Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, ĐHXDHN, 2026, 20 (2V): 91–106

# SO SÁNH ỨNG XỬ ĐỘNG ĐẤT CỦA CẦU BÊ TÔNG ỨNG SUẤT TRƯỚC ĐÚC HẪNG CÂN BẰNG THEO PHƯƠNG PHÁP ĐƠN PHỔ VÀ ĐA PHỔ

Hà Quang Đạt[a], Cù Việt Hưng[b,*]

[a]*Công ty TNHH Chodai & Kiso-Jiban Việt Nam, 54 Liễu Giai, phường Giảng Võ, Hà Nội, Việt Nam*
[b]*Khoa Cầu đường, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam*

*Nhận ngày 07/7/2025, Sửa xong 26/02/2026, Chấp nhận đăng 04/3/2026*

**Tóm tắt**

Trong thiết kế công trình cầu, tổ hợp tải trọng liên quan đến động đất thường quyết định đến việc lựa chọn kết cấu móng, mố, trụ cầu. Do đó, lựa chọn phương pháp phân tích động đất phù hợp với đặc thù của từng loại kết cấu cầu là hết sức quan trọng trong thiết kế cầu, đảm bảo an toàn và tiết kiệm. Cầu bê tông ứng suất trước đúc hẫng cân bằng được sử dụng rất phổ biến ở Việt Nam bởi khả năng vượt nhịp và tính kinh tế kỹ thuật phù hợp. Bài báo hệ thống lại các phương pháp phân tích động đất, phân tích cầu bê tông ứng suất trước bằng hai phương pháp phân tích đơn phổ và phân tích đa phổ, so sánh kết quả nội lực để kiến nghị lựa chọn phương pháp phù hợp. Các giải pháp liên kết giữa dầm và trụ cầu cũng được nghiên cứu. Nghiên cứu cho thấy phương pháp đa phổ phản ánh phân bố năng lượng qua nhiều dạng dao động, mang lại kết quả hợp lý hơn đối với các kết cấu phức tạp so với phương pháp đơn phổ. Nghiên cứu góp phần làm rõ phạm vi áp dụng của từng phương pháp trong phân tích động đất cho cầu đúc hẫng cân bằng tại Việt Nam, đồng thời cung cấp cơ sở tham khảo cho các kỹ sư trong việc lựa chọn phương pháp phân tích phù hợp khi thiết kế cầu chịu động đất.

*Từ khoá*: động đất; cầu đúc hẫng; phổ phản ứng; phân tích đơn phổ; phân tích đa phổ.

COMPARISON OF EARTHQUAKE BEHAVIOR OF BALANCED CANTILEVER PRESTRESSED CONCRETE BRIDGES BY SINGLE-MODE SPECTRAL METHOD AND MULTIMODE SPECTRAL METHOD

**Abstract**

In bridge design, earthquake-induced load combinations play a critical role in determining structures of foundation, abutment and pier. Therefore, choosing an earthquake analysis method suitable for the characteristics of each type of bridge structure is essential to ensure both safety and economic efficiency. Balanced cantilever prestressed concrete bridges are widely used in Viet Nam due to their ability to span and suitable technical economics. This study systematizes commonly applied earthquake analysis approaches and investigates the seismic response of balanced cantilever prestressed concrete bridges using two analysis methods: single-mode spectral method analysis and multimode spectral method. Internal force results obtained from the two methods are compared to identify the suitability of each approach. Connection solutions between girders and piers are also studied. The findings indicate that multimode spectral method reflects energy distribution through many types of vibration, giving more reasonable results for complex structures than the single-mode spectral method. The study contributes to clarifying the application scope of each analysis method for balanced cantilever bridges in Vietnam and offers a practical reference for engineers in selecting appropriate seismic analysis methods when designing earthquake-resistant bridges.

*Keywords*: earthquake; balanced cantilever bridge; response spectrum; single-mode spectral analysis; multi-mode spectral analysis.

https://doi.org/10.31814/stce.huce2026-20(2V)-08 © 2026 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

## 1. Giới thiệu

Động đất là hiện tượng rung động của mặt đất, xảy ra do sự giải phóng năng lượng đột ngột trong lớp vỏ trái đất, lan truyền dưới dạng sóng địa chấn, có thể gây ra rung lắc mạnh tại bề mặt đất. Động đất được đặc trưng bởi các thông số như biên độ rung, gia tốc cực đại nền (Peak Ground Acceleration – PGA), phổ phản ứng động đất và tần số dao động đặc trưng của vùng địa chất [1]. Theo Cục khảo sát địa chất Hoa Kỳ (United States Geological Survey – USGS), trung bình mỗi năm trên thế giới có

*Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* hungcv@huce.edu.vn (Hưng, C. V.)

khoảng 20.000 trận động đất được ghi nhận, trong đó hàng trăm trận có khả năng gây thiệt hại nghiêm trọng cho con người và cơ sở hạ tầng [2, 3]. Tại Việt Nam, lịch sử các hoạt động địa chấn cho thấy, đã từng xảy ra các trận động đất mạnh từ 5 đến 6,8 độ Richter trong thế kỷ 20. Động đất ở nước ta chủ yếu tập trung ở các khu vực phía Bắc, gần đây nhiều rung chấn cũng đã xuất hiện ở một số nơi thuộc khu vực miền Trung và Nam Bộ [4].

