FGM/FGP có gân gia cường xiên góc. Bốn trường hợp được xét với tỷ lệ chiều dày các lớp mặt - lõi - mặt ($h_f - h_c - h_f$) lần lượt là: [1-1-1], [1-3-1], [1-4-1] và [1-8-1]. Kết quả cho thấy khi chiều dày lớp lõi tăng, tần số dao động giảm đáng kể. Hiện tượng này có thể giải thích bằng cơ sở cơ học: lớp lõi thường làm bằng vật liệu rỗng có độ cứng thấp, nên khi tỷ số h_c/h_f



Hình 4. Ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dày các lớp đến tần số dao động riêng không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm sandwich FGM/FGP có gân gia cường xiên góc ($a/b = 1$; $a/h = 10$; $p_z = 1$; $e_0 = 0,6$)

tăng, độ cứng tổng thể của tấm giảm, dẫn đến khả năng chống biến dạng kém hơn và do đó làm giảm tần số dao động riêng. Điều này nhấn mạnh vai trò quan trọng của việc lựa chọn tỷ lệ lớp hợp lý để đảm bảo cả độ nhẹ và độ cứng cho kết cấu sandwich.

d. Ảnh hưởng của góc đặt gân gia cường

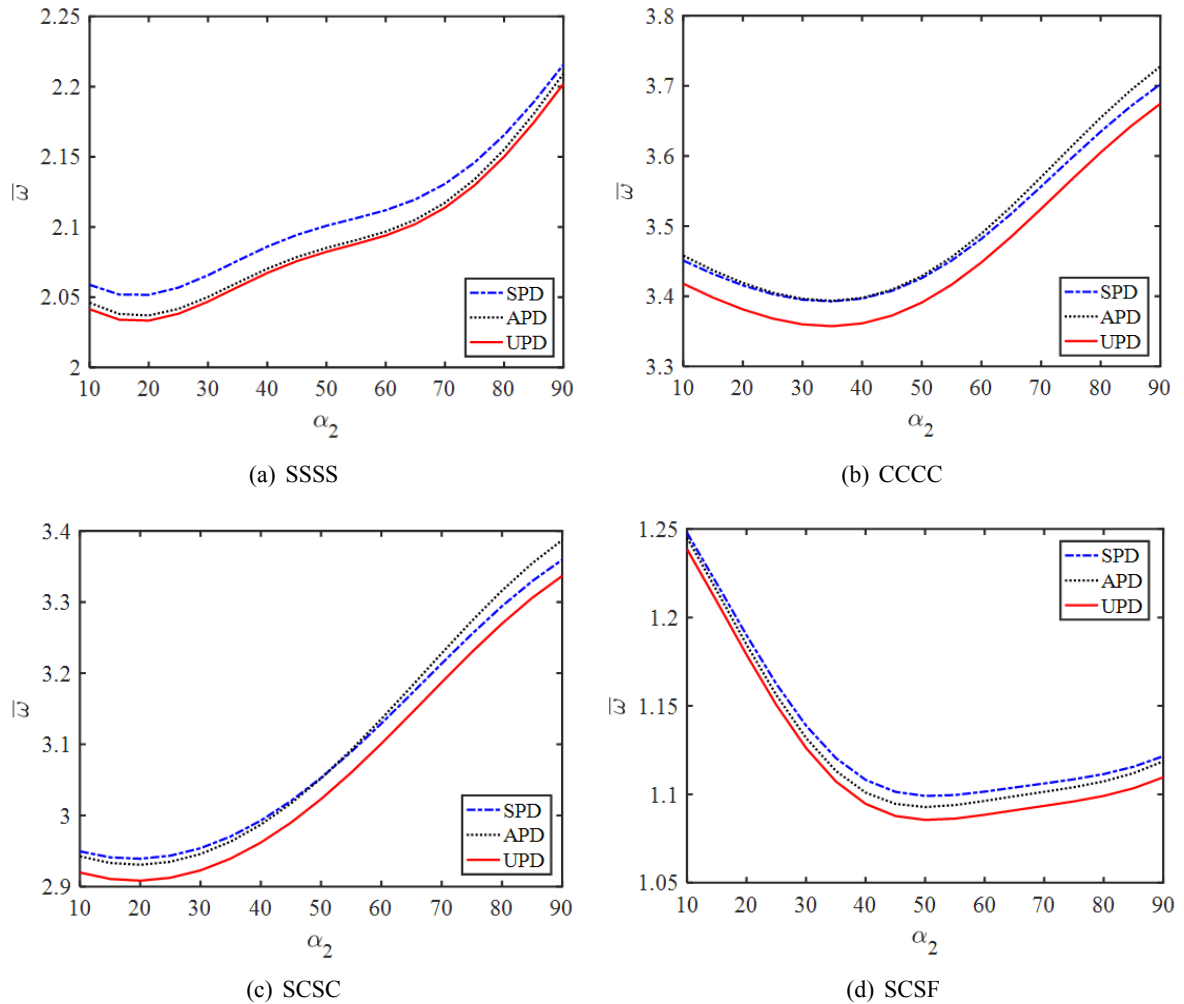
Trong khảo sát này, hướng thanh gia cường thứ nhất được cố định tại $\alpha_1 = 45^\circ$, trong khi góc đặt thanh gia cường thứ hai α_2 được thay đổi trong khoảng từ 10° đến 90° . Kết quả thể hiện ở Bảng 6 và Hình 5 cho thấy, đối với ba loại điều kiện biên SSSS, CCCC và SCSC, tần số dao động không thứ nguyên $\bar{\omega}$ có xu hướng tăng khi góc α_2 tăng. Ngược lại, với điều kiện biên SCSF, tần số $\bar{\omega}$ lại giảm khi α_2 tăng. Điều này cho thấy sự phân bố góc của các thanh gia cường ảnh hưởng rõ rệt đến độ cứng uốn tổng thể của tấm, từ đó chi phối tần số dao động. Đặc biệt, trong miền khảo sát có thể xác định được các giá trị cực tiểu và cực đại của tần số tương ứng với những góc α_2 nhất định, cung cấp cơ sở hữu ích cho việc tối ưu hóa thiết kế kết cấu.

