

DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA DẦM MICRO BẰNG VẬT LIỆU CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN THEO LÝ THUYẾT CẶP ỨNG SUẤT SỬA ĐỔI

Vũ Hoàng Anh^a, Nguyễn Sỹ Nam^b, Trần Văn Liên^{b,*}

^aCông ty Trách nhiệm hữu hạn Tư vấn Đại học Xây dựng, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, số 55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam

^bKhoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, số 55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 11/9/2025, Sửa xong 21/10/2025, Chấp nhận đăng 18/11/2025

Tóm tắt

Bài báo phân tích dao động tự do của các dầm vi mô làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) đặt trên nền đàn hồi Winkler–Pasternak dựa trên lý thuyết dầm Timoshenko và lý thuyết cặp ứng suất sửa đổi có xét đến hiệu ứng kích thước. Các đặc tính vật liệu dầm thay đổi theo chiều cao dầm theo quy luật phân bố lũy thừa và được đồng nhất hóa bằng kỹ thuật Mori–Tanaka. Một mô hình phần tử hữu hạn phụ thuộc kích thước với các hàm dạng phi cổ điển mới được đề xuất, từ đó thu được các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của dầm Timoshenko vi mô bằng FGM. Ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước, tham số vật liệu, hình học và điều kiện biên đến tần số dao động riêng và dạng dao động được phân tích. Kết quả nghiên cứu này có thể áp dụng cho các loại vật liệu FGM khác cũng như các kết cấu dầm vi mô phức tạp hơn.

Từ khóa: dầm micro FGM; MCST; hàm dạng phi cổ điển; tần số dao động; dạng dao động riêng.

FREE VIBRATIONS OF FGM MICROBEAMS BASED ON THE MODIFIED COUPLE STRESS THEORY

Abstract

The paper analyzes the free vibration of microbeams made of functionally graded material (FGM) resting on a Winkler–Pasternak elastic foundation, based on Timoshenko beam theory and the modified couple stress theory considering the size effect. The material properties of the beam, which vary along its thickness according to a power law distribution, are homogenized using the Mori–Tanaka technique. A size-dependent finite element model with new non-classical shape functions is proposed to derive the stiffness and mass matrices of FGM Timoshenko microbeams. The effects of size dependency, material parameters, geometry, and boundary conditions on natural frequencies and mode shapes are analyzed. The results of this study can be applied to other types of FGMs as well as more complex microbeam structures

Keywords: FGM microbeam; MCST; non-classical shape functions; natural frequency; mode shape.

[https://doi.org/10.31814/stee.huce2025-19\(4V\)-04](https://doi.org/10.31814/stee.huce2025-19(4V)-04) © 2025 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Mở đầu

Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) là một loại vật liệu composite thể hệ mới với các đặc tính cơ - nhiệt độ dao nên chúng được ứng dụng nhiều trong hệ thống vi cơ điện tử (MEMS), trong các ngành hàng không, sinh học, công nghệ kỹ thuật cao, ... Các kết cấu vi mô như dầm, tấm là các cấu kiện cơ bản, quan trọng, được sử dụng rộng rãi trong các thiết bị. Vì thế, các kết cấu làm từ FGM ngày càng thu hút nhiều sự chú ý của các nghiên cứu trong và ngoài nước.

Các lý thuyết đàn hồi phi cổ điển đã cung cấp lời giải thỏa đáng cho các kết cấu vi mô do xét đến hiệu ứng kích thước ở cấp độ micro/nano. Trong đó lý thuyết cặp ứng suất sửa đổi (MCST), chỉ sử dụng một tham số chiều dài vật liệu để biểu diễn ứng xử kết cấu vi mô đã được nhiều tác giả lựa chọn để phân tích các kết cấu micro.

Các phân tích độ bền, dao động riêng, dao động cưỡng bức và ổn định của dầm micro FGM đã được nhiều tác giả nghiên cứu, từ đó đã thiết lập các phương trình cơ bản theo các lý thuyết dầm Euler Bernouli, dầm Timoshenko, biến dạng trượt bậc cao, ... phụ thuộc vào tham số kích thước. Đã có nhiều công trình [1–14] nghiên cứu ứng xử uốn tĩnh và dao động riêng của dầm vi mô FGM dùng lý thuyết MCST. Nateghi và Salamat-talab [15], Babei và cs. [16], Jalali và cs. [17] đã nghiên cứu ảnh

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: lientv@huce.edu.vn (Liên, T. V.)

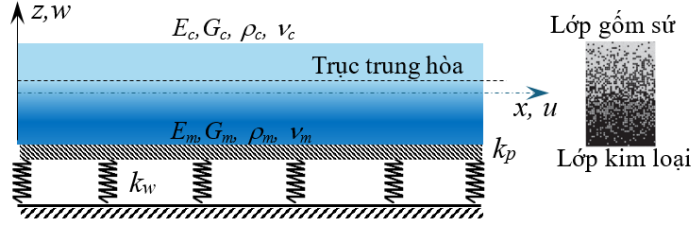
hưởng của nhiệt độ đến hiện tượng ổn định và dao động riêng của dầm vi mô FGM. Kliewer và Glisic [18] đã phân tích uốn và dao động riêng của dầm vi mô FGM có vật liệu áp điện. Arbind và Reddy [19] đã so sánh độ võng phi tuyến của dầm FG phụ thuộc vào cấu trúc vi mô sử dụng lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và lý thuyết dầm Timoshenko (TBT). Lu và cs. [20] đã nghiên cứu hiện tượng sau ổn định của ống vi mô composite nhiều lớp gia cường graphene có chứa sai lệch hình học ban đầu dựa trên lý thuyết dầm bậc cao có hiệu chỉnh. Ke và Wang [21], Li và Ke [22] đã khảo sát ổn định động của dầm vi mô FGM theo TBT bằng phương pháp cầu phương vi phân. Mollamahmutoğlu và Mercan [23] đã khảo sát dao động phi tuyến của dầm FGM vi mô tiết diện thay đổi dọc trục với các điều kiện biên tổng quát. Chen và cs. [24] đã nghiên cứu dao động riêng, mất ổn định và sau mất ổn định động của dầm vi mô FGM hai chiều nằm trong môi trường đàn hồi. Sheng và Wang [25] đã nghiên cứu dao động cưỡng bức phi tuyến của dầm vi mô FGM nguyên vẹn theo MCST chịu tải trọng ngang theo mô hình cản Kelvin–Voigt. Peng và cs. [26] đã nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước cho các dầm vi mô FGM dạng sandwich kết hợp mô hình dẫn nhiệt pha trễ kép phi cổ điển, mô hình đàn hồi phi cổ điển, lý thuyết đàn hồi bề mặt và MCST. Attia và cs. [27] đã phân tích đáp ứng động của dầm vi mô FGM 2 chiều chịu tải trọng điều hòa chuyển động trong môi trường nhiệt bằng phương pháp giải tích Laplace, trong khi hầu hết các nghiên cứu khác sử dụng phương pháp PTHH. Akbas [28] đã phân tích dao động cưỡng bức của dầm vi mô FGM có cản theo mô hình Kelvin–Voigt và sử dụng các hàm dạng Charkraborty [29] nhằm tránh hiện tượng khóa cứng. Cũng sử dụng các hàm dạng trên, Liu và cs. [30] đã nghiên cứu phản ứng động của dầm vi mô FG 2D chịu tải trọng điều hòa di động có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ. Kahrobaiyan và cs. [31] đã phát triển một mô hình phần tử hữu hạn (FEM) cho dầm vi mô đồng nhất, trong đó các hàm dạng được dẫn xuất từ việc giải phương trình cơ bản cho dầm vi mô đồng nhất theo MCST. Sử dụng các hàm dạng này, Zhang và Liu [32] đã nghiên cứu phản ứng động của dầm vi mô FGM hai chiều có lỗ xộp chịu tải trọng di động bằng FEM với hàm dạng trên. Esen và cs. [33] đã khảo sát phản ứng động của dầm vi mô có lỗ dưới tác động của khối lượng/tải trọng di động. Tuy nhiên, Dehrouyeh-Semnani và Bahrami [34] đã chứng minh rằng dạng hiện của ma trận độ cứng do Kahrobaiyan đề xuất là không chính xác. Ở Việt Nam cũng đã có những nghiên cứu về dầm FGM như Ninh và Kiên [35] đã nghiên cứu ảnh hưởng của tham số kích thước lên hệ số động lực học của dầm micro chịu khối lượng di động. Kế và cs. [36] đã phân tích dao động riêng của dầm nano cong FG nằm trên nền đàn hồi sử dụng phương pháp Rayleigh–Ritz. Hà và Liên [37] đã nghiên cứu ảnh hưởng của mô hình giảm chấn đến phản ứng động của các dầm vi mô FGM có vết nứt đặt trên nền đàn hồi chịu tải trọng di động.