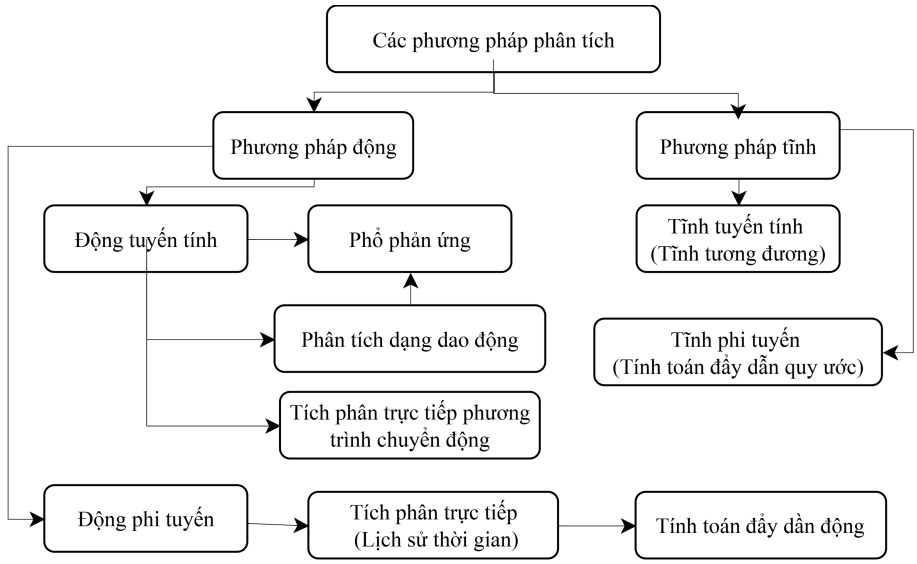
Đối với các công trình dân dụng và hạ tầng giao thông, động đất là một trong những tác nhân nguy hiểm hàng đầu, có thể gây ra các dạng hư hỏng như: nứt gãy cấu kiện, mất ổn định móng, dịch chuyển trụ cầu, phá hủy liên kết và mối nối [5–7]. Đặc biệt, các công trình có độ cao lớn hoặc kết cấu phi đối xứng rất dễ bị cộng hưởng dao động, dẫn đến gia tăng biên độ rung lắc và nguy cơ sụp đổ cục bộ. Theo nghiên cứu của Chopra (2012), các công trình chịu tác động động đất có thể xảy ra hiện tượng dao động tự do cưỡng bức, phụ thuộc vào điều kiện biên và đặc trưng của kết cấu [8, 9]. Các công trình cầu là thành phần quan trọng trong hệ thống giao thông, đóng vai trò thiết yếu đối với sự phát triển kinh tế – xã hội. Kết cấu cầu thường có chiều dài nhịp lớn với khối lượng tập trung chủ yếu ở kết cấu phần trên, trong khi móng mố, trụ thường sử dụng hệ cọc với kích thước bệ lớn. Vì vậy, các công trình cầu rất dễ bị ảnh hưởng bởi các lực tác động ngang, đặc biệt là trong trường hợp xảy ra động đất mạnh [10]. Hư hỏng của kết cấu trụ cầu có thể dẫn đến sự sụp đổ của toàn bộ công trình. Do đó, nhiều nghiên cứu về công trình cầu chịu tải trọng động đất tập trung vào đánh giá khả năng làm việc của kết cấu trụ cầu [11].

Gần đây, các nghiên cứu về phân tích động đất cho kết cấu công trình đã tăng mạnh, đồng thời việc ứng dụng các phần mềm chuyên dụng và máy tính hiệu năng cao trở nên phổ biến. Trong thiết kế cầu, các phương pháp phân tích động đất được phát triển đa dạng từ đơn giản đến phức tạp, và có thể phân loại dựa trên hai tiêu chí: tính chất của tác động động đất lên công trình và đặc tính làm việc của kết cấu chịu lực. Sự kết hợp hai tiêu chí này cho phép chia thành bốn nhóm chính theo hai hướng phân tích tĩnh và phân tích động (Hình 1). Theo tiêu chuẩn thiết kế cầu đường bộ TCVN 11823-2017, tính toán tải trọng động đất có thể được thực hiện thông qua nhiều phương pháp khác nhau như phương pháp đàn hồi tải trọng phân bố đều (Uniform Load Method – ULM), phương pháp phân tích phổ phản ứng (Response Spectrum Analysis – RSA), phương pháp lịch sử thời gian (Time History Analysis – THA) [12–14]. RSA sử dụng phổ gia tốc thiết kế để xác định phản ứng cực đại của công trình qua các dạng dao động chính (Vibration Mode) và ảnh hưởng phi tuyến được phản ánh gián tiếp thông qua hệ số điều chỉnh đáp ứng [15]. THA mô phỏng trực tiếp đáp ứng của kết cấu theo chuỗi gia tốc nền thực tế, cho kết quả chính xác nhưng đòi hỏi mô hình tính phức tạp và dữ liệu đầu vào chi tiết [16]. Một số nghiên cứu chỉ ra rằng phân tích phi tuyến theo phương pháp THA là đáng tin cậy trong phân tích động, nhược điểm là phức tạp, khó triển khai, tính toán mất nhiều thời gian và tài nguyên [17, 18]. RSA được đánh giá là phương pháp lựa chọn tốt nhất giữa chi phí và độ chính xác đối với các kết cấu thông thường so với THA [10, 15].