4.3. Tối ưu tấm sandwich FGM/FGP có gân gia cường

Trong phần này, thuật toán tối ưu Rao-3 được sử dụng để thực hiện tối ưu tấm sandwich FGM/FGP được gia cường bởi các gân FGM đặt xiên góc. Tấm được cố định chiều dài là 1,2 m, chiều rộng là

Bảng 6. Tần số không thứ nguyên cơ bản $\bar{\omega}$ của tấm FGM/FGP có gân gia cường xiên góc ($a = 1,2$ m; $b = 1$ m; $[1-4-1]$; $p_z = 1$; $e_0 = 0,6$, $\alpha_1 = 45^\circ$)

BCs	Kiểu phân bố lỗ rỗng	Tần số	Góc đặt gân α_2					
			15°	30°	45°	60°	75°	90°
SSSS	SPD	$\bar{\omega}_1$	2,0519	2,0657	2,0944	2,1120	2,1460	2,2156
		$\bar{\omega}_2$	4,3796	4,2636	4,1903	4,1398	4,1457	4,2573
		$\bar{\omega}_3$	5,1819	5,2422	5,3562	5,5193	5,7145	5,8821
	APD	$\bar{\omega}_1$	2,0381	2,0502	2,0786	2,0967	2,1340	2,2092
		$\bar{\omega}_2$	4,3680	4,2405	4,1619	4,1121	4,1244	4,2483
		$\bar{\omega}_3$						



Hình 5. Ảnh hưởng của góc đặt gân đến tần số dao động riêng không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm sandwich FGM/FGP có gân gia cường xiên góc ($\alpha_1 = 45^\circ$; $a/b = 1$; $a/h = 10$; $p_z = 1$; $e_0 = 0,6$)

1m và chiều dày là 0,05 m. Các gân gia cường có mặt cắt ngang là hình chữ nhật có chiều rộng là $b^g = 0,03$ m, chiều cao gân là $h^g = 0,04$ m.

