

# MÔ PHỎNG DÒNG CHẢY TẠO THÀNH DO NẮP DỊCH CHUYỂN TRONG KHOANG CHỨA HÌNH VUÔNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP LATTICE BOLTZMANN

Vũ Đức Chung<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Khoa Công trình thủy, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, số 55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 15/9/2025, Sửa xong 18/11/2025, Chấp nhận đăng 19/11/2025

## Tóm tắt

Dòng chảy tạo thành do nắp dịch chuyển trong khoang chứa hình vuông là dòng chảy của chất lưu, chứa trong một khoang hình vuông, do một biên dịch chuyển theo phương tiếp tuyến với vận tốc không đổi. Dòng chảy này xuất hiện phổ biến trong tự nhiên và được ứng dụng trong nhiều ngành công nghiệp. Trong bài báo này, phương pháp lattice Boltzmann (LBM) được sử dụng để mô phỏng dòng chảy của chất lưu không nén được, gây ra do nắp dịch chuyển trong khoang chứa hình vuông với các giá trị của số Reynolds ( $Re$ ) khác nhau, biến đổi từ 100 tới 5000. Kết quả mô phỏng cho thấy các biểu đồ phân bố vận tốc thay đổi từ dạng phi tuyến khi số  $Re$  nhỏ tới dạng tuyến tính khi số  $Re$  lớn. Đồng thời, đường dòng và xoáy cũng được phân tích để đánh giá ảnh hưởng của số  $Re$  tới cấu trúc của dòng xoáy tuần hoàn ổn định trong khoang. Mô phỏng chỉ ra rằng ngoại trừ trường hợp  $Re = 5000$ , kết quả của phương pháp LBM trùng khớp với các kết quả từ lời giải thông thường của phương trình Navier-Stokes. Do đó, phương pháp LBM, một phương pháp dễ dàng được triển khai bằng phương pháp số, có thể thay thế lời giải của phương trình Navier-Stokes trong việc mô phỏng chất lưu.

*Từ khóa:* phương pháp lattice Boltzmann; mô hình thời gian nghỉ đơn; dòng chảy trong khoang chứa vuông; số Reynolds.

## LATTICE BOLTZMANN SIMULATIONS OF LID-DRIVEN SQUARE CAVITY FLOW

### Abstract

Lid-driven square cavity consists in a fluid flow confined in a square box, driven by a solid lid which moves tangentially to itself with a constant velocity. This type of flow is ubiquitous in nature and extensively utilized in industrial processes. In this paper, lattice Boltzmann method (LBM) is used to simulate incompressible lid-driven cavity flows for different Reynolds number ( $Re$ ) ranging from 100 to 5000. The results show that the velocity profiles transition from curved at low  $Re$  values to linear at high  $Re$  values. In addition, the streamlines and vorticity are analyzed to evaluate the effect of  $Re$  on the structure of steady recirculating eddies in the cavity. The data indicate that except at the highest Reynolds number ( $Re = 5000$ ), LBM results exhibit excellent agreement with conventional Navier-Stokes solvers. Therefore, the LBM, which is straightforward to implement in numerical frameworks, can serve as an effective alternative to traditional Navier-Stokes solvers for simulating the physical and mechanical behaviors of fluid flows.

*Keywords:* lattice Boltzmann method; single relaxation time; square cavity flow; Reynolds number.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2025-19\(4V\)-10](https://doi.org/10.31814/stce.huce2025-19(4V)-10) © 2025 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

## 1. Tổng quan

Dòng chảy tạo thành do nắp dịch chuyển trong khoang chứa hình vuông là chuyển động của chất lưu bên trong một khoang chứa hình vuông, tạo thành do một biên (nắp) chuyển động tịnh tiến với vận tốc không đổi, trong khi các biên khác được giữ đứng yên [1–3]. Cấu tạo hình học của khoang chứa và điều kiện biên của dòng chảy được thể hiện như trong Hình 1, trong đó nắp phía trên dịch chuyển tịnh tiến theo phương nằm ngang từ trái qua phải với vận tốc  $U$ . Vấn đề dòng chảy tạo thành do nắp dịch chuyển trong khoang chứa hình vuông được xem như một mô hình nền tảng của cơ học chất lưu, có nhiều ứng dụng trong công nghiệp như trong quá trình tráng, phủ vật liệu, trao đổi nhiệt trong các thiết bị sấy, trộn hỗn hợp các loại chất lỏng với nhau [2, 3], được sử dụng trong nhiều ngành khoa học khác như khí tượng, hàng hải, quản lý nguồn nước [4–6], và trong thiết bị sử dụng dòng “microfluidics” trong y học [7–9]. Đặc biệt trong xây dựng dân dụng, dòng chảy này được dùng để mô phỏng thông gió và lưu thông không khí trong các toà nhà, giúp dự đoán sự pha trộn không khí, vùng ứ đọng, và sự

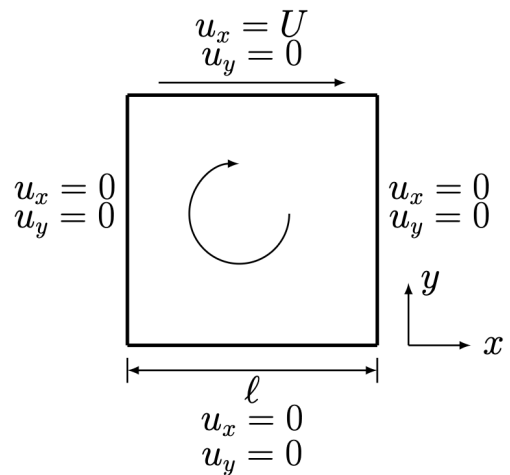
\*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: chungvd@huce.edu.vn (Chung, V. Đ.)

hình thành các vùng xoáy, những yếu tố ảnh hưởng đến sự thoải mái của con người khi ở trong phòng, cũng như sự lan truyền chất gây ô nhiễm không khí [10–12]. Hơn nữa, dòng chảy trong khoang chứa có nắp dịch chuyển có thể dùng để nghiên cứu cơ chế tiêu huỷ năng lượng của sóng thần khi nó tràn qua một kênh đào chứa nước được xây dựng dọc theo bờ biển. Nhiều nghiên cứu chỉ ra rằng, kênh đào này có tác dụng làm giảm tác động của sóng thần lên các công trình phía sau kênh [13–16].

Sự đơn giản về cấu tạo hình học của khoang chứa làm cho vấn đề có vẻ đơn giản, song ứng xử của dòng chảy trong khoang chứa là phức tạp do nó liên quan tới động lực học của dòng xoáy trong một hệ kín, các xoáy hình thành trong khoang chứa có kích thước, cường độ khác nhau, và sự không ổn định của dòng chảy trong khoang. Do những ứng dụng phổ biến của dòng chảy trong khoang kín trong công nghiệp và sự xuất hiện phổ biến trong tự nhiên, dòng chảy này không chỉ quan trọng trong kỹ thuật, nó còn là một vấn đề khoa học nhận được nhiều sự quan tâm của cộng đồng các nhà khoa học trong lĩnh vực thủy động lực học tính toán. Nghiên cứu về dòng chảy này là cần thiết để tìm ra những phương pháp áp dụng mới trong công nghiệp, trong kỹ thuật xây dựng ven biển, cũng như có hiểu biết sâu sắc về thế giới tự nhiên.