Đối với lĩnh vực xây dựng cầu, cầu bê tông ứng suất trước (BTƯST) đúc hẫng cân bằng được sử dụng rất phổ biến ở Việt Nam bởi khả năng vượt nhịp khá lớn, có chỉ tiêu kinh tế – kỹ thuật hợp lý, phù hợp với điều kiện địa hình, địa chất của nhiều vùng ở Việt Nam. Có thể kể đến một số công trình cầu BTƯST đúc hẫng tiêu biểu như cầu Vĩnh Tuy, cầu Thanh Trì, cầu Móng Sến, cầu Hàm Luông, ... Trong thiết kế cầu, kết quả phân tích động đất thường quyết định việc lựa chọn điều kiện biên, kích thước, lượng cốt thép phù hợp cho các bộ phận kết cấu cầu.

Bài báo này nghiên cứu đánh giá ứng xử của kết cấu cầu bê tông ứng suất trước (BTƯST) liên tục ba nhịp (52 + 85 + 52) m đúc hẫng cân bằng chịu tác động của tải trọng động đất sử dụng phương pháp phổ dạng đơn (phương pháp phân tích đơn phổ) và phương pháp phân tích phổ dạng phức (phân tích đa phổ) theo tiêu chuẩn TCVN 11823-2017 [12]. Kết cấu cầu được mô phỏng và phân tích ứng

xử chịu động đất bằng mô hình phần tử hữu hạn. Hai trường hợp sử dụng gối và ngàm cứng để liên kết giữa dầm và trụ chính cũng được nghiên cứu nhằm đánh giá ảnh hưởng của điều kiện biên đối với ứng xử của kết cấu cầu khi chịu động đất.




Hình 1. Sơ đồ một số phương pháp phân tích động đất

## 2. Cơ sở lý thuyết một số phương pháp phân tích động đất

### *2.1. Phương pháp phân tích phổ phản ứng (RSA)*

RSA là phương pháp phân tích động lực học gần đúng, kết quả thu được phản ứng cực đại (gia tốc, vận tốc hoặc chuyển vị) của hệ một bậc tự do (SDOF) có cùng tỷ lệ giảm chấn, nhưng với các tần số dao động riêng khác nhau, khi chịu tác động của một kích thích địa chấn cụ thể. Với kết cấu có $n$ bậc tự do được biến đổi thành $n$ hệ một bậc tự do và RSA có thể áp dụng cho các hệ có nhiều bậc tự do. Đối với hầu hết các cầu thông thường, không cần thiết sử dụng phân tích phi tuyến lịch sử thời gian (Time History) do khi thiết kế thường chỉ dựa trên phản ứng cực đại của kết cấu khi xảy ra động đất. Vì vậy, RSA là một trong những phương pháp phổ biến nhất được sử dụng để thiết kế các công trình cầu chịu tải trọng động đất [19–21]. Mục tiêu của RSA là hiểu rõ hơn về cách các công trình phản ứng với các dao động của động đất, từ đó giúp tối ưu hóa thiết kế cầu để đảm bảo an toàn và độ ổn định khi xảy ra động đất. RSA bao gồm hai dạng phân tích là phân tích đơn phổ và phân tích đa phổ.

Sự chuyển động của nền đất làm cho công trình đặt trên nó bị dao động theo. Gia tốc dao động của kết cấu công trình do động đất gây ra được gọi là gia tốc phản ứng của kết cấu (Responses Acceleration). Gia tốc phản ứng của kết cấu càng lớn thì lực động đất tác dụng vào kết cấu càng lớn, và phụ thuộc vào độ lớn của gia tốc nền do động đất gây ra, tần số dao động riêng của kết cấu công trình và điều kiện địa chất nơi đặt công trình [22, 23].

Hệ số đáp ứng động đất đàn hồi $C_{sm}$ là một thông số gián tiếp, tỷ lệ thuận với gia tốc phản ứng của kết cấu. $C_{sm}$ được xác định dựa trên phổ đáp ứng của nền đất, cho phép chuyển đổi từ giá trị gia tốc nền thành gia tốc phản ứng của kết cấu trong trạng thái đàn hồi. Điều này có nghĩa là, khi giá trị $C_{sm}$ lớn, kết cấu có xu hướng phát sinh gia tốc phản ứng lớn, từ đó dẫn đến lực động đất tác dụng mạnh hơn lên công trình. Hệ số $C_{sm}$ đóng vai trò quan trọng trong việc đánh giá và thiết kế cấu trúc chống động đất, giúp xác định chính xác mức độ tăng cường hoặc giảm chấn cần thiết để đảm bảo an toàn kết cấu dưới tác động của động đất [12, 24].