Kết quả tối ưu được trình bày trong Bảng 7. Từ kết quả có thể nhận thấy rằng để đạt được tần số

BCs	Kiểu phân bố lỗ rỗng	Tần số	Góc đặt gân α_2					
			15°	30°	45°	60°	75°	90°
CCCC	UPD	$\bar{\omega}_3$	5,1987	5,2563	5,3735	5,5486	5,7621	5,9453
		$\bar{\omega}_1$	2,0340	2,0469	2,0757	2,0940	2,1297	2,2019
		$\bar{\omega}_2$	4,3327	4,2140	4,1403	4,0913	4,1004	4,2169
		$\bar{\omega}_3$	5,1346	5,1934	5,3072	5,4721	5,6710	5,8425
	SPD	$\bar{\omega}_1$	3,4318	3,3951	3,4077	3,4820	3,5961	3,7024
		$\bar{\omega}_2$	6,2191	6,0017	5,8530	5,8056	5,8497	5,9652
		$\bar{\omega}_3$	7,2382	7,2532	7,3827	7,6608	7,9937	8,2257
	APD	$\bar{\omega}_1$	3,4370	3,3964	3,4094	3,4894	3,6128	3,7278
		$\bar{\omega}_2$	6,2207	5,9899	5,8341	5,7879	5,8400	5,9681
		$\bar{\omega}_3$	7,2562	7,2666	7,4010	7,6980	8,0553	8,3045
	UPD	$\bar{\omega}_1$	3,3981	3,3599	3,3725	3,4484	3,5654	3,6747
		$\bar{\omega}_2$	6,1582	5,9368	5,7865	5,7402	5,7874	5,9075
		$\bar{\omega}_3$	7,1712	7,1837	7,3135	7,5968	7,9371	8,1747
SCSC	SPD	$\bar{\omega}_1$	2,9411	2,9540	3,0204	3,1293	3,2551	3,3596
		$\bar{\omega}_2$	5,0203	4,8838	4,8153	4,7998	4,8346	4,9387
		$\bar{\omega}_3$	6,8912	6,9457	7,1279	7,4457	7,6787	7,8253
	APD	$\bar{\omega}_1$	2,9332	2,9458	3,0169	3,1357	3,2734	3,3872
		$\bar{\omega}_2$	5,0209	4,8734	4,8019	4,7898	4,8327	4,9492
		$\bar{\omega}_3$	6,8862	6,9417	7,1354	7,4779	7,6371	7,8000
	UPD	$\bar{\omega}_1$	2,9107	2,9228	2,9899	3,1010	3,2297	3,3369
		$\bar{\omega}_2$	4,9724	4,8316	4,7619	4,7479	4,7856	4,8940
		$\bar{\omega}_3$	6,8200	6,8743	7,0590	7,3833	7,5875	7,7402
SCSF	SPD	$\bar{\omega}_1$	1,2192	1,1388	1,1014	1,1016	1,1085	1,1216
		$\bar{\omega}_2$	3,1069	2,9768	2,9148	2,9365	2,9817	3,0203
		$\bar{\omega}_3$	3,8434	3,7053	3,6280	3,6320	3,6959	3,7780
	APD	$\bar{\omega}_1$	1,2151	1,1319	1,0946	1,0963	1,1041	1,1187
		$\bar{\omega}_2$	3,0922	2,9518	2,8855	2,9096	2,9583	3,0011
		$\bar{\omega}_3$	3,8732	3,7238	3,6418	3,6502	3,7235	3,8140
	UPD	$\bar{\omega}_1$	1,2091	1,1262	1,0878	1,0885	1,0960	1,1096
		$\bar{\omega}_2$	3,0701	2,9360	2,8720	2,8946	2,9410	2,9809
		$\bar{\omega}_3$	3,8154	3,6738	3,5950	3,6003	3,6668	3,7514

lớn nhất thì lớp hai lớp bề mặt luôn là gồm ($p_z = 10$, cực đại trong khoảng giá trị xem xét, có thể coi như lớp bề mặt được làm hoàn toàn từ gồm), lớp lõi có hệ số rỗng cực đại ($e_0 = 0,8$) và phân bố đều