Mặt khác, do cấu tạo hình học và điều kiện biên dễ dàng được áp dụng trong các phương pháp số, dòng chảy tạo thành do nắp dịch chuyển trong khoang chứa thường xuyên được sử dụng như một ví dụ chuẩn để thử nghiệm các chương trình tính toán mới hoặc các phương pháp giải mới trong lĩnh vực động lực học chất lỏng [1, 17]. Có khá nhiều những nghiên cứu trước đây đã có lời giải phù hợp cho bài toán này bằng các phương pháp số khác nhau như lời giải thông thường của phương trình Navier-Stokes sử dụng xấp xỉ Euler, phương pháp sai phân hữu hạn, phương pháp thể tích hữu hạn, phương pháp phần tử hữu hạn. Những phương pháp này mô tả các đại lượng quen thuộc của chất lưu như vận tốc, áp suất tại một phần tử hay một nút lưới. Miền không gian tính toán có thể được chia tương đối thô, với bước thời gian tương đối lớn mà vẫn cho kết quả hội tụ. Tuy nhiên thuật toán của các phương pháp này thường khá phức tạp, khó khăn trong việc tối ưu hoá chương trình để nâng cao tốc độ tính toán, do nó phải đi giải một phương trình phi tuyến như phương trình Navier-Stokes [18].

Như một giải pháp thay thế cho các phương pháp đi giải phương trình Navier-Stokes thông thường, phương pháp lattice Boltzmann (LBM) đã được phát triển cách đây vài thập kỷ với nền tảng vật lý dựa vào phương trình động học vi mô (phương trình Boltzmann), trong đó dòng chảy được mô tả dựa vào xác suất tìm thấy một hạt chất lưu ở một trạng thái xác định. Phương pháp LBM xử lý thủy động lực học dòng chảy bằng cách xem nó như một tập hợp các hạt chuyển động theo phương trình Boltzmann, trong đó biến số cơ bản của phương trình là hàm phân phối  $f$  mang thông tin về trạng thái vi mô của các hạt chất lỏng bên trong dòng chảy [1, 18]. Phương pháp LBM bao gồm các phép tính toán tuyến tính được “địa phương hoá” rất phù hợp cho việc tối ưu hoá tính toán bằng các thuật toán tính toán song song như OpenMP hoặc MPI, cũng như dễ dàng xử lý các điều kiện biên phức tạp như trong vật liệu rỗng, dòng chảy nhiều pha [18]. Do những ưu điểm này, phương pháp LBM được xem là một phương pháp mô phỏng số chất lưu đầy hứa hẹn, thu hút được sự quan tâm lớn trong cộng đồng các



Hình 1. Cấu tạo hình học của khoang chứa và điều kiện biên của dòng chảy tạo thành do nắp dịch chuyển

nhà khoa học trên thế giới.

Phần lớn các mô phỏng chất lưu bằng phương pháp LBM dựa trên mô hình do Qian [19] và Chen và cs. [20] đề xuất, trong đó thành phần va chạm (collision) bên vế phải của phương trình Boltzmann được xấp xỉ bằng phương pháp thời gian nghỉ đơn (single relaxation time) của Bhatnagar-Gross-Krook [21]. Do đó, phương pháp xấp xỉ này còn được gọi là mô hình BGK. Thành phần va chạm có thể được hiểu là xu hướng của hàm phân phối  $f$  tiến gần đến trạng thái cân bằng của nó. Hàm phân phối  $f$  đạt được trạng thái cân bằng sau khoảng thời gian  $\tau$ , được gọi là thời gian nghỉ (relaxation time). Phương pháp LBM sử dụng mô hình BGK thường xuyên được dùng trong việc mô phỏng động lực học chất lưu có số Reynolds thấp. Trong bài toán dòng chảy tạo thành do nắp dịch chuyển trong khoang chứa hình vuông, số Reynolds được định nghĩa là  $Re = U\ell/\nu$ , trong đó  $U$  là vận tốc của nắp dịch chuyển,  $\ell$  là kích thước khoang theo một phương,  $\nu$  là hệ số nhớt động học của chất lưu chứa trong khoang.

Trong bài báo này, ứng xử và cấu trúc của dòng chảy tạo thành do nắp dịch chuyển trong khoang chứa hình vuông được mô phỏng bằng phương pháp LBM cho chất lưu không nén được. Một mô hình lưới chia miền không gian hai chiều thành hệ thống các điểm nút mà trong đó hàm phân phối  $f$  có thể lan truyền theo 9 hướng khác nhau (D2Q9) được thiết lập, cùng với hàm xấp xỉ thời gian nghỉ đơn BGK được sử dụng để giải phương trình Boltzmann. Ảnh hưởng của số  $Re$  tới đặc trưng của dòng chảy sẽ được nghiên cứu toàn diện. Kết quả thu được từ mô phỏng được so sánh với kết quả của các nghiên cứu trước đây để đánh giá tính chính xác, ổn định của chương trình tính toán dựa vào phương pháp LBM, mà tác giả tạo ra bằng ngôn ngữ lập trình C++.

Trong các phần tiếp theo, trong mục 2 mô hình số của phương pháp LBM cho chất lưu không nén được sẽ được giới thiệu. Trong mục 3, trường vận tốc, đường dòng, và trường xoáy của dòng chảy trong khoang chứa như một hàm của số Reynolds sẽ được phân tích cụ thể. Cuối cùng các kết quả quan trọng của nghiên cứu này được tóm tắt ở mục 4.

## 2. Phương pháp lattice Boltzmann (LBM)

Chất lưu có thể được mô tả thông qua một hàm phân phối  $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$  cho biết xác suất tìm thấy một hạt chất lưu tại thời điểm  $t$  ở vị trí giữa  $\mathbf{x}$  và  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  đang chuyển động với vận tốc giữa  $\mathbf{c}$  và  $\mathbf{c} + d\mathbf{c}$ . Sự biến đổi theo không-thời gian của hàm  $f$  được tính bằng vi phân toàn phần của chính nó theo thời gian, đây cũng chính là phương trình Boltzmann [18, 22, 23]:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \right) f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = \Omega \quad (1)$$

trong đó  $m$  là khối lượng của hạt chất lưu,  $\mathbf{F}$  là ngoại lực tác dụng,  $\Omega$  là thành phần va chạm mô tả động lực học của sự va chạm giữa các hạt chất lưu. Thành phần va chạm là một hàm phức tạp của hàm phân phối  $f$  và phải biết nếu muốn giải được phương trình Boltzmann. Với một chất lưu không có ngoại lực tác dụng, phương trình Boltzmann có thể được đơn giản hoá như sau:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = \Omega \quad (2)$$

trong đó toán tử  $\nabla$  được gọi là gradient của hàm phân phối  $f$ .

### 2.1. Rời rạc hoá phương trình Boltzmann

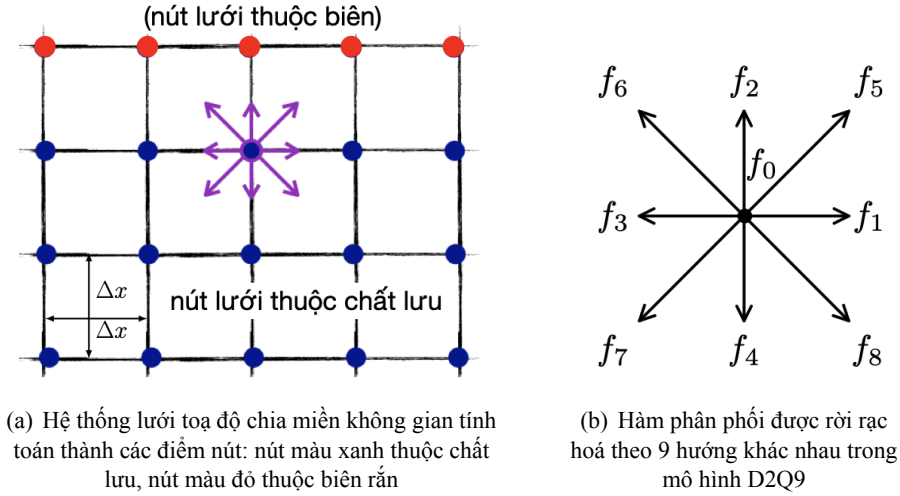
Trong phương pháp LBM, miền không gian tính toán được chia thành một lưới toạ độ, các điểm nút cách nhau một khoảng  $\Delta x$  theo các phương, trục thời gian cũng được chia thành các bước thời gian  $\Delta t$ . Hơn nữa, hàm phân phối cũng được giả thuyết rằng, nó chỉ lan truyền trong hệ thống lưới toạ độ theo một số hướng nhất định, thay vì theo mọi phương như trong phương trình tổng quát, xem