Qua các nghiên cứu trên, ta nhận thấy rằng FEM được nhiều tác giả chọn làm công cụ để nghiên cứu ứng xử tĩnh, dao động và ổn định của dầm micro. Tuy vậy, khi áp dụng FEM, các tác giả đều sử dụng các hàm dạng của phần tử dầm macro thông thường như hàm dạng Hermitte cho dầm Euler, hàm dạng Kosmatka cho dầm TBT hay hàm dạng Charkraborty cho dầm composite. Đối với dầm TBT micro, Kahrobaiyan và cs. [31] và Dehrouyeh-Semnani và Bahrami [34] đã xây dựng các hàm dạng từ nghiệm của bài toán tĩnh cho dầm TBT micro đồng nhất. Các hàm dạng này đều là được rút ra từ nghiệm chính xác của bài toán tĩnh để tránh hiện tượng khóa cứng. Đối với dầm micro FGM, việc xây dựng hàm dạng là cần thiết nhưng chưa được đề cập đến.

Trong nghiên cứu này, dao động tự do của các dầm vi mô FGM trên nền đàn hồi Winkler–Pasternak được khảo sát dựa trên MCST, lý thuyết dầm TBT và kỹ thuật đồng nhất hóa Mori–Tanaka. Các hàm dạng phi cổ điển của phần tử dầm vi mô được thiết lập dựa trên các phương trình dao động cơ bản cho dầm vi mô FGM. Sử dụng các hàm dạng đề xuất, các tác giả đã nhận được ma trận độ cứng và ma trận khối lượng cho phần tử dầm vi mô FGM. Trường hợp riêng khi vật liệu là đồng nhất hay dầm là macro, các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng này đồng nhất với các ma trận độ cứng và khối

lượng cho dầm vi mô đồng nhất hoặc dầm Timoshenko cổ điển. Từ đó các tác giả khảo sát ảnh hưởng các tham số hình học, vật liệu, nền đàn hồi, đến tần số dao động riêng và dạng dao động của dầm vi mô FGM.

2. Các phương trình cơ bản của dầm micro FGM Timoshenko



Hình 1. Dầm micro FGM trên nền đàn hồi

Xét dầm micro FGM chiều dài L , tiết diện chữ nhật $b \times h$, đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak như Hình 1. Sự thay đổi thể tích vật liệu gốm và kim loại trong dầm theo hệ thức (1):

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n; \quad V_m = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \quad (1)$$

trong đó h là chiều cao dầm, z là tung độ tính từ mặt trung bình của dầm, n là số mũ của hàm thể tích, chỉ số c và m biểu thị vật liệu gốm và kim loại. Mô đun đàn hồi khối hiệu dụng K và mô đun đàn hồi trượt hiệu dụng G của vật liệu FGM được xác định theo mô hình Mori-Tanaka [38]:

$$\begin{aligned} \frac{K - K_m}{K_c - K_m} &= \frac{V_c}{1 + (1 - V_c)(K_c - K_m)/(K_m + 4G_m/3)} \\ \frac{G - G_m}{G_c - G_m} &= \frac{V_c}{1 + \frac{(1 - V_c)(G_c - G_m)}{G_m + G_m(9K_m + 8G_m)/(6K_m + 12G_m)}} \end{aligned} \quad (2)$$

trong đó K_m, G_m và K_c, G_c là mô đun đàn hồi khối và mô đun đàn hồi trượt của kim loại và gốm. Từ đó, mô đun đàn hồi Young E , hệ số Poisson ν , và mật độ khối lượng ρ được xác định là:

$$E(z) = \frac{9KG}{3K + G}; \quad \nu(z) = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)}; \quad \rho(z) = \rho_c V_c + \rho_m V_m \quad (3)$$

Theo TBT, chuyển vị của điểm trên tiết diện dầm Timoshenko có dạng:

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - (z - h_0)\theta(x, t); \quad w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (4)$$

với $u_0(x, t), w_0(x, t)$ là dịch chuyển dọc trục, độ võng của điểm trên trục trung hòa; h_0 là khoảng cách từ mặt trung hòa đến trục x ; $\theta(x, t)$ là góc quay của tiết diện quanh trục y . Áp dụng MCST các thành phần biến dạng khác không trong dầm là [3, 37]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - (z - h_0) \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right); \quad \chi_{xy} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (5)$$