Theo tiêu chuẩn TCVN 11823:2017, hệ số đáp ứng động đất đàn hồi $C_{sm}$ cho dạng thức dao động thứ $m$ được xác định như sau [12]:

Đối với đất loại I và II thì hệ số $C_{sm}$ xác định theo công thức (1).

$$C_{sm} = \frac{1{,}2AS}{T_m^{2/3}} \leq 2{,}5A \tag{1}$$

trong đó: $T_m$ là chu kỳ dao động kiểu thứ $m$ (s), xác định dựa trên cơ sở khối lượng danh định, không có hệ số của các cấu kiện hoặc kết cấu; $A$ là hệ số gia tốc lấy theo Bảng 1 và $S$ là hệ số thực địa lấy theo Bảng 2.

Với vùng đất loại III và trong các vùng mà hệ số $A$ không nhỏ hơn 0,3 thì $C_{sm} \leq 2{,}0A$. Đối với đất loại III và IV, với các kiểu dao động khác với kiểu dao động cơ bản có chu kỳ $T_m$ nhỏ hơn 0,3 s thì $C_{sm}$ xác định theo công thức (2), với chu kỳ dao động của một kiểu bất kỳ lớn hơn 0,4 s thì $C_{sm}$ xác định theo công thức (3).

$$C_{sm} = (0{,}008 + 0{,}4T_m) \cdot A \tag{2}$$

$$C_{sm} = \frac{3AS}{T_m^{4/3}} \tag{3}$$

Bảng 1. Vùng động đất [12]

| Hệ số gia tốc | Vùng động đất | Cấp (MSK-64) |
|---|---|---|
| $A \leq 0{,}09$ | 1 | Cấp $\leq$ 6,5 |
| $0{,}09 < A \leq 0{,}19$ | 2 | 6,5 < Cấp $\leq$ 7,5 |
| $0{,}19 < A \leq 0{,}29$ | 3 | 7,5 < Cấp $\leq$ 8,0 |

Bảng 2. Hệ số thực địa [12]

| Hệ số thực địa | Loại đất | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| $S$ | 1 | 1,2 | 1,5 | 2 |

### *2.2. Phương pháp đơn phổ (Single-Mode Spectral Method)*

Phương pháp đơn phổ (Single-Mode Spectral Method) là phương pháp phân tích phổ một dạng dao động dựa trên dạng dao động riêng cơ bản theo phương dọc hoặc ngang cầu. Dạng dao động này có thể được tìm thấy khi ta tác động vào kết cấu một tải trọng nằm ngang rải đều và tính toán biến dạng tương ứng của kết cấu. Chu kỳ dao động riêng được tính toán bằng cách cân bằng thế năng và động năng cực đại kết hợp với hình dạng dao động cơ bản. Biên độ của dạng chuyển vị được tính toán thông qua hệ số đáp ứng động đất đàn hồi $C_{sm}$ và phổ chuyển vị tương ứng. Biên độ này được dùng để xác định các hiệu ứng lực do động đất tác dụng vào kết cấu [22].

Quy trình phân tích kết cấu chịu tải trọng động đất theo phương pháp đơn phổ như sau: (a) Tính chuyển vị tĩnh $V_s(x)$ của kết cấu nhịp do tải trọng rải đều giả sử $P_0 = 1{,}0$ N/mm tác dụng vào kết cấu nhịp theo phương ngang hoặc dọc cầu (Hình 2); (b) Tính toán các hệ số tính toán $\alpha$ theo công thức (4) và $\beta$ theo công thức (5); (c) Xác định chu kỳ dao động $T_m$ theo công thức (7); (d) Xác định hệ số

$C_{sm}$ theo công thức (8); (e) Tính toán lực tĩnh tương đương $P_e(x)$ theo công thức (9); (f) Gán tải trọng $P_e(x)$ lên mô hình kết cấu để xác định các hiệu ứng lực tác dụng của động đất.

$$\alpha = \int V_s(x)\,dx \tag{4}$$

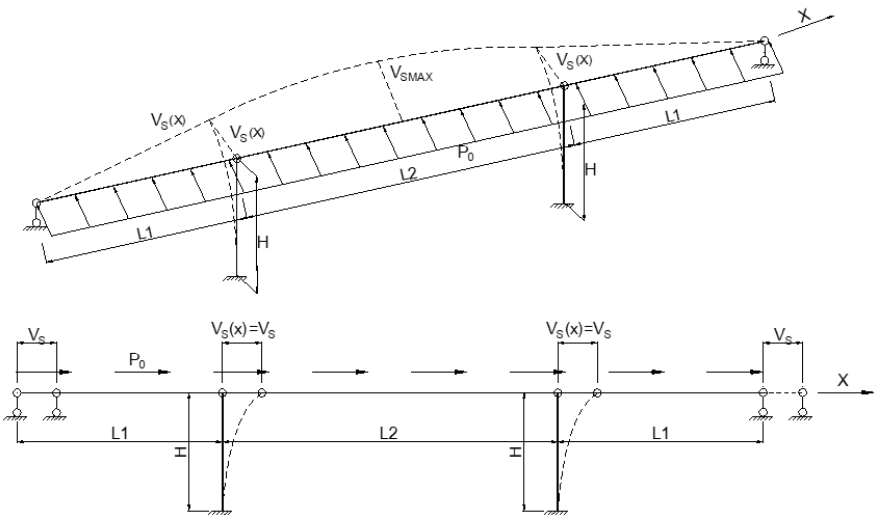
$$\beta = \int w(x) \cdot V_s(x)\,dx \tag{5}$$