Hình 2(a). Do đó, phương trình Boltzmann (2) sau khi được rời rạc hoá trong không-thời gian và cả trong miền không gian vận tốc có thể được viết cho một hướng nhất định như sau [18, 24, 25]:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \Omega_i(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

trong đó  $f_i(\mathbf{x}, t)$  là hàm phân phối rời rạc,  $c_i$  là vận tốc rời rạc, nó là một phần của tập hợp các vận tốc rời rạc, như thể hiện trong phương trình (4). Các tập hợp của vận tốc rời rạc khác nhau được sử dụng cho các mục tiêu mô phỏng khác nhau. Chúng thường được biểu thị bởi ký hiệu  $DdQq$ , trong đó  $d$  là số chiều không gian mà tập hợp ấy bao phủ,  $q$  là số lượng vận tốc rời rạc. Trong nghiên cứu này, mô hình D2Q9 được sử dụng, nó được sử dụng rộng rãi khi giải bài toán chuyển động của chất lưu. Mô hình này có 9 vector vận tốc  $i = 0, 1, 2, \dots, 8$  trong miền không gian 2 chiều. Hàm phân phối chỉ lan truyền theo 9 hướng này với vận tốc  $\mathbf{c}_i$ , như được thể hiện trong Hình 2(b). Các hướng vận tốc được định nghĩa bởi tập hợp sau:

$$[\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6, \mathbf{c}_7, \mathbf{c}_8] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

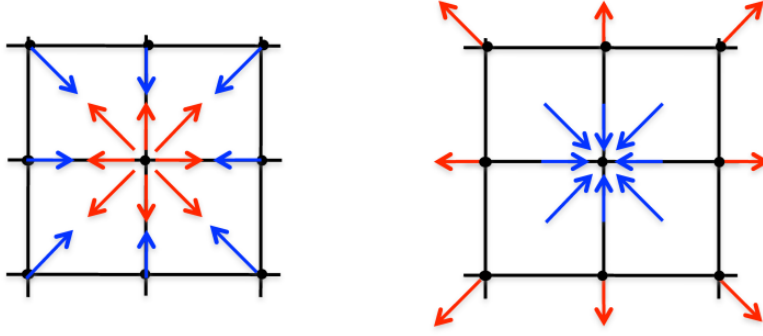


Hình 2. Hệ tọa độ lưới và hàm phân phối  $f_i$  trong mô hình D2Q9

Phương trình Boltzmann rời rạc (3) thể hiện rằng hàm phân phối  $f_i$  tại vị trí  $\mathbf{x}$  và tại thời điểm  $t$  sẽ dịch chuyển với vận tốc  $\mathbf{c}_i$  tới vị trí lân cận  $\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t$  tại thời điểm  $t + \Delta t$ , đồng thời hàm phân phối  $f_i$  từ các vị trí lân cận cũng lan truyền tới vị trí  $\mathbf{x}$ , như được thể hiện trong Hình 3. Trong hình này, hàm phân phối màu đỏ dịch chuyển từ vị trí trung tâm đến các vị trí lân cận, đồng thời hàm phân phối màu xanh từ vị trí lân cận lan truyền về vị trí trung tâm. Lưu ý rằng chúng ta có một liên hệ như sau:  $\mathbf{c}_i \Delta t = \Delta \mathbf{x}$ . Cùng với quá trình lan truyền, hàm phân phối  $f_i$  cũng bị ảnh hưởng bởi thành phần va chạm  $\Omega_i$ . Thành phần va chạm này sẽ được tính toán dựa vào mô hình BGK, sẽ được đề cập trong mục 2.2.

Mật độ  $\rho(\mathbf{x}, t)$  và vector vận tốc  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  của chất lưu được tính toán từ hàm phân phối  $f_i(\mathbf{x}, t)$  và các vector vận tốc rời rạc  $\mathbf{c}_i$  như sau:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{x}, t), \quad \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$



Hình 3. Quá trình dịch chuyển của các hàm phân phối ở nút trung tâm và các nút lân cận

## 2.2. Mô hình BGK

Thành phần va chạm có thể được tính toán theo nhiều mô hình khác nhau nhưng phương pháp được sử dụng nhiều nhất là mô hình thời gian nghỉ đơn, hay còn gọi là mô hình BGK. Theo mô hình này, thành phần va chạm sẽ được tính toán như sau [21]:

$$\Omega_i = \frac{1}{\tau} (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (6)$$

Trong mô hình BGK, cho mỗi hướng chuyển động  $i$ , quá trình va chạm được xem như là tuyến tính với hàm phân phối  $f_i(\mathbf{x}, t)$  hướng tới một giá trị cân bằng  $f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)$  trong khoảng thời gian  $\tau$ . Hàm phân phối cân bằng thu được bằng cách sử dụng khai triển Taylor của hàm cân bằng Maxwell [18, 21, 24],

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left( 1 + 3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \quad (7)$$

trong đó  $\omega_i$  là một trọng số phụ thuộc vào mô hình DdQq. Đối với mô hình D2Q9, chúng ta có:

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{4}{9} & \text{khi } \|\mathbf{c}_i\| = 0 \\ \frac{1}{9} & \text{khi } \|\mathbf{c}_i\| = 1 \\ \frac{1}{36} & \text{khi } \|\mathbf{c}_i\| = \sqrt{2} \end{cases} \quad (8)$$

Phương trình Boltzmann rời rạc (3) có thể mô tả sự thay đổi của các biến số trong phương trình Navier-Stokes với hệ số nhớt động học được tính toán từ thời gian nghỉ  $\tau$  như sau [18]:

$$\nu = \frac{2\tau - 1}{6} \quad (9)$$

Đối với chất lưu không nén được, áp suất của chất lưu được cho bởi [18]:

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{3} \rho(\mathbf{x}, t) \quad (10)$$

### 2.3. Thuật toán của phương pháp LBM

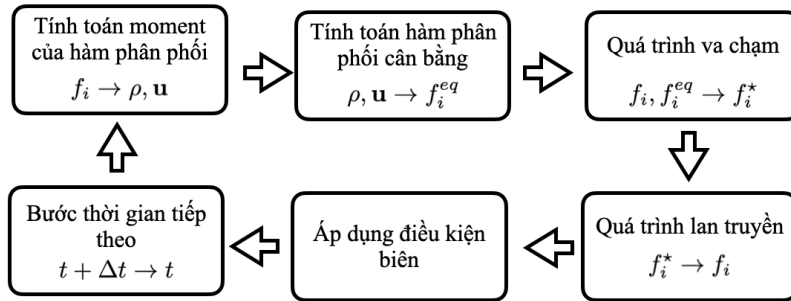
Phương trình Boltzmann rời rạc (3) có thể được phân tích thành hai phần riêng biệt và được thực hiện lần lượt trong thuật toán của phương pháp LBM. Phần đầu tiên thể hiện cho quá trình va chạm (collision) hoặc còn được gọi là quá trình nghỉ (relaxation), được tính toán như sau:

$$f_i^*(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \Omega_i \quad (11)$$

trong đó  $f_i^*(\mathbf{x}, t)$  là hàm phân phối sau khi quá trình va chạm kết thúc. Phần thứ hai thể hiện cho quá trình lan truyền (propagation) của hàm phân phối tới các vị trí lân cận, được tính toán như sau:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x}, t) \quad (12)$$

Hình 4 thể hiện sơ đồ tính toán trong một bước thời gian  $\Delta t$  của phương pháp LBM. Các điều kiện ban đầu thường được áp dụng để hàm phân phối ban đầu có thể được tính toán và sau đó các bước được thực hiện lần lượt như trong Hình 4. Cách tiếp cận đơn giản nhất để tính toán giá trị ban đầu của hàm phân phối là thiết lập điều kiện ban đầu với giá trị của mật độ chất lưu tại các điểm nút lưới  $\rho(\mathbf{x}, t = 0) = 1$ , và vector vận tốc tại các điểm đó  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{0}$ . Thông qua phương trình (7), các hàm phân phối được tính toán như sau:  $f_i(\mathbf{x}, t = 0) = f_i^{eq}(\rho(\mathbf{x}, t = 0), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0)) = 0$ .