Sử dụng định luật Hooke, ta nhận được

$$\sigma_{xx} = (2G + \lambda) \varepsilon_{xx}; \quad \sigma_{xz} = 2k_s G \varepsilon_{xz}; \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \lambda \varepsilon_{xx}; \quad m_{xy} = 2Gl^2 \chi_{xy} \quad (6)$$

trong đó λ là hệ số Lamé; $k_s = 5/6$ là hệ số hiệu chỉnh cắt; l là tham số phụ thuộc kích thước. Đồng thời phương trình cân bằng của phân tử dầm micro có dạng:

$$\begin{aligned} k_s A_{33} \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) - \frac{1}{4} A_{33} l^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} \right) &= 0 \\ A_{22} \frac{d^2 \theta}{dx^2} + k_s A_{33} \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) + \frac{1}{4} A_{33} l^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

trong đó A_{11} , A_{12} , A_{22} và A_{33} là các độ cứng

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{12}, A_{22}) &= \int_A (\lambda(z) + 2G(z)) (1, z - h_0, (z - h_0)^2) dA; \quad A_{33} = \int_A G(z) dA \\ h_0 &= \int_A [\lambda(z) + 2G(z)] z dA / \int_A [\lambda(z) + 2G(z)] dA \end{aligned} \quad (8)$$

Đặt biến mới $\gamma = dw/dx - \theta$; $\phi = dw/dx + \theta$ và tích phân phương trình đầu của (7), ta có

$$k_s \gamma = \frac{l^2}{4} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{c_1}{A_{33}} \quad (9)$$

trong đó c_1 là hằng số tích phân. Tích phân phương trình thứ hai của (7), ta nhận được

$$\frac{l^2}{8k_s} \frac{d^4 \phi}{dx^4} - \frac{1}{2} (1 + \alpha) \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{c_1}{A_{22}} \text{ với } \alpha = \frac{A_{33} l^2}{A_{22}}$$

Nếu sử dụng biến mới $\bar{x} = x/L$, ta có

$$\frac{l^2}{8k_s L^4} \frac{d^4 \phi}{d\bar{x}^4} - \frac{1}{2} (1 + \alpha) \frac{d^2 \phi}{L^2 d\bar{x}^2} = \frac{c_1}{A_{22}}$$

Số hạng đầu tiên có chứa vô cùng bé bậc cao $(l/L)^2 \approx 0$ nên được bỏ qua, từ đó

$$\frac{d^2 \phi}{d\bar{x}^2} = -\frac{2c_1}{A_{22} (1 + \alpha)} \quad (10)$$

Thực hiện tích phân các phương trình (9) và (10), ta được

$$\phi = \frac{-c_1}{A_{22} (1 + \alpha)} x^2 + c_2 x + c_3 \text{ và } \gamma = \frac{c_1}{A_{33} k_s} \left(\frac{2 + \alpha}{2(1 + \alpha)} \right)$$

nên

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{-c_1}{2A_{22} (1 + \alpha)} x^2 + \frac{c_2}{2} x + \frac{1}{2} \left[c_3 - \frac{c_1}{A_{33} k_s} \left(\frac{2 + \alpha}{2(1 + \alpha)} \right) \right] \\ w &= -\frac{c_1}{6A_{22} (1 + \alpha)} x^3 + \frac{c_2}{4} x^2 + \frac{1}{2} \left[c_3 + \frac{c_1}{A_{33} k_s} \left(\frac{2 + \alpha}{2(1 + \alpha)} \right) \right] x + c_4 \end{aligned} \quad (11)$$

trong đó c_1, c_2, c_3, c_4 là các hằng số được xác định từ các điều kiện biên tại hai đầu dầm

$$w(x=0) = w_1; \quad \theta(x=0) = \theta_1; \quad w(x=L) = w_2; \quad \theta(x=L) = \theta_2 \quad (12)$$

Từ đó ta nhận được

$$w = N_1^w w_1 + N_3^w w_2 + N_2^w \theta_1 + N_4^w \theta_2; \quad \theta = N_1^\theta w_1 + N_3^\theta w_2 + N_2^\theta \theta_1 + N_4^\theta \theta_2 \quad (13)$$

trong đó $N_i^\theta; N_j^w$ là các hàm dạng phi cổ điển

$$\begin{aligned} N_1^\theta &= \frac{-6}{L(1+\eta)} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right); \quad N_2^\theta = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left[1 - \frac{3}{(1+\eta)} \frac{x}{L}\right] \\ N_3^\theta &= \frac{6}{L(1+\eta)} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right); \quad N_4^\theta = \frac{x}{L} \left[1 - \frac{3}{(1+\eta)} \left(1 - \frac{x}{L}\right)\right] \\ N_1^w &= 1 + \frac{1}{(1+\eta)} \left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \eta\left(\frac{x}{L}\right)\right] \\ N_2^w &= \frac{L}{2(1+\eta)} \left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - (4+\eta)\left(\frac{x}{L}\right)^2 + (2+\eta)\left(\frac{x}{L}\right)\right] \\ N_3^w &= \frac{-1}{(1+\eta)} \left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \eta\left(\frac{x}{L}\right)\right] \\ N_4^w &= \frac{L}{2(1+\eta)} \left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + (\eta-2)\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \eta\left(\frac{x}{L}\right)\right] \end{aligned} \quad (14)$$

η là tỷ số giữa độ cứng uốn và cắt của phần tử dầm Timoshenko có xét đến hiệu ứng kích thước

$$\eta = \frac{12A_{22}}{k_s A_{33} L^2} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \quad (15)$$

Khi vật liệu là đồng nhất, η tương tự hệ số φ do Kahrobaian và cs. [31] đề xuất, sau đó được Dehrouyeh-Semnani và Bahrami [34] hiệu chỉnh, đồng thời các hàm dạng phi cổ điển (14) tương tự các hàm dạng được đề xuất trong [34, 39, 40]. Khi cho tham số kích thước bằng 0, ta nhận được các hàm dạng của phần tử dầm Timoshenko cổ điển [41].

3. Thiết lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của dầm micro FGM Timoshenko

Đối với dầm micro Timoshenko đặt trên nền đàn hồi, biểu thức động năng T , thế năng biến dạng U của dầm và thế năng biến dạng nền U_F có dạng [42, 43]

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_{11} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] - I_{12} \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + I_{22} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \\ U &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 - 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + A_{22} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + k_s A_{33} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 + \frac{l^2}{4} A_{33} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (16) \\ U_F &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[k_w w^2 + k_p \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx \end{aligned}$$

trong đó I_{11}, I_{12} và I_{22} là các mô men quán tính khối lượng

$$(I_{11}, I_{12}, I_{22}) = \int_A \rho(z) \left(1, z - h_0, (z - h_0)^2 \right) dA \quad (17)$$

Để áp dụng FEM, ta chia dầm thành nhiều phần tử, mỗi phần tử có hai nút i và j , mỗi nút có ba chuyển vị, chiều dài phần tử là L_e . Véc tơ chuyển vị nút $\mathbf{d}_e$ của phần tử là:

$$\mathbf{d}_e = \{u_i, w_i, \theta_i, u_j, w_j, \theta_j\}^T \quad (18)$$

trong đó các chuyển vị ngang và góc xoay được nội suy theo (13), chuyển vị dọc sử dụng các hàm nội suy Lagrange. Viết dưới dạng ma trận, ta có

$$u_0 = \mathbf{N}_u^T \mathbf{d}_e; \quad w = \mathbf{N}_w^T \mathbf{d}_e; \quad \theta = \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{d}_e \quad (19)$$