$$\gamma = \int w(x) \cdot V_s(x)^2 dx \tag{6}$$

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{p_0 g \alpha}}\ (s) \tag{7}$$

$$C_{sm} = \frac{1{,}2AS}{T_m^{2/3}} \le 2{,}5A \tag{8}$$

$$p_e(x) = \frac{\beta C_{sm}}{\gamma} w(x)\, V_s(x)\ \text{(N/mm)} \tag{9}$$




Hình 2. Sơ đồ phân tích kết cấu cầu theo phương ngang và dọc dưới tác dụng tải trọng rải đều $P_0$

Cần lưu ý rằng hiệu ứng lực tác dụng lên kết cấu phải được chia cho hệ số điều chỉnh đáp ứng $R$. Đây là hệ số được quy định đối với từng bộ phận của kết cấu cầu, xét tới khả năng ứng xử không đàn hồi của các bộ phận kết cấu cầu dưới tác dụng của động đất và sẽ là không kinh tế khi thiết kế cầu với lực động đất đàn hồi quá lớn.

### *2.3. Phương pháp đa phổ (Multimode Spectral Method)*

Phương pháp phân tích đa phổ (Multimode Spectral Method – MMSM) phức tạp hơn so với phương pháp phân tích đơn phổ và rất hiệu quả trong việc phân tích phản ứng của các kết cấu tuyến tính đàn hồi phức tạp khi chịu tác động của động đất. Phương pháp này đặc biệt phù hợp đối với các kết cấu có hình học, khối lượng hoặc độ cứng không đều. Những yếu tố này gây ra sự tương tác giữa ba phương trực giao trong từng dạng dao động. Đối với các loại cầu này, nhiều dạng dao động cùng tham gia vào phản ứng tổng thể của kết cấu. Việc phân tích đa phổ thường được thực hiện bằng cách

mô hình hóa kết cấu cầu dưới dạng hệ không gian ba chiều, với khối lượng kết cấu được phân bố tại các vị trí khác nhau nhằm đại diện cho các dạng dao động của từng cấu kiện [19]. Quy tắc phổ biến là để mô phỏng dạng dao động thứ $i$, mỗi nhịp cần có ít nhất $(2i-1)$ phần tử. Với các kết cấu cầu có nhịp dài, cần nhiều phần tử hơn để mô phỏng đầy đủ các dạng dao động. Để có phản ứng hợp lý, số dạng cần xem xét thường ít nhất gấp ba lần số nhịp [12].

Các bước sau đây tóm tắt các phương trình được sử dụng trong phân tích phổ đa phổ [20, 25]: (a) Tính các dạng dao động không thứ nguyên và các tần số tương ứng $\omega$ theo công thức (10); (b) Xác định biên độ mode tuyệt đối lớn nhất trong toàn bộ lịch sử thời gian dao động theo công thức (13); (c) Tính giá trị của đại lượng phản ứng $R(t)$ (lực cắt, mô men, chuyển vị), theo công thức (14); (d) Tính giá trị lớn nhất của $R(t)$ trong thời gian xảy ra động đất bằng cách sử dụng các phương pháp tổ hợp mode các giá trị đáp ứng như phương pháp tổ hợp theo giá trị tuyệt đối (AS) theo công thức (15), phương pháp này không xét đến dấu và sự lệch pha của các giá trị cực đại của từng dạng dao động; Phương pháp tổ hợp theo căn bậc hai của tổng bình phương (SRSS – Square Root of Sum Squares) dựa trên cơ sở của các lý thuyết xác suất thống kê xác định theo công thức (16) và Phương pháp tổ hợp căn bậc hai (CQC – Complete Quadratic Combination) theo công thức (17), phương pháp này áp dụng trong trường hợp chu kỳ dao động riêng của các dạng dao động không được phân biệt rõ ràng.