Hình 4. Sơ đồ tính toán trong một bước thời gian của thuật toán sử dụng phương pháp LBM

Thuật toán của phương pháp LBM bao gồm 6 bước tính toán tuần hoàn, trong đó mỗi chu kỳ tương ứng với một bước thời gian. Các bước tính toán bao gồm:

- Bước 1: Tính toán mật độ và vận tốc chất lưu tại tất cả các điểm nút lưới theo phương trình (5), như sau:

$$\begin{cases} \rho = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \\ u_x = \frac{(f_1 + f_5 + f_8) - (f_3 + f_6 + f_7)}{\rho} \\ u_y = \frac{(f_2 + f_5 + f_6) - (f_4 + f_7 + f_8)}{\rho} \end{cases} \quad (13)$$

- Bước 2: Tính toán hàm phân phối cân bằng  $f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)$ , sử dụng phương trình (7).
- Bước 3: Triển khai quá trình va chạm (collision) như thể hiện trong phương trình (11).
- Bước 4: Triển khai quá trình lan truyền (propagation) như thể hiện trong phương trình (12).
- Bước 5: Áp dụng điều kiện biên của bài toán.
- Bước 6: Chuyển sang bước thời gian tiếp theo bằng việc thay  $t$  bằng  $t + \Delta t$ , sau đó quay lại bước 1 cho tới bước thời gian cuối cùng hoặc khi điều kiện hội tụ được thỏa mãn, dòng chảy đạt trạng thái ổn định.

#### 2.4. Điều kiện biên cho bài toán dòng chảy tạo thành do nắp dịch chuyển trong khoang chứa hình vuông

Đối với khoang chứa hình vuông có nắp dịch chuyển được thể hiện trong Hình 1, có hai loại điều kiện biên khác nhau. Loại điều kiện biên đầu tiên là nắp trên cùng di chuyển tịnh tiến với vận tốc không đổi  $U$ . Loại điều kiện biên thứ hai là ba biên cố định của khoang chứa. Trong nghiên cứu này, phương pháp ngoại suy không cân bằng do Guo và cs. [25] đề xuất được sử dụng. Giá trị của hàm phân phối  $f_i$  tại các biên được tính toán như sau:

$$f_i(\mathbf{x}_b, t) = f_i^{eq}(\rho_b, \mathbf{u}_b) + (f_i(\mathbf{x}_f, t) - f_i^{eq}(\rho_f, \mathbf{u}_f)), \quad (14)$$

trong đó  $\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_f$  lần lượt là vị trí của các điểm nằm trên biên và trong chất lưu,  $\rho_b, \rho_f$  lần lượt là mật độ của các điểm nằm trên biên và trong chất lưu,  $\mathbf{u}_b$  và  $\mathbf{u}_f$  lần lượt là vector vận tốc tại các điểm nằm trên biên và trong chất lưu. Hàm phân phối cân bằng của các điểm nút tại biên  $f_i^{eq}(\rho_b, \mathbf{u}_b)$  được xác định từ phương trình (7) với  $\mathbf{u}_b = \mathbf{0}$  cho các biên cố định và  $\mathbf{u}_b = (U, 0)$  cho nắp dịch chuyển, đồng thời mật độ tại các điểm biên bằng với mật độ tại các điểm nằm trong chất lưu  $\rho_b = \rho_f$ . Các điểm nút tại biên và nằm trong chất lưu được thể hiện như trong Hình 2(a).

### 3. Dòng chảy tạo thành do nắp dịch chuyển trong khoang chứa hình vuông

Để mô phỏng dòng chảy tạo ra do nắp dịch chuyển trong khoang chứa hình vuông, một miền không gian 2 chiều với số lượng nút lưới theo các phương lần lượt là  $N_x = 256$  và  $N_y = 256$  được thiết lập. Số lượng nút lưới được chứng minh là không ảnh hưởng tới kết quả tính toán nếu mỗi phương đều có nhiều hơn 128 nút [26–30]. Dòng chảy được mô phỏng với số Reynolds biến đổi từ 100 tới 5000, tương ứng với vận tốc dịch chuyển của nắp biến đổi từ  $U = 0,005$  tới 0,25 trong hệ thống đơn vị lưới (lattice unit system). Khoảng cách của các nút lưới cạnh nhau  $\Delta x = 1$  và bước thời gian  $\Delta t = 1$  trong hệ thống đơn vị lưới. Sự chuyển đổi từ hệ thống đơn vị lưới sang hệ thống đơn vị vật lý thông thường được thực hiện bằng cách nhân với một hằng số phụ thuộc vào giá trị của  $\Delta x$  và  $\Delta t$  trong hệ thống đơn vị vật lý (ví dụ trong nghiên cứu này chúng ta có thể xem  $\Delta x = 0,01$  m, và  $\Delta t = 0,01$  s, do đó vận tốc  $U = 0,005$  trong hệ đơn vị lưới tương ứng với  $U = 0,05$  m/s trong hệ đơn vị vật lý SI). Lưu ý rằng, bản chất vật lý, cơ học của dòng chảy là độc lập với hệ thống đơn vị đo lường. Vì vậy, một dòng chảy có cùng số Reynolds trong hai hệ thống đơn vị khác nhau sẽ có bản chất vật lý, cơ học như nhau. Hơn nữa, các kết quả thu được trong nghiên cứu này được thể hiện bằng các đồ thị, biểu đồ của các đại lượng đã được chuẩn hoá. Điều này cho phép theo dõi sự biến đổi của các đại lượng không có đơn vị, không phụ thuộc vào hệ thống đơn vị đo lường.

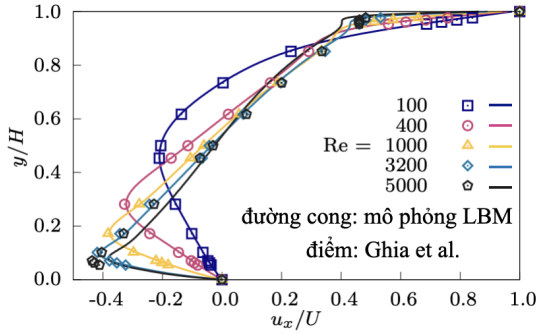
Hệ số nhớt động học của chất lỏng được xác định như sau:

$$\nu = \frac{U\ell}{Re} \quad (15)$$

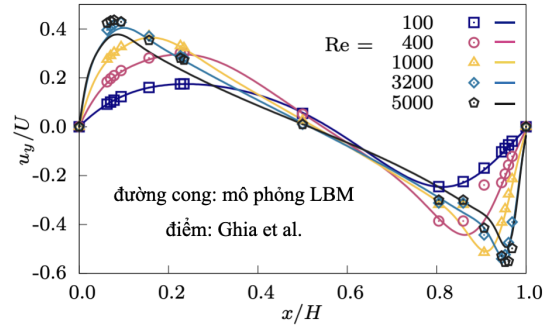
trong đó  $\ell = N_x \Delta x = N_x$ , vì vậy  $\nu = 0,0128$  trong hệ đơn vị lưới, tương ứng  $\nu = 1,28e-4$  ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) trong hệ đơn vị vật lý SI. Hệ số nhớt này xấp xỉ hệ số nhớt của dầu máy cho động cơ, hoặc dầu olive trong ngành thực phẩm. Lưu ý rằng, để thay đổi số  $Re$ , vận tốc của nắp  $U$  bị thay đổi, trong đó hệ số nhớt  $\nu$  được giữ là hằng số.