Từ đây, ta nhận được biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi của dầm

$$U = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{d}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (20)$$

với ne là tổng số phần tử dùng để rời rạc dầm; $\mathbf{k}_e$ là ma trận độ cứng phần tử dầm, được viết:

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{k}_{11} + \mathbf{k}_{12} + \mathbf{k}_{22} + \mathbf{k}_{33} + \mathbf{k}_l \quad (21)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{11} &= \int_0^{L_e} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x} \right)^T A_{11} \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x} dx; \quad \mathbf{k}_{12} = -2 \int_0^{L_e} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x} \right)^T A_{12} \frac{\partial \mathbf{N}_\theta}{\partial x} dx; \quad \mathbf{k}_{22} = \int_0^{L_e} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_\theta}{\partial x} \right)^T A_{22} \frac{\partial \mathbf{N}_\theta}{\partial x} dx; \\ \mathbf{k}_{33} &= k_s \int_0^{L_e} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} - \mathbf{N}_\theta \right)^T A_{33} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} - \mathbf{N}_\theta \right) dx; \quad \mathbf{k}_l = \frac{1}{4} l^2 \int_0^{L_e} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{N}_w}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{N}_\theta}{\partial x} \right)^T A_{33} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{N}_w}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{N}_\theta}{\partial x} \right) dx \end{aligned} \quad (22)$$

Biểu thức động năng của dầm có dạng:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{ne} \dot{\mathbf{d}}_e^T \mathbf{m}_e \dot{\mathbf{d}}_e \quad (23)$$

trong đó $\mathbf{m}_e$ là ma trận khối lượng của phần tử dầm, được viết:

$$\mathbf{m}_e = \mathbf{m}_{uu} + \mathbf{m}_{ww} + \mathbf{m}_{u\theta} + \mathbf{m}_{\theta\theta} \quad (24)$$

với

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{uu} &= \int_0^{L_e} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x} \right)^T I_{11} \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x} dx; \quad \mathbf{m}_{ww} = \int_0^{L_e} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} \right)^T I_{11} \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} dx \\ \mathbf{m}_{u\theta} &= - \int_0^{L_e} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} \right)^T I_{12} \frac{\partial \mathbf{N}_\theta}{\partial x} dx; \quad \mathbf{m}_{\theta\theta} = \int_0^{L_e} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_\theta}{\partial x} \right)^T I_{22} \frac{\partial \mathbf{N}_\theta}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (25)$$

Khi vật liệu đồng nhất, các ma trận độ cứng $\mathbf{k}_e$ và khối lượng $\mathbf{m}_e$ đồng nhất với ma trận độ cứng và khối lượng do Dehrouyeh-Semnani và Bahrami [31]. Khi $l = 0$ ta thu được ma trận độ cứng và khối lượng của phần tử dầm Timoshenko cổ điển [41]. Khi $\varphi = 0$ ta thu được ma trận độ cứng và khối lượng của phần tử dầm Euler-Bernoulli.

Thế năng biến dạng đàn hồi của nền có dạng:

$$U_F = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{d}_e^T (\mathbf{k}_{ew} + \mathbf{k}_{ep}) \mathbf{d}_e \quad (26)$$

trong đó

$$\mathbf{k}_{ew} = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \mathbf{N}_w^T K_w \mathbf{N}_w dx; \quad \mathbf{k}_{ep} = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} \right)^T K_p \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} dx \quad (27)$$

Áp dụng nguyên lý Hamilton cho bài toán dầm dao động tự do

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{d}}} \right) - \frac{\partial (U + U_F)}{\partial \mathbf{d}} = 0$$

Ta nhận được phương trình xác định tần số và dạng dao động riêng

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (28)$$

trong đó $\mathbf{D}$, $\mathbf{M}$ và $\mathbf{K}$ là véc tơ chuyển vị nút, ma trận khối lượng và ma trận độ cứng của toàn kết cấu được ghép nối từ các chuyển vị nút, ma trận độ cứng và khối lượng của các phần tử thành.

4. Kết quả số

Trong các tính toán về sau, ta sẽ sử dụng các đại lượng không thứ nguyên sau:

$$\lambda_i = \frac{\omega_i L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}; \quad k_w = \frac{K_w L^4}{E_m I}; \quad k_p = \frac{K_p L^2}{E_m I}; \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad (29)$$

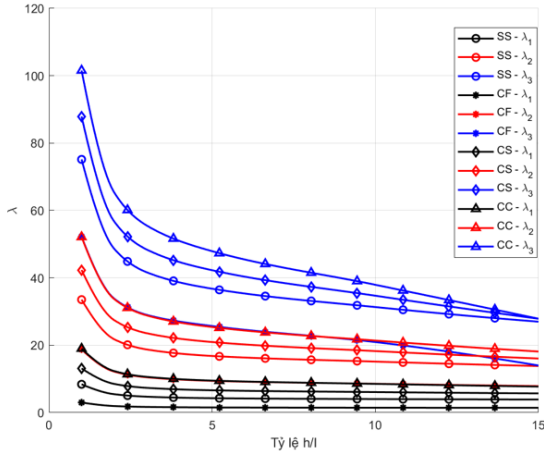
Bảng 1. So sánh tần số riêng cơ bản không thứ nguyên của dầm vi mô FGM

h/l	Simsek và Reddy [2]				Kết quả tính			
	$n = 0,3$	$n = 1$	$n = 3$	$n = 10$	$n = 0,3$	$n = 1$	$n = 3$	$n = 10$
$L/h = 10$								
1	12,6058	10,3982	8,7110	7,5835	12,4009	10,2282	8,5650	7,4543
2	7,8233	6,5211	5,6383	5,0237	7,7820	6,4867	5,6076	4,9960
4	6,0115	5,0692	4,5256	4,1184	6,0014	5,0610	4,5183	4,1118
8	5,4617	4,6327	4,1995	3,8573	5,4588	4,6307	4,1977	3,8558
Classical	5,2654	4,4775	4,0848	3,7661	5,2649	4,4776	4,0849	3,7663
$L/h = 100$								
1	12,9533	10,6960	8,9820	7,8325	12,9507	10,6941	8,9804	7,8315
2	7,9640	6,6461	5,7623	5,1442	7,9632	6,6458	5,7620	5,1442
4	6,1096	5,1583	4,6187	4,2118	6,1090	5,1582	4,6187	4,2120
8	5,5500	4,7135	4,2854	3,9444	5,5494	4,7135	4,2854	3,9446
Classical	5,3505	4,5555	4,1684	3,8512	5,3499	4,5556	4,1684	3,8514