Bảng 7. Kết quả tối ưu tấm sandwich FGM/FGP có gân gia cường

Điều kiện biên	Biến thiết kế						Tần số dao động		
	p_z	e_0	p_D	h_c/h	$\alpha_1(^{\circ})$	$\alpha_2(^{\circ})$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
SSSS	0	0,8	UD	0,5316	90	51,19	3,1174	5,6190	8,6613
CCCC	0	0,8	UD	0,4508	90	0	5,4735	9,1679	12,021
SCSC	0	0,8	UD	0,3199	90	90	5,0889	6,5081	9,8193
SCSF	0	0,8	UD	0,5687	0	0	1,9756	3,8711	6,1213

(UPD). Tuy nhiên, giá trị tối ưu của các biến như tỷ lệ chiều dày giữa lớp lõi và chiều dày tấm h_c/h và các góc đặt gân α_i lại phụ thuộc và điều kiện biên. Bảng kết quả cũng cho thấy việc tối ưu hóa bằng thuật toán Rao-3 làm tăng đáng kể tần số dao động của tấm so với trường hợp các thông số được thiết lập chủ quan, chưa được tối ưu (Bảng 6). Kết quả tính toán cho thấy tần số cơ bản của tấm có gân sau tối ưu tăng từ 30% đến 60%, tùy thuộc vào điều kiện biên. Việc các tần số bậc hai và bậc ba cũng tăng theo khẳng định hiệu quả của quá trình tối ưu dựa trên tần số cơ bản, đồng thời chứng minh rằng không xảy ra hiện tượng chuyển dạng dao động.

5. Kết luận

Nghiên cứu này đã xây dựng thành công một mô hình phần tử hữu hạn để phân tích và tối ưu hóa tấm sandwich FGM có gân gia cường xiên góc. Mô hình được xây dựng dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất của Mindlin kết hợp với thuật toán Rao-3 và được kiểm chứng kỹ lưỡng, cho thấy độ chính xác và tin cậy cao. Từ các kết quả nhận được, có thể rút ra các kết luận như sau:

- Tần số dao động có xu hướng giảm khi chỉ số tỷ lệ thể tích p_z tăng. Điều này là do thành phần kim loại có mô đun đàn hồi thấp hơn làm giảm độ cứng tổng thể. Ngược lại, việc tăng hệ số lỗ rỗng e_0 lại giúp tăng tần số dao động. Ngoài ra, tỷ lệ chiều dày lớp lõi cũng đóng vai trò quan trọng; khi lớp lõi càng dày, tần số dao động càng giảm.

- Góc đặt gân ảnh hưởng đáng kể đến độ cứng uốn và tần số dao động của tấm. Các khảo sát cho thấy tần số có thể tăng hoặc giảm tùy thuộc vào góc đặt và điều kiện biên, qua đó nhấn mạnh vai trò của việc tối ưu hóa hình học gân để đạt được hiệu suất cao nhất.

- Thuật toán Rao-3 được áp dụng hiệu quả trong việc tìm kiếm cấu hình thiết kế tối ưu. Kết quả cho thấy để đạt được tần số dao động lớn nhất, hai lớp bề mặt của tấm nên được cấu tạo gần như hoàn toàn từ vật liệu gốm, lớp lõi xếp nên có hệ số độ rỗng cực đại và phân bố đều, trong khi tỷ lệ chiều dày và góc đặt gân gia cường phụ thuộc chặt chẽ vào điều kiện biên. Tần số dao động và độ cứng của tấm đã tối ưu tăng lên đáng kể so với tấm chưa được tối ưu.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2023.20.

Tài liệu tham khảo

- [1] Singh, P., Sheikh, J., Behera, B. (2024). [Metal-faced sandwich composite panels: A review](#). *Thin-Walled Structures*, 195:111376.
- [2] Pandey, S., Pradyumna, S. (2018). [Analysis of functionally graded sandwich plates using a higher-order layerwise theory](#). *Composites Part B: Engineering*, 153:325–336.
- [3] Wahl, L., Maas, S., Waldmann, D., Zürbes, A., Frères, P. (2012). [Shear stresses in honeycomb sandwich plates: Analytical solution, finite element method and experimental verification](#). *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 14(4):449–468.