Vận tốc dòng chảy được xem xét dọc theo đường thẳng đi qua trọng tâm của khoang chứa theo phương thẳng đứng và nằm ngang. Hình 5 thể hiện vận tốc dòng chảy theo phương nằm ngang  $u_x$  được chuẩn hoá bằng vận tốc của nắp  $U$  dọc theo đường thẳng đứng đi qua trọng tâm của khoang chứa hình vuông với các giá trị của số Reynolds biến đổi từ 100 tới 5000. Kết quả thu được từ mô phỏng bằng phương pháp LBM được so sánh với kết quả nhận được từ việc giải phương trình Navier-Stokes của

Ghia và cs. [31]. Số liệu mô phỏng chỉ ra rằng, khi số Reynolds nhỏ hơn 3200, kết quả từ mô phỏng bằng phương pháp LBM trùng khớp với các kết quả trong tài liệu tham khảo [31]. Tuy nhiên, khi số  $Re = 5000$ , kết quả từ mô phỏng của tác giả khác biệt khá nhiều so với kết quả của Ghia và cs. [31]. Điều này cho thấy độ ổn định của phương pháp LBM sử dụng mô hình BGK chỉ đáng tin cậy khi mô phỏng dòng chảy có số Reynolds nhỏ [26, 29].

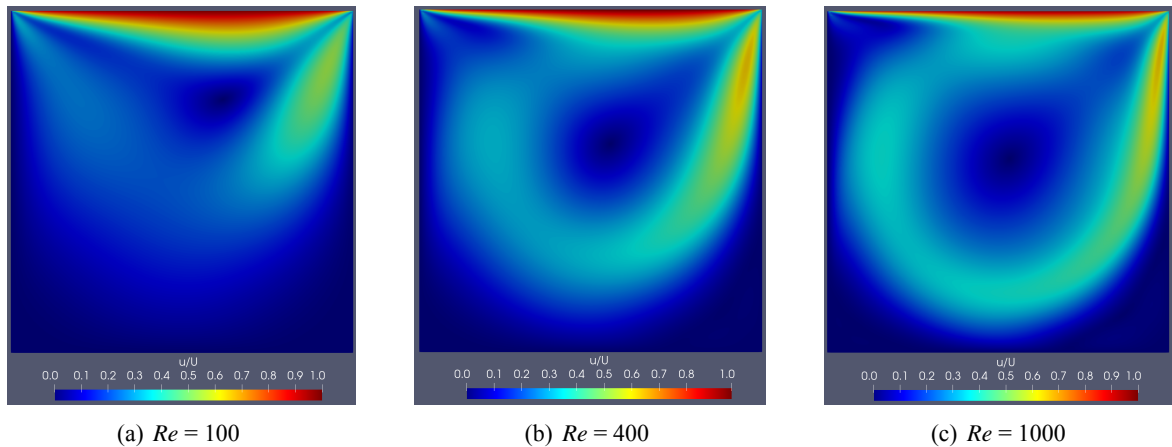


Hình 5. Vận tốc dòng chảy theo phương nằm ngang  $u_x$  được chuẩn hoá bằng vận tốc của nắp  $U$  dọc theo phương thẳng đứng đi qua trọng tâm của khoang chứa hình vuông. Các điểm thể hiện cho kết quả của Ghia và cs. [31]. Các đường cong thể hiện cho kết quả thu được từ mô phỏng bằng LBM của nghiên cứu này cho các giá trị của số Reynolds khác nhau



Hình 6. Vận tốc dòng chảy theo phương thẳng đứng  $u_y$  được chuẩn hoá bởi vận tốc của nắp  $U$  dọc theo đường nằm ngang đi qua trọng tâm của khoang chứa hình vuông. Các điểm thể hiện cho kết quả của Ghia và cs. [31]. Các đường cong thể hiện cho kết quả thu được từ mô phỏng bằng phương pháp LBM của nghiên cứu này cho các giá trị của số Reynolds khác nhau

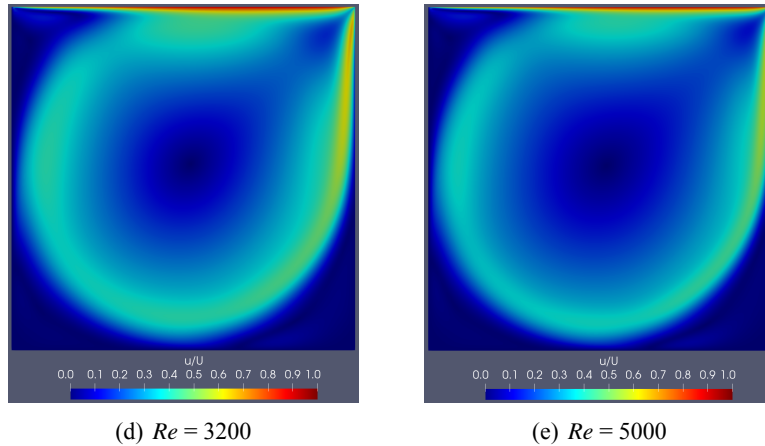
Hình 6 thể hiện vận tốc dòng chảy theo phương thẳng đứng  $u_y$  được chuẩn hoá bằng vận tốc của nắp  $U$  dọc theo đường nằm ngang đi qua trọng tâm của khoang chứa hình vuông với các giá trị của số Reynolds khác nhau. Tương tự như trong Hình 5, chúng ta cũng thấy được sai số của vận tốc  $u_y$  trong trường hợp  $Re = 5000$ . Với dòng chảy có số  $Re > 4000$ , dòng chảy ở trạng thái chảy rối. Lúc này dòng chảy có chứa các yếu tố không ổn định, vận tốc tại một điểm có thể thay đổi liên tục cả về hướng và độ lớn. Vì vậy, mô hình thời gian nghỉ đơn (BGK), sử dụng một hệ số thời gian nghỉ, không đủ để kể đến các yếu tố đó, dẫn đến sai số trong quá trình tính toán. Sai số này có thể được loại bỏ nếu phương pháp LBM được sử dụng với mô hình tính toán thành phần và chạm cao cấp hơn, chẳng hạn mô hình thời gian nghỉ đôi (Two Relaxation Time, TRT) hoặc đa thời gian nghỉ (Multiple Relaxation Time, MRT). Tuy nhiên, các mô hình này thường phức tạp hơn trong việc mô phỏng và đòi hỏi nhiều thời