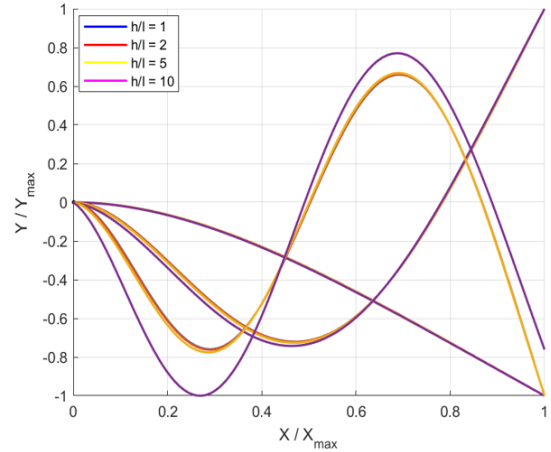
Bảng 1 là so sánh kết quả tính tần số riêng cơ bản không thứ nguyên cho dầm vi mô FGM hai đầu gối tựa đơn giản theo FEM đề xuất gồm 10 phần tử với kết quả của Simsek và Reddy [2] sử dụng

phương pháp giải tích. Ta nhận thấy sai số lớn nhất là 1,7% và dần về không khi các tỉ số h/l và tỉ số L/h tăng lên, điều đó khẳng định độ tin cậy của chương trình được lập.

Dưới đây, ta xét dao động tự do của dầm micro FGM một nhịp với tham số kích thước $l = 15 \mu\text{m}$, tham số vật liệu: $E_m = 70 \text{ GPa}$, $\rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3$, $\nu_m = 0,3$, $E_c = 427 \text{ GPa}$, $\rho_c = 3100 \text{ kg/m}^3$, $\nu_c = 0,17$, và $n = 5$. Dầm tiết diện hình chữ nhật $b = h = 5l$ có chiều dài $L = 20h$.



(a) Sự thay đổi ba tần số đầu tiên theo tỷ số h/l với các liên kết hai đầu khác nhau

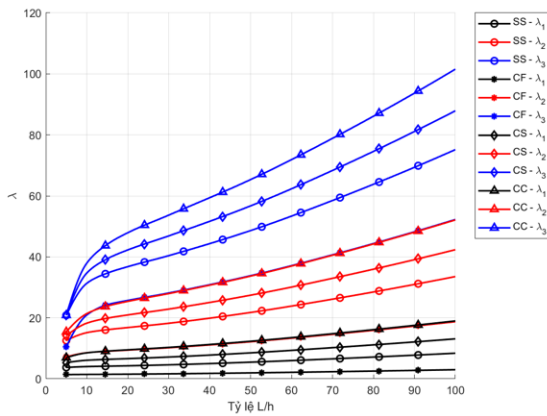


(b) Sự thay đổi ba dạng riêng đầu tiên của dầm công xôn

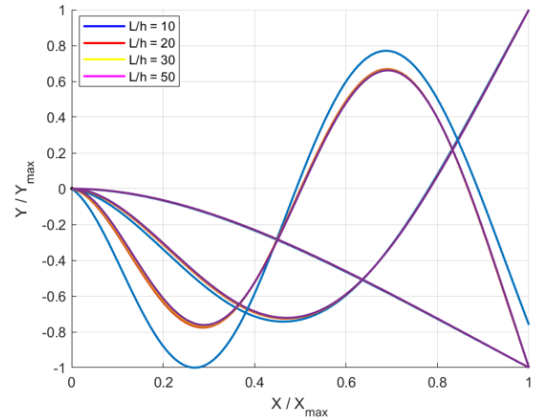
Hình 2. Sự thay đổi của ba tần số và dạng dao động riêng đầu tiên theo tỷ số h/l

Hình 2(a) trình bày sự thay đổi ba tần số không thứ nguyên đầu tiên theo các tỷ số giữa chiều cao dầm h với tham số kích thước micro l . Rõ ràng khi tỷ số h/l tăng, các tần số riêng của dầm đều giảm, đặc biệt khi tỷ số $h/l < 5$ các tần số này giảm nhanh, tần số càng cao thì càng giảm nhiều, khi $h/l > 5$ các tần số này giảm chậm. Về mặt vật lý, điều đó có nghĩa là khi kích thước dầm lớn hơn nhiều so với tham số kích thước vật liệu thì ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước giảm dần. Đồng thời tần số riêng của dầm công xôn (CF) luôn nhỏ nhất, sau đó là tần số riêng của dầm hai đầu gối tựa di động (SS) và dầm một đầu ngàm, một đầu khớp (CS), tần số riêng của dầm 2 đầu ngàm (CC) luôn lớn nhất. Hình 2(b) thể hiện sự thay đổi các dạng dao động riêng của dầm công xôn khi các tỷ số h/l thay đổi. Sự thay đổi các dạng dao động riêng ở các mode cao là rõ nét hơn. Đối với các điều kiện biên SS, CS, CC, sự thay đổi các dạng dao động riêng là nhỏ, không đáng kể. Dưới đây ta sẽ chọn tỷ số $h/l = 5$ trong các nghiên cứu tiếp theo.

Hình 3(a) trình bày sự thay đổi ba tần số không thứ nguyên đầu tiên theo các tỷ số giữa chiều dài dầm L với chiều cao dầm h . Ta nhận thấy các tần số riêng của dầm một nhịp đều tăng, đặc biệt khi tỷ số $L/h < 15$ các tần số này tăng nhanh, tần số càng cao thì càng tăng nhanh. Khi $L/h > 15$ các tần số này tăng chậm hơn. Về mặt vật lý, điều đó có nghĩa là dầm càng dài thì tần số dao động riêng càng cao. Đồng thời tần số riêng của dầm công xôn luôn nhỏ nhất, sau đó là tần số riêng của dầm hai đầu gối tựa di động và dầm một đầu ngàm, một đầu khớp, tần số riêng của dầm hai đầu ngàm luôn lớn nhất. Hình 3(b) thể hiện sự thay đổi các dạng dao động riêng của dầm công xôn khi các tỷ số L/h thay đổi. Sự thay đổi các dạng dao động riêng là rõ nét hơn ở các mode cao. Đối với các điều kiện biên SS, CS, CC, sự thay đổi các dạng dao động riêng là nhỏ, không đáng kể. Dưới đây sẽ chọn tỷ số giữa chiều cao dầm và chiều dài vật liệu là $L/h = 20$.