$$\left[[K]-\omega^2[M]\right]\{u\}=0 \tag{10}$$

$$u_i=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j y_j=\Phi y_i \tag{11}$$

$$T_i=\frac{2\pi}{\omega_i}\ (i=1,2,\ldots,n) \tag{12}$$

$$Y_i(t)_{max}=\frac{T_i^2 S_a(\xi_i,T_i)}{4\pi^2}\frac{\{\varphi_i\}^T[M]\{B\}\ddot{u}_g}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}} \tag{13}$$

$$R(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i Y_i(t) \tag{14}$$

trong đó: $y_j$ = biên độ mode của mode thứ $j$; $\varphi_j$ = hệ số dạng mode của mode thứ $j$; $\Phi$ = ma trận dạng mode; Chu kỳ dao động cho mode thứ $i$ tính theo công thức (12); $S_a(\xi_i,T_i)=gC_{sm}$ giá trị phổ đáp ứng gia tốc; $C_{sm}$ = hệ số đáp ứng động đàn hồi theo phổ gia tốc; $A$ = hệ số gia tốc từ bản đồ hệ số gia tốc; $S$ = hệ số không thứ nguyên của nền đất tùy theo loại địa chất; $T_n$ = chu kỳ dao động của mode thứ $n$; Hệ số $A_i$ là hàm của ma trận dạng mode ($\Phi$) và mối quan hệ giữa lực và chuyển vị.

$$R=\sum|R_i|=\sum|R_i|\cdot|\Phi_i|\cdot|S_i| \tag{15}$$

$$R=\sqrt{\sum R_i^2} \tag{16}$$

$$R=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_i\rho_{ij}R_j} \tag{17}$$

Trong hệ kết cấu tuyến tính, phản ứng toàn phần có thể được ước lượng bằng cách tổ hợp các mode sau khi đã tính toán tần số dao động thực và các mode từ phân tích dao động tự do. Phản ứng cực đại không thể tính đơn thuần bằng cách cộng các phản ứng cực đại của từng mode, vì mỗi mode

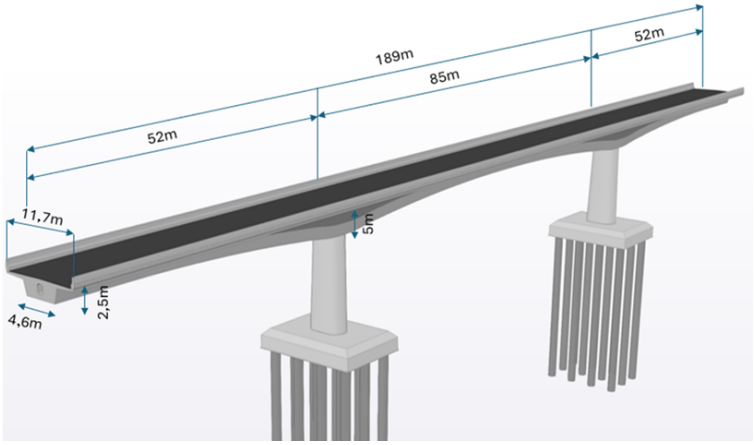
đạt đỉnh tại các thời điểm khác nhau [19]. Trong phần nghiên cứu áp dụng phương pháp CQC để tổ hợp giá trị cực đại $R$.

Theo tiêu chuẩn TCVN 11823-2017, các ứng lực động đất đàn hồi trên mỗi trục chính của một cấu kiện tính toán theo các phương vuông góc phải được tổ hợp thành các trường hợp tải trọng theo tỷ lệ phần trăm. Cụ thể, áp dụng 100% hiệu ứng động đất theo một phương cộng với 30% hiệu ứng động đất theo phương vuông góc. Tổ hợp tải động đất I-1 (Extreme Event I-1) = 100% phương ngang (Transverse) + 30% phương dọc (Longitudinal) + 30% phương thẳng đứng (Vertical). Tổ hợp tải động đất I-2 (Extreme Event I-1) = 30% phương ngang + 100% phương dọc + 30% phương thẳng đứng. Tổ hợp tải động đất 3 = 30% phương ngang + 30% phương dọc + 100% phương thẳng đứng [12, 19].

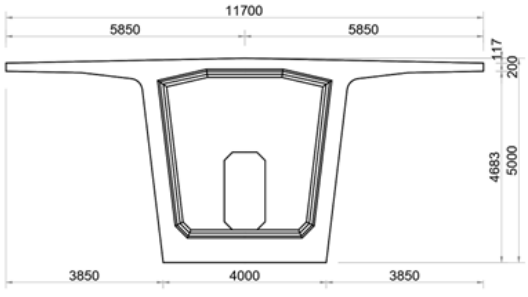
## 3. Mô phỏng và phân tích kết cấu cầu chịu tải trọng động đất

### *3.1. Đối tượng nghiên cứu*

Trong nghiên cứu này, đối tượng nghiên cứu là một kết cấu cầu dầm hộp BTƯST đúc hẫng cân bằng ba nhịp bố trí theo sơ đồ (52 + 85 + 52) m với bề rộng dầm là 11,7 m, chiều cao thay đổi từ 2,5 m tại giữa nhịp và đầu dầm đến 5 m tại đỉnh trụ. Trụ cầu có dạng thân hẹp, chiều cao thân trụ chính là 15 m được tính từ đỉnh bệ cọc tới đỉnh trụ. Bê tông dầm sử dụng loại C40, trụ sử dụng loại C30. Sơ đồ cầu, mặt cắt ngang dầm và thân trụ thể hiện trên Hình 3 và Hình 4. Điều kiện địa chất công trình giả định tại huyện Đông Anh, thành phố Hà Nội tương đương đất loại IV, vùng động đất cấp 2 theo TCVN 11823-2017. Hệ số điều chỉnh đáp ứng $R$ = 2,0 cho trụ và $R$ = 1,0 cho các liên kết của trụ với móng hay kết cấu phần trên [12]. Hai phương án liên kết giữa dầm và trụ chính cũng được nghiên cứu nhằm đánh giá ảnh hưởng của điều kiện biên đối với ứng xử của kết cấu.