(a)  $Re = 100$

(b)  $Re = 400$

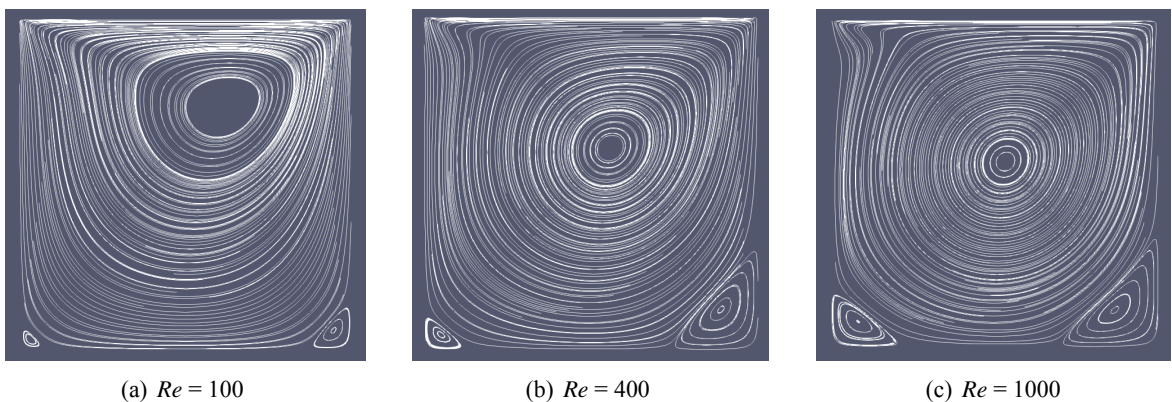
(c)  $Re = 1000$

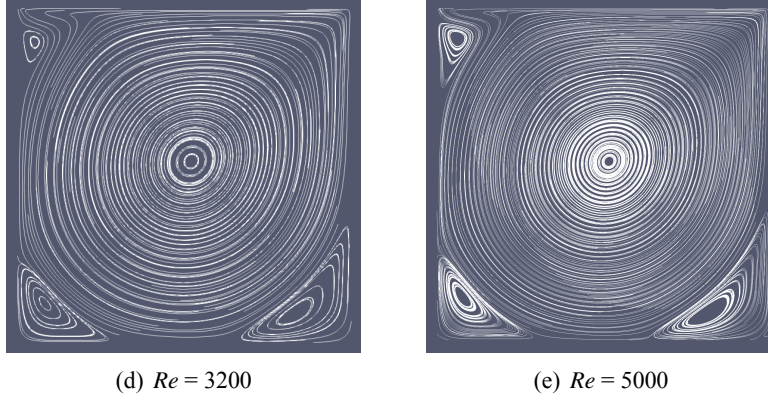


Hình 7. Trường vận tốc của dòng chảy bên trong khoang chứa được chuẩn hoá bởi vận tốc dịch chuyển của nắp  $U$  cho các giá trị của số  $Re$  khác nhau

gian tính toán hơn so với mô hình BGK. Dù vậy, với dòng chảy có số Reynolds cao hơn 5000, việc sử dụng các mô hình cao cấp này là cần thiết để đảm bảo tính chính xác và ổn định của các kết quả thu được từ mô phỏng [27, 32, 33]. Ngoài ra, Hình 5 và 6 chỉ ra rằng biểu đồ vận tốc  $u_x$  và  $u_y$  thay đổi từ dạng cong với số  $Re$  thấp ( $Re = 100; 400$ ) sang dạng biến đổi tuyến tính với những số  $Re$  cao hơn ( $Re = 1000; 3200$ ). Dạng biến đổi tuyến tính của biểu đồ vận tốc dọc theo đường thẳng đi qua trọng tâm của khoang chứa, cho thấy sự hình thành của một vùng xoáy đồng nhất tại trọng tâm của khoang chứa khi số  $Re$  cao. Điều này sẽ được quan sát rõ ràng hơn trong Hình 8, khi các đường dòng được thể hiện.

Hình 7 thể hiện trường vận tốc của dòng chảy được chuẩn hoá bởi vận tốc của nắp  $U$  cho các giá trị của số Reynolds khác nhau khi dòng chảy đạt trạng thái ổn định. Chúng ta thấy rõ sự hình thành của một vùng xoáy ở trung tâm của khoang chứa. Vùng xoáy này được gọi là xoáy chính. Vị trí và kích thước của xoáy chính phụ thuộc vào giá trị của số Reynolds. Với số  $Re$  tăng dần, diện tích của vùng xoáy chính lớn hơn, có cấu trúc tròn hơn, và vị trí tâm xoáy ngày càng gần với trọng tâm của khoang chứa. Với những dòng chảy có số  $Re$  lớn, chúng ta cũng quan sát thấy rõ sự hình thành của các xoáy thứ cấp tại các góc bên phía dưới và bên trái phía trên của khoang chứa. Diện tích của các xoáy thứ cấp tăng dần theo giá trị của số  $Re$ . Hơn nữa, vận tốc của dòng chảy ngay cạnh nắp dịch chuyển có độ lớn bằng vận tốc của nắp dịch chuyển, bởi vì, điều kiện biên không trượt cho cả nắp dịch chuyển và biên cố định được áp dụng trong nghiên cứu này.





Hình 8. Đường dòng của dòng chảy bên trong khoang chứa với các giá trị của số  $Re$  khác nhau

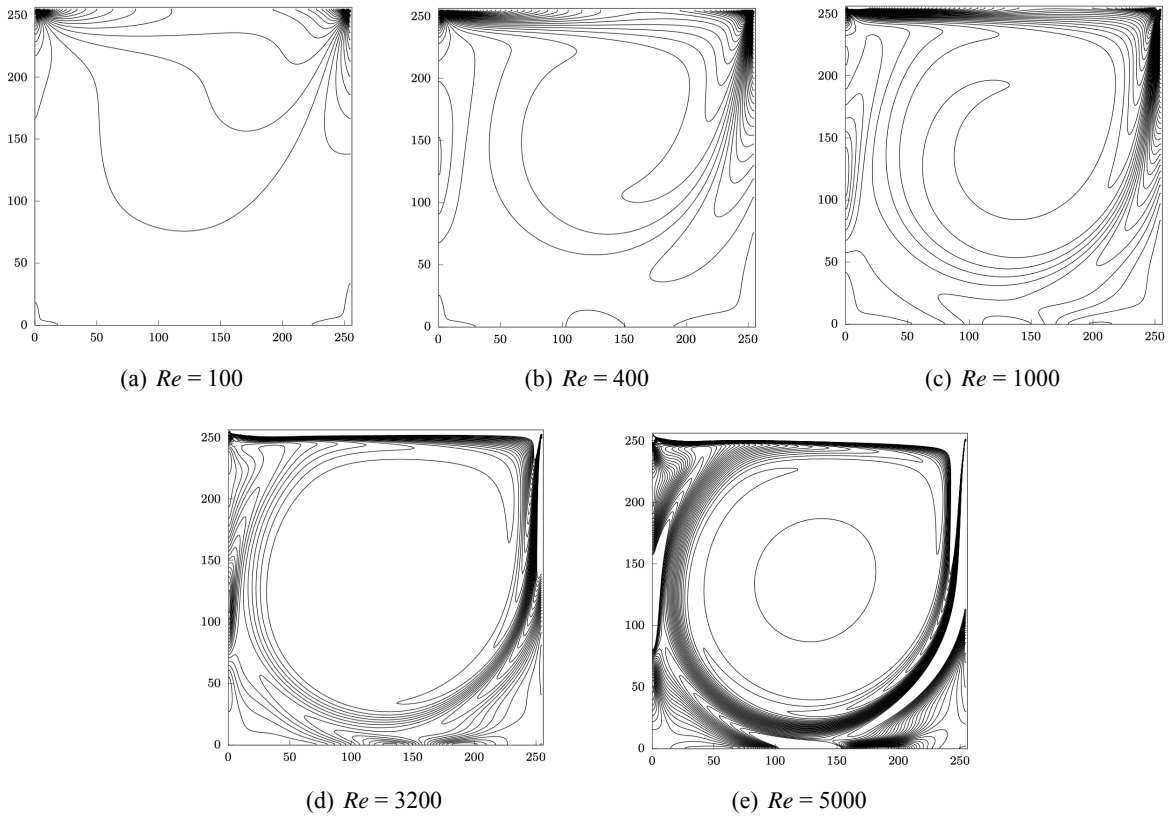
Đường dòng của dòng chảy trong khoang chứa với các số  $Re$  khác nhau được thể hiện trong Hình 8. Chúng ta có thể quan sát thấy rõ ảnh hưởng của số  $Re$  tới cấu trúc của xoáy chính, số lượng và sự hình thành của các xoáy thứ cấp. Ngoài xoáy chính hình thành ở gần trung tâm khoang chứa, một cặp xoáy thứ cấp được hình thành ở góc bên dưới của khoang chứa. Tuy nhiên, với số  $Re$  nhỏ, cặp xoáy thứ cấp này cũng có cường độ nhỏ. Cường độ của cặp xoáy thứ cấp này tăng dần theo số  $Re$ . Khi số  $Re$  tăng đến 3200, một xoáy thứ cấp khác được hình thành ở góc bên trái phía trên của khoang chứa. Cường độ của xoáy này cũng tăng dần theo số  $Re$ . Các xoáy thứ cấp này có tên gọi khác là xoáy Moffatt [34]. Ngoài ra, Hình 8 chỉ ra rằng tâm của xoáy chính nằm tại chính giữa theo phương ngang và một phần ba độ sâu của khoang theo phương thẳng đứng khi dòng chảy có số  $Re = 100$ . Khi số  $Re$  tăng dần, tâm của xoáy chính dịch chuyển dần xuống bên dưới và trùng với trọng tâm của khoang chứa khi số  $Re \geq 1000$ . Hơn nữa, khi số  $Re$  lớn, xoáy chính này có cấu trúc tròn hơn, dẫn đến biểu đồ vận tốc theo phương ngang và thẳng đứng đi qua trọng tâm của khoang chứa trở nên tuyến tính, như được thể hiện trong Hình 5 và Hình 6.