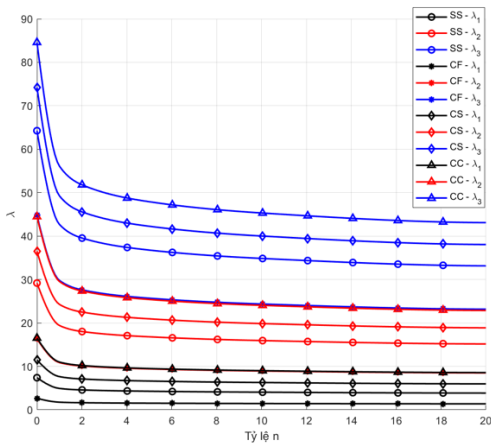


(a) Sự thay đổi ba tần số đầu tiên theo tỷ số L/h với các liên kết hai đầu khác nhau

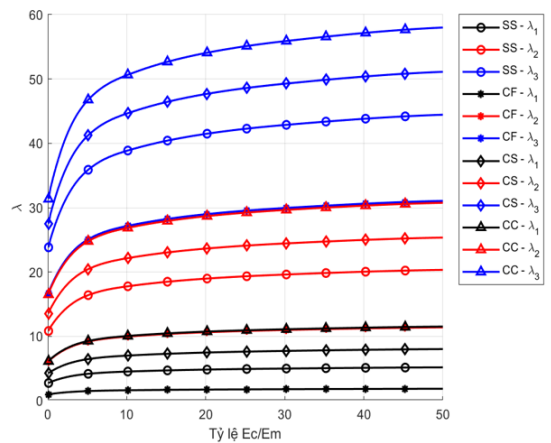


(b) Sự thay đổi ba dạng riêng đầu tiên của dầm công xôn

Hình 3. Sự thay đổi của ba tần số và dạng dao động riêng đầu tiên theo tỷ số L/h



Hình 4. Sự thay đổi ba tần số đầu tiên theo chỉ số n và liên kết hai đầu khác nhau

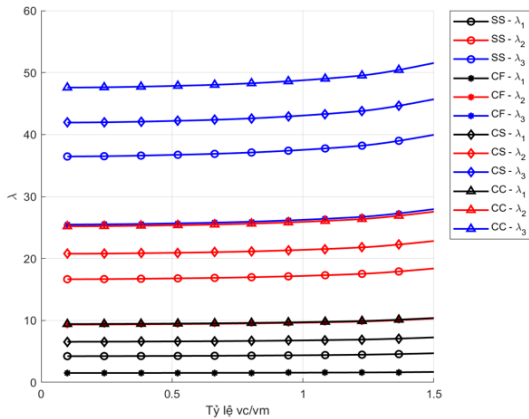


Hình 5. Sự thay đổi ba tần số đầu tiên theo tỷ số E_c/E_m và liên kết hai đầu khác nhau

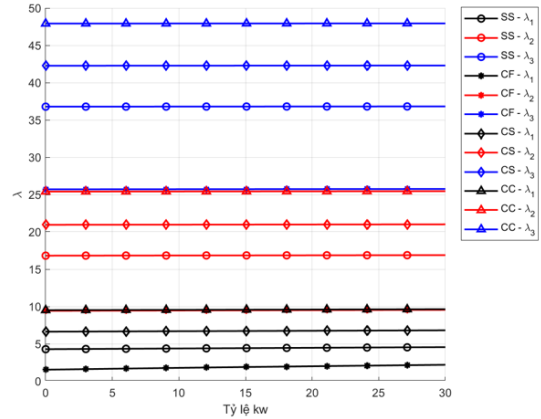
Hình 4 trình bày sự thay đổi ba tần số không thứ nguyên đầu tiên theo số mũ n của hàm thể tích. Ta nhận thấy khi n tăng, các tần số riêng của dầm một nhịp đều giảm, đặc biệt khi $n < 2$ các tần số này giảm nhanh, tần số càng cao thì càng giảm nhanh. Khi $n > 2$ các tần số này giảm chậm hơn. Về mặt vật lý, khi tăng chỉ số n tương ứng với hàm lượng ceramic trong dầm giảm dẫn đến tần số riêng của dầm giảm đi do độ cứng của ceramic cao hơn độ cứng của kim loại. Đồng thời các tần số riêng của dầm CF nhỏ nhất, sau đó là tần số riêng của dầm SS, dầm CS, tần số riêng của dầm CC luôn lớn nhất. Tuy vậy kết quả tính toán cho thấy các dạng dao động riêng của dầm một nhịp với các điều kiện biên kê trên thay đổi không đáng kể.

Hình 5 trình bày sự thay đổi ba tần số không thứ nguyên đầu tiên theo tỷ lệ modun vật liệu lớp trên và dưới E_c/E_m với $E_m = 70$ GPa cố định. Khi tỷ lệ E_c/E_m tăng, các tần số riêng của dầm một nhịp đều tăng, đặc biệt khi $E_c/E_m < 5$ các tần số này tăng nhanh, tần số càng cao thì càng tăng nhanh. Khi tỷ lệ $E_c/E_m > 5$ các tần số này tăng chậm hơn. Về mặt vật lý, điều đó có nghĩa là khi mô đun đàn hồi của vật liệu gốm càng lớn thì các tần số riêng đều tăng lên. Đồng thời tần số riêng của dầm CF nhỏ nhất, sau đó là tần số riêng của dầm SS, dầm CS, tần số riêng của dầm CC luôn lớn nhất. Tuy vậy

kết quả tính toán cho thấy các dạng dao động riêng của dầm một nhịp với các điều kiện biên kể trên thay đổi không đáng kể.



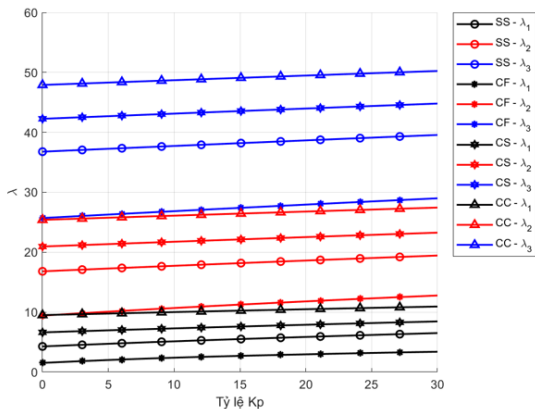
Hình 6. Sự thay đổi ba tần số đầu tiên theo tỷ số v_c/v_m và liên kết hai đầu khác nhau



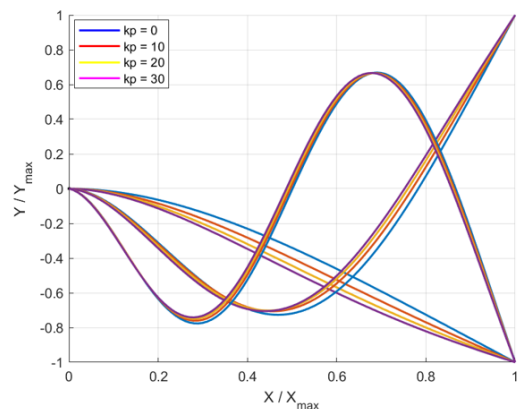
Hình 7. Sự thay đổi ba tần số đầu tiên theo hệ số nền k_w và liên kết hai đầu khác nhau

Hình 6 trình bày sự thay đổi ba tần số không thứ nguyên đầu tiên theo tỷ số của hệ số nở ngang Poisson của vật liệu lớp trên và lớp dưới v_c/v_m . Khi tỷ lệ v_c/v_m tăng, các tần số riêng của dầm một nhịp đều tăng đều và tốc độ tăng chậm, tần số càng cao thì càng tăng nhanh. Đồng thời tần số riêng của dầm CF nhỏ nhất, sau đó là tần số riêng của dầm SS, dầm CS, tần số riêng của dầm CC luôn lớn nhất. Kết quả tính toán cho thấy các dạng dao động riêng của dầm một nhịp với các điều kiện biên kể trên thay đổi không đáng kể.