- [4] Hùng, Đ. X., Thâm, V. V., Quốc, T. H., Phommavongsa, S. (2023). [Phân tích dao động riêng kết cấu tấm Sandwich Auxetic áp điện có cơ tính biến thiên](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCHXD) - ĐHXDHN*, 17(2V):42–60.
- [5] Rejab, M. R. M., Cantwell, W. J. (2013). [The mechanical behaviour of corrugated-core sandwich panels](#). *Composites Part B: Engineering*, 47:267–277.
- [6] Guo, Z., Liu, C., Li, F. (2019). [Vibration analysis of sandwich plates with lattice truss core](#). *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(5):424–429.
- [7] Rajaneesh, A., Sridhar, I., Rajendran, S. (2012). [Impact modeling of foam cored sandwich plates with ductile or brittle faceplates](#). *Composite Structures*, 94(5):1745–1754.
- [8] Yuan, W. X., Dawe, D. J. (2004). [Free vibration and stability analysis of stiffened sandwich plates](#). *Composite Structures*, 63(1):123–137.
- [9] Zhang, D., Zheng, X., Jiang, Y., Wu, Z., Xu, J., Yan, L. (2024). [A refined stiffened plate element for stability analysis of the stiffened sandwich structures](#). *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 31(16):3740–3755.
- [10] Pramanik, S., Das, S., Niyogi, A. G. (2021). [Free vibration and buckling analysis of stiffened sandwich plates with repeated fold](#). *Journal of The Institution of Engineers (India): Series C*, 102(1):87–98.
- [11] Nguyen-Thoi, T., Bui-Xuan, T., Phung-Van, P., Nguyen-Xuan, H., Ngo-Thanh, P. (2013). [Static, free vibration and buckling analyses of stiffened plates by CS-FEM-DSG3 using triangular elements](#). *Computers & Structures*, 125:100–113.
- [12] Shi, P., Kapania, R., Dong, C. (2015). [Vibration and buckling analysis of curvilinearly stiffened plates using finite element method](#). *AIAA Journal*, 53(5):1319–1335.
- [13] Rikards, R., Chate, A., Ozolinsh, O. (2001). [Analysis for buckling and vibrations of composite stiffened shells and plates](#). *Composite Structures*, 51(4):361–370.
- [14] Luan, Y., Ohlrich, M., Jacobsen, F. (2011). [Improvements of the smearing technique for cross-stiffened thin rectangular plates](#). *Journal of Sound and Vibration*, 330(17):4274–4286.
- [15] Vu, V.-T., Tran, H.-Q. (2024). [Free vibration characteristics of stiffened sandwich plates with auxetic core and functionally graded piezoelectric face sheet](#). *Acta Mechanica*, 235(6):4029–4056.
- [16] Pham, T.-T., Tran, H.-Q., Tran, M.-T., Nguyen, H.-N., Vu, V.-T. (2025). [Vibration behavior of stiffened functionally graded porous sandwich plates with a magneto-electro-elastic face resting on an elastic foundation under hygrothermal, electrical, and magnetic fields](#). *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1–41.
- [17] Wodesenbet, E., Kidane, S., Pang, S.-S. (2003). [Optimization for buckling loads of grid stiffened composite panels](#). *Composite Structures*, 60(2):159–169.
- [18] Tran, M.-T., Pham, H.-A., Nguyen, V.-L., Trinh, A.-T. (2017). [Optimisation of stiffeners for maximum fundamental frequency of cross-ply laminated cylindrical panels using social group optimisation and smeared stiffener method](#). *Thin-Walled Structures*, 120:172–179.
- [19] Duc, N. D., Nam, V. H., Cuong, N. H. (2020). [Nonlinear postbuckling of eccentrically oblique-stiffened functionally graded doubly curved shallow shells based on improved Donnell equations](#). *Mechanics of Composite Materials*, 55(6):727–742.
- [20] Quan, T. Q., Cuong, N. H., Duc, N. D. (2019). [Nonlinear buckling and post-buckling of eccentrically oblique stiffened sandwich functionally graded double curved shallow shells](#). *Aerospace Science and Technology*, 90:169–180.
- [21] Dong, D. T., Nam, V. H., Trung, N. T., Phuong, N. T., Hung, V. T. (2022). [Nonlinear thermomechanical buckling of sandwich FGM oblique stiffened plates with nonlinear effect of elastic foundation](#). *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 35(10):1441–1467.
- [22] Cong, P. H., Quyet, P. K., Duc, N. D. (2021). [Effects of lattice stiffeners and blast load on nonlinear dynamic response and vibration of auxetic honeycomb plates](#). *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 235(23):7192–7211.
- [23] Farsadi, T., Ahmadi, M., Jiffri, S., Khodaparast, H. H., Kurtaran, H., Friswell, M. I., Fichera, S. (2025). [Fundamental frequency optimization of variable stiffness Multi-Region composite panels in Presence of geometrical nonlinearity](#). *Mechanical Systems and Signal Processing*, 237:112972.