Hình 3. Mô hình cầu liên tục dầm hộp đúc hẫng cân bằng



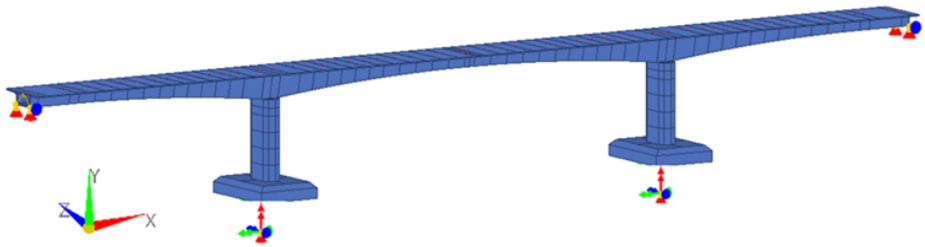

Hình 4. Mặt cắt ngang dầm cầu trên đỉnh trụ

### *3.2. Mô phỏng kết cấu cầu*

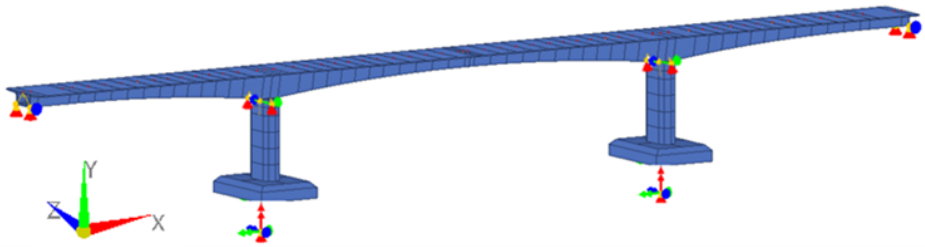
Trong nghiên cứu này, sử dụng phần mềm RM Bridge v11 để mô hình kết cấu cầu BTƯST liên tục đúc hẫng cân bằng nêu trên bằng phần tử hữu hạn. Mô hình dầm và trụ sử dụng phần tử Beam đánh số từ 101 đến 160 đối với dầm, phần tử từ 1001 đến 1008 và từ 2001 đến 2008 đối với trụ. Hình 5 thể hiện mô hình kết cấu cầu với phương án liên kết giữa dầm và trụ chính là ngàm cứng tạo thành hệ khung. Hình 6 thể hiện mô hình kết cấu cầu với liên kết dầm và trụ chính thông qua các gối cầu. Giá trị độ cứng nền móng được lấy theo Bảng 3. Hệ số thực địa $S$ = 2,0; hệ số gia tốc nền $A$ = 0,1168; hệ số điều chỉnh đáp ứng $R$ = 2,0; hệ số giảm chấn 5%. Sử dụng hai phương pháp đơn phổ và phương pháp đa phổ để xác định ứng xử tác động của hiệu ứng động đất tác dụng lên kết cấu công trình cầu.

Bảng 3. Giá trị độ cứng nền móng

| Trụ | Cx (kN/m) | Cy (kN/m) | Cz (kN/m) | CMx (kN.m) | CMy (kN.m) | CMz (kN.m) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P1 | $1 \times 10^8$ | $1 \times 10^6$ | $1 \times 10^6$ | $5 \times 10^7$ | $1 \times 10^8$ | $1 \times 10^8$ |
| P2 | $1 \times 10^8$ | $1 \times 10^6$ | $1 \times 10^6$ | $5 \times 10^7$ | $1 \times 10^8$ | $1 \times 10^8$ |



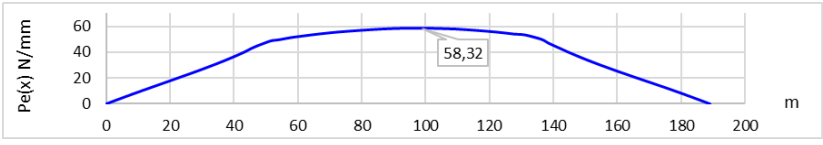

Hình 5. Mô hình phân tích kết cấu cầu bằng PTHH – trường hợp liên kết ngàm tại trụ




Hình 6. Mô hình phân tích kết cấu cầu bằng PTHH – trường hợp liên kết gối tại trụ