Hình 7 trình bày sự thay đổi ba tần số không thứ nguyên đầu tiên theo tham số nền đàn hồi Winker không thứ nguyên k_w . Khi k_w tăng, các tần số riêng của dầm một nhịp đều tăng với tốc độ tăng chậm, nghĩa là không phụ thuộc nhiều vào sự thay đổi hệ số k_w . Về mặt vật lý, hệ dầm và nền là một hệ siêu tĩnh, khi mô đun đàn hồi nền càng tăng thì độ cứng của hệ dầm và nền càng tăng lên dẫn đến tần số riêng tăng lên. Tần số riêng của dầm CF nhỏ nhất, sau đó là tần số riêng của dầm SS, dầm CS, tần số riêng của dầm CC luôn lớn nhất. Đồng thời kết quả tính toán cho thấy các dạng dao động riêng của dầm một nhịp với các điều kiện biên kể trên thay đổi không đáng kể.



(a) Sự thay đổi ba tần số đầu tiên theo hệ số nền k_p với các liên kết hai đầu khác nhau



(b) Sự thay đổi ba dạng riêng đầu tiên của dầm công xôn

Hình 8. Sự thay đổi của ba tần số và dạng dao động riêng đầu tiên theo hệ số nền k_p

Hình 8(a) trình bày sự thay đổi ba tần số không thứ nguyên đầu tiên theo tham số nền đàn hồi Pasternak k_p . Khi k_p tăng, các tần số riêng của dầm một nhịp đều tăng với nhanh hơn so với k_w . Cũng như nền Winkler, khi có hệ số nền Pasternak, độ cứng hệ dầm nền trở nên lớn hơn dẫn đến tần số của hệ tăng lên. Đồng thời tần số riêng của dầm CF nhỏ nhất, sau đó là tần số riêng của dầm SS, dầm CS, tần số riêng của dầm hai đầu ngàm luôn lớn nhất. Hình 8(b) thể hiện sự thay đổi các dạng dao động riêng của dầm CF khi các hệ số nền k_p thay đổi. Sự thay đổi các dạng dao động riêng là rõ nét hơn ở các mode 1 và 3. Đối với các điều kiện biên SS, CS, CC, sự thay đổi các dạng dao động riêng là nhỏ, không đáng kể.

5. Kết luận chung

Trong nghiên cứu này, các tác giả đã phân tích dao động của dầm micro FGM đặt trên nền đàn hồi Winkler–Pasternak dựa trên MCST. Các kết quả cơ bản đạt được như sau:

(1) Đã xây dựng được các hàm dạng dao động mới cho dầm micro FGM Timoshenko có xét đến các tham số micro và tỷ số độ cứng uốn và cắt. Trong trường hợp vật liệu đồng nhất, các hàm dạng nhận được trùng với các hàm dạng Kosmatka và Hermite đã biết. Các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng nhận được từ các hàm dạng mới này trùng với các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng cho dầm vi mô đồng nhất hoặc dầm macro Timoshenko đã biết.

(2) Khảo sát sự thay đổi tần số và dạng dao động riêng của các dầm FGM micro một nhịp với các điều kiện biên khác nhau cho thấy:

+ Tần số dao động không thứ nguyên của dầm micro FGM tăng lên khi các tham số hình học, vật liệu và nền tăng lên L/h , E_c/E_m , ν_c/ν_m , K_w , và K_p . Ngược lại khi tỷ lệ giữa chiều cao và tham số kích thước h/l và hệ số mũ hàm thể tích vật liệu n tăng lên thì tần số dao động không thứ nguyên lại giảm đi.

+ Các dạng dao động của dầm công xôn thay đổi rõ nét theo các tỷ số h/l , L/h và hệ số nền Pasternak. Trong các trường hợp còn lại, các dạng dao động riêng của dầm một nhịp thay đổi không đáng kể với các điều kiện biên kể trên.

Các nhận xét này rất hữu ích cho việc phân tích dao động của dầm micro FGM trong quá trình thiết kế, thi công, kiểm định và điều khiển dao động các thiết bị NEMS/MEMS hay các thiết bị kỹ thuật cao ứng dụng dầm micro FGM. Các phân tích trên có thể mở rộng cho các kết cấu dầm micro FGM phức tạp hơn.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo trong đề tài mã số B2025-XDA-05.

Tài liệu tham khảo

- [1] Şimşek, M., Reddy, J. (2013). [A unified higher order beam theory for buckling of a functionally graded microbeam embedded in elastic medium using modified couple stress theory](#). *Composite Structures*, 101: 47–58.
- [2] Şimşek, M., Reddy, J. (2013). [Bending and vibration of functionally graded microbeams using a new higher order beam theory and the modified couple stress theory](#). *International Journal of Engineering Science*, 64:37–53.
- [3] Reddy, J. (2011). [Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams](#). *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(11):2382–2399.
- [4] Akgöz, B., Civalek, Ö. (2013). [Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli–Euler microbeams based on the modified couple stress theory](#). *Composite Structures*, 98: 314–322.
- [5] Al-Basyouni, K., Tounsi, A., Mahmoud, S. (2015). [Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position](#). *Composite Structures*, 125:621–630.