- [24] Alshabat, N. T., Naghshineh, K. (2012). [Optimization of the natural frequencies of plates via dimpling and beading techniques](#). *International Journal of Modelling and Simulation*, 32(4):244–254.
- [25] Pham, H.-A., Tran, H.-Q., Tran, M.-T., Nguyen, V.-L., Huong, Q.-T. (2022). [Free vibration analysis and optimization of doubly-curved stiffened sandwich shells with functionally graded skins and auxetic honeycomb core layer](#). *Thin-Walled Structures*, 179:109571.
- [26] Reddy, J. N. (2003). *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press.
- [27] Reddy, B. D. (1998). [The finite element method](#). *Introductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*, Springer, 363–409.
- [28] Rao, R. V. (2020). [Rao algorithms: Three metaphor-less simple algorithms for solving optimization problems](#). *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 11(1):107–130.
- [29] Pham, T.-T., Tran, H.-Q., Nguyen, V.-L., Le, K.-H., Tran, M.-T. (2025). [Free and forced vibration of functionally graded porous sandwich plates reinforced by arbitrarily oblique stiffeners](#). *Thin-Walled Structures*, 210:113039.
- [30] Li, Q., Iu, V. P., Kou, K. P. (2008). [Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates](#). *Journal of Sound and Vibration*, 311(1–2):498–515.

Phụ lục

- Các hàm dạng:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \zeta) (1 - \eta); & N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \zeta) (1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \zeta) (1 + \eta); & N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \zeta) (1 + \eta) \end{aligned}$$

- Các ma trận độ cứng vật liệu:

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}; & [B] &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \\ [D] &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & C_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}; & [A_c] &= \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

trong đó:

$$\begin{aligned} (A_{11}, B_{11}, D_{11}) &= \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} (1, z, z^2) C_{11}^k dz + \sum_{i=1}^n \frac{b_i^s}{d_i} \int_{z_0}^{z_1} (1, z, z^2) \bar{C}_{11} dz \\ (A_{12}, B_{12}, D_{12}) &= \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} (1, z, z^2) C_{12}^k dz + \sum_{i=1}^n \frac{b_i^s}{d_i} \int_{z_0}^{z_1} (1, z, z^2) \bar{C}_{12} dz \\ (A_{16}, B_{16}, D_{16}) &= \sum_{i=1}^n \frac{b_i^s}{d_i} \int_{z_0}^{z_1} (1, z, z^2) \bar{C}_{16} dz; & (A_{26}, B_{26}, D_{26}) &= \sum_{i=1}^n \frac{b_i^s}{d_i} \int_{z_0}^{z_1} (1, z, z^2) \bar{C}_{26} dz \\ [D_e] &= \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{bmatrix}; & [B_e] &= \begin{bmatrix} B_{m1} & B_{m3} & B_{m3} & B_{m4} \\ B_{\beta 1} & B_{\beta 2} & B_{\beta 3} & B_{\beta 4} \\ B_{c1} & B_{c2} & B_{c3} & B_{c4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [B_{mi}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [B_{\beta i}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial \zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \\
 [B_{ci}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & N_i \end{bmatrix}; \quad [N] = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix} \\
 [I] &= \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}; \quad I_j = \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho(z) z^j dz + \sum_{i=1}^n \frac{b_i^g}{d_i^g} \int_{z_0}^{z_1} \rho(z) z^j dz
 \end{aligned}$$