Cường độ xoáy là một đại lượng vector biểu diễn chuyển động quay cục bộ của các hạt chất lưu. Về mặt toán học, nó được định nghĩa là cường độ xoáy của trường vận tốc, và được xác định như sau:  $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ , trong đó  $\omega$  là vector cường độ xoáy,  $\mathbf{u}$  là vector vận tốc dòng chảy, và  $\nabla$  là toán tử xoáy. Trong miền không gian hai chiều, vector cường độ xoáy được xác định như sau:

$$\omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (16)$$

Các đường chu tuyến nối các điểm có cùng cường độ xoáy với nhau được thể hiện như trong Hình 9. Các vị trí có sự tập trung của các đường chu tuyến là những vị trí có cường độ xoáy cao. Các vị trí này tập trung tại góc phía trên của khoang chứa, tại đó dòng chảy có sự biến đổi mạnh mẽ về hướng. Khi số  $Re$  tăng dần, xuất hiện các vị trí có cường độ xoáy cao xung quanh viền biên ngoài cùng của xoáy chính.

Với những kết quả đã được trình bày, nghiên cứu này cho thấy phương trình Boltzmann rời rạc, một phương trình tuyến tính, có thể mô phỏng các hành vi phức tạp của chất lưu. Việc áp dụng phương pháp số để giải phương trình Boltzmann là dễ dàng hơn rất nhiều so với một phương trình phi tuyến, như phương trình Navier-Stokes. Điều này đặc biệt có ý nghĩa đối với những bài toán có điều kiện biên phức tạp như trong dòng chảy nhiều pha, dòng chảy trong vật liệu rỗng. Hơn nữa, sự tuyến tính của phương trình Boltzmann rời rạc cho phép sử dụng các thuật toán tính toán song song như OpenMP hoặc MPI nhằm nâng cao tốc độ tính toán bằng phương pháp số [17–20]. Đặc tính tuyến tính cũng cho



Hình 9. Đường chu tuyến thể hiện giá trị của cường độ xoáy của dòng chảy trong khoang chứa với các giá trị của số  $Re$  khác nhau

phép phương pháp LBM dễ dàng được kết hợp với các phương pháp số khác như phương pháp phần tử rời rạc (DEM) để mô phỏng tương tác giữa chất lỏng và vật rắn. Sự kết hợp của hai phương pháp này có thể được sử dụng để mô phỏng các bài toán phức tạp như xói mòn, lắng đọng [35], chuyển động của dòng bùn cát [36], cũng như sạt lở đất, đá tại thềm lục địa, bờ biển [37]. Ngoài ra, phương pháp LBM còn được sử dụng để giải quyết các bài toán kỹ thuật ở nhiều lĩnh vực khác nhau như dòng chảy của máu [38], dòng chảy trong các thiết bị y tế sử dụng dòng microfluidics [39], hiện tượng xâm thực [40], dòng thấm trong vật liệu rỗng [41], dòng chảy trong môi trường không bão hoà [42].

#### 4. Kết luận

Trong nghiên cứu này, dòng chảy của chất lưu không nén được tạo thành do nắp dịch chuyển trong khoang chứa hình vuông được mô phỏng bằng phương pháp lattice Boltzmann (LBM). Phương pháp này dựa trên cơ sở rời rạc hoá phương trình Boltzmann trong không-thời gian vật lý và cả trong miền không gian vận tốc. Mô hình D2Q9 được sử dụng, để giả sử rằng hàm phân phối của phương trình Boltzmann chỉ lan truyền theo 9 hướng khác nhau trong miền không gian 2 chiều. Đồng thời, nghiên cứu này sử dụng mô hình BGK để tính toán thành phần va chạm trong phương trình Boltzmann. Phương pháp lattice Boltzmann cùng với 2 mô hình trên đã mô phỏng chính xác trường vận tốc, cấu trúc xoáy và cường độ xoáy của dòng chảy trong khoang chứa hình vuông khi số Reynolds nhỏ hơn 5000. Cụ thể, vận tốc dọc theo phương thẳng đứng và nằm ngang đi qua trọng tâm của khoang chứa trùng khớp với kết quả của các nghiên cứu trước đây thu được nhờ vào việc giải trực tiếp phương trình Navier-Stokes. Tâm của xoáy chính dịch chuyển dần về trọng tâm của khoang chứa khi số Reynolds