- [6] Salamat-talab, M., Nateghi, A., Torabi, J. (2012). [Static and dynamic analysis of third-order shear deformation FG micro beam based on modified couple stress theory](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 57(1):63–73.
- [7] Akbarzadeh Khorshidi, M., Shariati, M. (2016). [Free vibration analysis of sigmoid functionally graded nanobeams based on a modified couple stress theory with general shear deformation theory](#). *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 38(8):2607–2619.
- [8] Chen, X., Zhang, X., Lu, Y., Li, Y. (2019). [Static and dynamic analysis of the postbuckling of bi-directional functionally graded material microbeams](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 151: 424–443.
- [9] Akbaş, S. D., Dastjerdi, S., Akgöz, B., Civalek, Ö. (2021). [Dynamic analysis of functionally graded porous microbeams under moving load](#). *Transport in Porous Media*, 142(1–2):209–227.
- [10] Hong, J., Wang, S., Zhang, G., Mi, C. (2021). [On the Bending and Vibration Analysis of Functionally Graded Magneto-Electro-Elastic Timoshenko Microbeams](#). *Crystals*, 11(10):1206.
- [11] Thai, H.-T., Vo, T. P., Nguyen, T.-K., Lee, J. (2015). [Size-dependent behavior of functionally graded sandwich microbeams based on the modified couple stress theory](#). *Composite Structures*, 123:337–349.
- [12] Shafiei, N., Mousavi, A., Ghadiri, M. (2016). [On size-dependent nonlinear vibration of porous and imperfect functionally graded tapered microbeams](#). *International Journal of Engineering Science*, 106: 42–56.
- [13] Trinh, L. C., Vo, T. P., Thai, H.-T., Nguyen, T.-K. (2018). [Size-dependent vibration of bi-directional functionally graded microbeams with arbitrary boundary conditions](#). *Composites Part B: Engineering*, 134:225–245.
- [14] Fang, J., Gu, J., Wang, H. (2018). [Size-dependent three-dimensional free vibration of rotating functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 136:188–199.
- [15] Nateghi, A., Salamat-talab, M. (2013). [Thermal effect on size dependent behavior of functionally graded microbeams based on modified couple stress theory](#). *Composite Structures*, 96:97–110.
- [16] Babaei, A., Noorani, M.-R. S., Ghanbari, A. (2017). [Temperature-dependent free vibration analysis of functionally graded micro-beams based on the modified couple stress theory](#). *Microsystem Technologies*, 23(10):4599–4610.
- [17] Jalali, M. H., Zargar, O., Baghani, M. (2018). [Size-Dependent Vibration Analysis of FG Microbeams in Thermal Environment Based on Modified Couple Stress Theory](#). *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 43(S1):761–771.
- [18] Kliewer, K., Glisic, B. (2017). [Normalized Curvature Ratio for Damage Detection in Beam-Like Structures](#). *Frontiers in Built Environment*, 3:50.
- [19] Arbind, A., Reddy, J. N. (2013). [Nonlinear analysis of functionally graded microstructure-dependent beams](#). *Composite Structures*, 98:272–281.
- [20] Lu, L., She, G.-L., Guo, X. (2021). [Size-dependent postbuckling analysis of graphene reinforced composite microtubes with geometrical imperfection](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 199: 106428.
- [21] Ke, L.-L., Wang, Y.-S. (2011). [Size effect on dynamic stability of functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory](#). *Composite Structures*, 93(2):342–350.
- [22] Li, H.-C., Ke, L.-L. (2021). [Size-dependent vibration and dynamic stability of AFG microbeams immersed in fluid](#). *Thin-Walled Structures*, 161:107432.
- [23] Mollamahmutoğlu, C., Mercan, A. (2019). [A novel functional and mixed finite element analysis of functionally graded micro-beams based on modified couple stress theory](#). *Composite Structures*, 223: 110950.
- [24] Chen, X., Lu, Y., Li, Y. (2019). [Free vibration, buckling and dynamic stability of bi-directional FG microbeam with a variable length scale parameter embedded in elastic medium](#). *Applied Mathematical Modelling*, 67:430–448.
- [25] Sheng, G. G., Wang, X. (2019). [Nonlinear forced vibration of size-dependent functionally graded microbeams with damping effects](#). *Applied Mathematical Modelling*, 71:421–437.

- [26] Peng, W., Zenkour, A. M., Pan, B. (2024). [Surface and double nonlocal effects on thermoelastic damping analysis of functionally graded sandwich microbeam resonators reinforced with graphene nanoplatelets](#). *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- [27] Attia, M. A., Melaibari, A., Shanab, R. A., Eltaher, M. A. (2022). [Dynamic Analysis of Sigmoid Bidirectional FG Microbeams under Moving Load and Thermal Load: Analytical Laplace Solution](#). *Mathematics*, 10(24):4797.
- [28] Akbaş, S. D. (2017). [Forced Vibration Analysis of Functionally Graded Nanobeams](#). *International Journal of Applied Mechanics*, 09(07):1750100.
- [29] Chakraborty, A., Roy Mahapatra, D., Gopalakrishnan, S. (2002). [Finite element analysis of free vibration and wave propagation in asymmetric composite beams with structural discontinuities](#). *Composite Structures*, 55(1):23–36.
- [30] Liu, H., Zhang, Q., Ma, J. (2021). [Thermo-mechanical dynamics of two-dimensional FG microbeam subjected to a moving harmonic load](#). *Acta Astronautica*, 178:681–692.
- [31] Kahrobaiyan, M., Asghari, M., Ahmadian, M. (2014). [A Timoshenko beam element based on the modified couple stress theory](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 79:75–83.
- [32] Zhang, Q., Liu, H. (2020). [On the dynamic response of porous functionally graded microbeam under moving load](#). *International Journal of Engineering Science*, 153:103317.
- [33] Esen, I., Abdelrahman, A. A., Eltaher, M. A. (2020). [Dynamics analysis of timoshenko perforated microbeams under moving loads](#). *Engineering with Computers*, 38(3):2413–2429.
- [34] Dehrouyeh-Semnani, A. M., Bahrami, A. (2016). [On size-dependent Timoshenko beam element based on modified couple stress theory](#). *International Journal of Engineering Science*, 107:134–148.
- [35] Ninh, V. T. A., Kiên, N. Đ. (2022). Ảnh hưởng của tham số kích thước lên hệ số động lực học của dầm micro. *Tạp chí Khoa học và Công nghệ Giao thông Vận tải*, 15–25.
- [36] Kế, T. V., Hồng, N. T. (2022). Phân tích dao động riêng của dầm nano cong FG nằm trên nền đàn hồi sử dụng phương pháp Rayleigh-Ritz. *Khoa học kỹ thuật Thủy Lợi và Môi Trường*, 96–103.
- [37] Ha, L. T., Van Lien, T. (2025). [Effect of the damping model to dynamic responses of the cracked functionally graded microbeams on the elastic foundation subjected to moving load](#). *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 47(7):1–22.
- [38] Mori, T., Tanaka, K. (1973). [Average Stress in the Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions](#). *Acta Metallurgica*, 21(5):571–574.
- [39] Esen, I. (2020). [Dynamics of size-dependant Timoshenko micro beams subjected to moving loads](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 175:105501.
- [40] Esen, I., Abdelrahman, A. A., Eltaher, M. A. (2022). [Dynamics analysis of timoshenko perforated microbeams under moving loads](#). *Engineering with Computers*, 38(3):2413–2429.
- [41] Kosmatka, J. B. (1995). [An improved two-node finite element for stability and natural frequencies of axial-loaded Timoshenko beams](#). *Computers & Structures*, 57(1):141–149.
- [42] Akbaş, S. D., Fageehi, Y. A., Assie, A. E., Eltaher, M. A. (2022). [Dynamic analysis of viscoelastic functionally graded porous thick beams under pulse load](#). *Engineering with Computers*, 38(1):365–377.
- [43] Yee, K., Kankanamalage, U. M., Ghayesh, M. H., Jiao, Y., Hussain, S., Amabili, M. (2022). [Coupled dynamics of axially functionally graded graphene nanoplatelets-reinforced viscoelastic shear deformable beams with material and geometric imperfections](#). *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 136: 4–36.