tăng dần. Do đó, nghiên cứu này cũng chỉ rõ sự phụ thuộc của cấu trúc dòng chảy trong khoang chứa vào số Reynolds. Với dòng chảy có số Reynolds lớn hơn 5000, các mô hình tính toán thành phần va chạm cao cấp hơn cần thiết được sử dụng để tránh sai số và sự mất ổn định của lời giải phương trình Boltzmann.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Guo, Z., Shi, B., Wang, N. (2000). [Lattice BGK Model for Incompressible Navier–Stokes Equation](#). *Journal of Computational Physics*, 165(1):288–306.
- [2] Erturk, E. (2009). [Discussions on driven cavity flow](#). *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 60(3):275–294.
- [3] Peng, Y.-F., Shiau, Y.-H., Hwang, R. R. (2003). [Transition in a 2-D lid-driven cavity flow](#). *Computers & Fluids*, 32(3):337–352.
- [4] Jackson, T. R., Haggerty, R., Apte, S. V., Coleman, A., Drost, K. J. (2012). [Defining and measuring the mean residence time of lateral surface transient storage zones in small streams](#). *Water Resources Research*, 48(10).
- [5] Jackson, T. R., Haggerty, R., Apte, S. V., O'Connor, B. L. (2013). [A mean residence time relationship for lateral cavities in gravel-bed rivers and streams: Incorporating streambed roughness and cavity shape: Lateral Cavity Mean Residence Time Relationship](#). *Water Resources Research*, 49(6):3642–3650.
- [6] Barros, M., Escarriaza, C. (2024). [Lagrangian and Eulerian perspectives of turbulent transport mechanisms in a lateral cavity](#). *Journal of Fluid Mechanics*, 984:1.
- [7] Haddadi, H., Di Carlo, D. (2017). [Inertial flow of a dilute suspension over cavities in a microchannel](#). *Journal of Fluid Mechanics*, 811:436–467.
- [8] Horner, M., Metcalfe, G., Ottino, J. M. (2015). [Convection-Enhanced Transport into Open Cavities: Effect of Cavity Aspect Ratio](#). *Cardiovascular Engineering and Technology*, 6(3):352–363.
- [9] Jana, S. C., Metcalfe, G., Ottino, J. M. (1994). [Experimental and computational studies of mixing in complex Stokes flows: the vortex mixing flow and multicellular cavity flows](#). *Journal of Fluid Mechanics*, 269:199–246.
- [10] Zhou, P., Wang, H., Dai, Y., Huang, C. (2022). [Performance evaluation of different pressure-velocity decoupling schemes in built environment simulation](#). *Energy and Buildings*, 257:111763.
- [11] Zuo, W., Chen, Q. (2010). [Fast and informative flow simulations in a building by using fast fluid dynamics model on graphics processing unit](#). *Building and Environment*, 45(3):747–757.
- [12] Carrilho da Graça, G., Daish, N., Linden, P. (2015). [A two-zone model for natural cross-ventilation](#). *Building and Environment*, 89:72–85.
- [13] Usman, F., Murakami, K., Kurniawan, E. B. (2014). [Study on reducing tsunami inundation energy by the modification of topography based on local wisdom](#). *Procedia Environmental Sciences*, 20:642–650.
- [14] Mostafizur, R., Carolyn, S., Eizo, N. (2017). [Experimental and numerical modeling of tsunami mitigation by canals](#). *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 143(1):04016012.
- [15] Elsheikh, N., Nistor, I., Azimi, A. H., Mohammadian, A. (2022). [Tsunami-induced bore propagating over a canal-part 1: Laboratory experiments and numerical validation](#). *Fluids*, 7(7):213.
- [16] Arefi, R., Nistor, I., Mohammadian, A., Elsheikh, N. (2025). [Effects of a rectangular water-filled canal on bore induced horizontal force exerted on a nearshore structure](#). *Natural Hazards*, 121(19):23197–23237.
- [17] De Rosis, A., Coreixas, C. (2020). [Multiphysics flow simulations using D3Q19 lattice Boltzmann methods based on central moments](#). *Physics of Fluids*, 32(11):117101.
- [18] Krüger, T., Kusumaatmaja, H., Kuzmin, A., Shardt, O., Silva, G., Viggien, E. M. (2017). *The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice*, volume 10. Springer International Publishing.
- [19] Qian, Y. H., D'Humières, D., Lallemand, P. (1992). [Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation](#). *Europhysics Letters (EPL)*, 17(6):479–484.
- [20] Chen, H., Chen, S., Matthaeus, W. H. (1992). [Recovery of the Navier-Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method](#). *Physical Review A*, 45(8):R5339–R5342.
- [21] Bhatnagar, P. L., Gross, E. P., Krook, M. (1954). [A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems](#). *Physical Review*, 94(3):511–525.

- [22] Mohamad, A. A. (2011). *Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*, volume 70. Springer.
- [23] Succi, S. (2018). *The Lattice Boltzmann Equation: For Complex States of Flowing Matter*. Oxford University PressOxford.
- [24] Guo, Z., Zheng, C., Shi, B. (2002). Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method. *Physical Review E*, 65(4):046308.
- [25] Zhao-Li, G., Chu-Guang, Z., Bao-Chang, S. (2002). Non-equilibrium extrapolation method for velocity and pressure boundary conditions in the lattice Boltzmann method. *Chinese Physics*, 11(4):366–374.
- [26] Patil, D., Lakshmisha, K., Rogg, B. (2006). Lattice Boltzmann simulation of lid-driven flow in deep cavities. *Computers & Fluids*, 35(10):1116–1125.
- [27] Luo, L.-S., Liao, W., Chen, X., Peng, Y., Zhang, W. (2011). Numerics of the lattice Boltzmann method: Effects of collision models on the lattice Boltzmann simulations. *Physical Review E*, 83(5):056710.
- [28] Hu, J. (2021). Motion of a neutrally buoyant elliptical particle in a lid-driven square cavity. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 85:124–133.
- [29] Lin, L.-S., Chen, Y.-C., Lin, C.-A. (2011). Multi relaxation time lattice Boltzmann simulations of deep lid driven cavity flows at different aspect ratios. *Computers & Fluids*, 45(1):233–240.
- [30] Arun, S., Satheesh, A. (2015). Analysis of flow behaviour in a two sided lid driven cavity using lattice boltzmann technique. *Alexandria Engineering Journal*, 54(4):795–806.
- [31] Ghia, U., Ghia, K., Shin, C. (1982). High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48(3):387–411.
- [32] Yang, F., Shi, X., Guo, X., Sai, Q. (2012). MRT Lattice Boltzmann Schemes for High Reynolds Number Flow in Two-Dimensional Lid-Driven Semi-Circular Cavity. *Energy Procedia*, 16:639–644.
- [33] Sato, K., Kawasaki, K., Koshimura, S. (2023). A numerical study of the MRT-LBM for the shallow water equation in high Reynolds number flows: An application to real-world tsunami simulation. *Nuclear Engineering and Design*, 404:112159.
- [34] Moffatt, H. K. (1964). Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *Journal of Fluid Mechanics*, 18 (1):1–18.
- [35] Chen, H., Liu, W., Chen, Z., Zheng, Z. (2021). A numerical study on the sedimentation of adhesive particles in viscous fluids using LBM-LES-DEM. *Powder Technology*, 391:467–478.
- [36] Rettinger, C., Eibl, S., Rüde, U., Vowinkel, B. (2022). Rheology of mobile sediment beds in laminar shear flow: effects of creep and polydispersity. *Journal of Fluid Mechanics*, 932:1.
- [37] Yang, G. C., Jing, L., Kwok, C. Y., Sobral, Y. D. (2021). Size effects in underwater granular collapses: Experiments and coupled lattice Boltzmann and discrete element method simulations. *Physical Review Fluids*, 6(11):114302.
- [38] Afrouzi, H. H., Ahmadian, M., Hosseini, M., Arasteh, H., Toghraie, D., Rostami, S. (2020). Simulation of blood flow in arteries with aneurysm: Lattice Boltzmann Approach (LBM). *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 187:105312.
- [39] Owen, B., Kechagidis, K., Bazaz, S. R., Enjalbert, R., Essmann, E., Mallorie, C., Mirghaderi, F., Schaaf, C., Thota, K., Vernekar, R., Zhou, Q., Warkiani, M. E., Stark, H., Krüger, T. (2023). Lattice-Boltzmann modelling for inertial particle microfluidics applications - a tutorial review. *Advances in Physics: X*, 8(1): 2246704.
- [40] Sukop, M. C., Or, D. (2005). Lattice Boltzmann method for homogeneous and heterogeneous cavitation. *Physical Review E*, 71(4):046703.
- [41] Fattahi, E., Waluga, C., Wohlmuth, B., Rüde, U., Manhart, M., Helmig, R. (2016). Lattice Boltzmann methods in porous media simulations: From laminar to turbulent flow. *Computers & Fluids*, 140:247–259.
- [42] Younes, N., Wautier, A., Wan, R., Millet, O., Nicot, F., Bouchard, R. (2023). DEM-LBM coupling for partially saturated granular assemblies. *Computers and Geotechnics*, 162:105677.