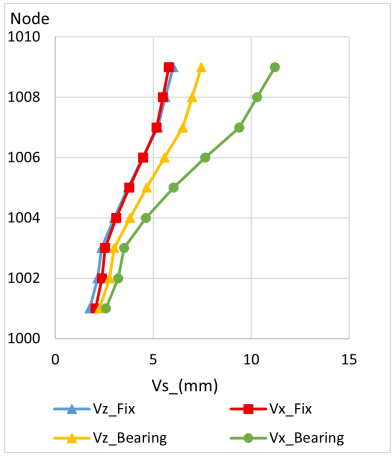
### *3.3. Kết quả phân tích theo phương pháp đơn phổ*

Đối với trường hợp liên kết ngàm tại trụ (Fix): Khi đặt lực tác động đơn vị rải đều theo phương ngang cầu thu được chuyển vị lớn nhất là 0,62 mm. Khi đặt lực tác động đơn vị rải đều theo phương dọc thu được chuyển vị là 0,38 mm. Tải trọng tĩnh tương đương xác định được theo phương dọc $P_e(x)$ = 50,9 kN/m và theo phương ngang lớn nhất là $P_e(x)$ = 58,32 kN/m được thể hiện như ở Hình 7.

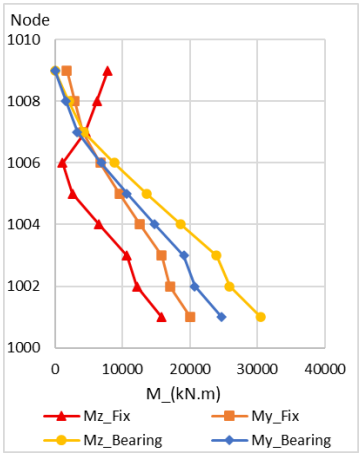



Hình 7. Biểu đồ lực tĩnh tương đương do động đất theo phương ngang

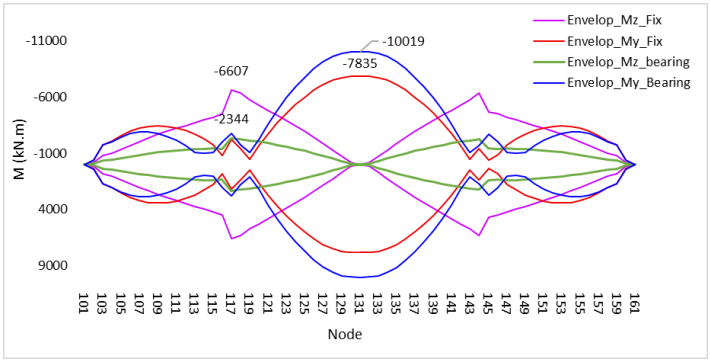
Đối với trường hợp liên kết gối đàn hồi tại trụ (Bearing): Khi đặt lực tác động đơn vị rải đều theo phương ngang cầu thu được chuyển vị lớn nhất là 0,54 mm. Khi đặt lực tác động đơn vị rải đều theo phương dọc thu được chuyển vị là 0,53 mm.




Hình 8. Biểu đồ chuyển vị của trụ cầu với 2 trường hợp liên kết dầm và trụ theo phương pháp đơn phổ




Hình 9. Biểu đồ mô men của trụ cầu với 2 trường hợp liên kết dầm và trụ theo phương pháp đơn phổ




Hình 10. Biểu đồ bao mô men dầm với 2 trường hợp liên kết dầm và trụ theo phương pháp đơn phổ dưới tải trọng động đất

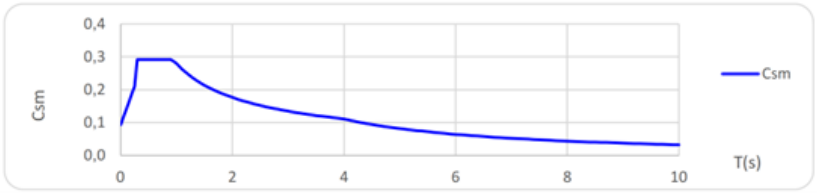
Nội lực do hiệu ứng động đất gây ra thể hiện như trên Hình 9, Hình 10 và chuyển vị như trên Hình 8. Có thể thấy rằng, khi liên kết gối bố trí tại đỉnh trụ, chuyển vị và nội lực phát sinh đều lớn hơn so với trường hợp sử dụng liên kết ngàm.

Đối với phương án liên kết gối tại trụ theo phương ngang chuyển vị lớn nhất tại đỉnh trụ là 7,45 mm, mô men lớn nhất tại đáy thân trụ là 24752 kNm. Theo phương dọc chuyển vị đỉnh trụ là 11,21 mm và mô men tại đáy trụ 30532 kNm. Với kết cấu nhịp cho mô men theo phương ngang là 10019 kNm lớn hơn so với phương dọc có mô men là 2344 kNm. Đối với phương án liên kết ngàm tại trụ theo phương ngang chuyển vị lớn nhất tại đỉnh trụ là 6,01 mm, mô men lớn nhất tại đáy thân trụ là 20111 kNm. Theo phương dọc chuyển vị đỉnh trụ là 5,79 mm và mô men tại đáy trụ 15837 kNm. Với kết cấu nhịp cho mô men theo phương ngang là 7835 kNm lớn hơn so với phương dọc có mô men là 6607 kNm.

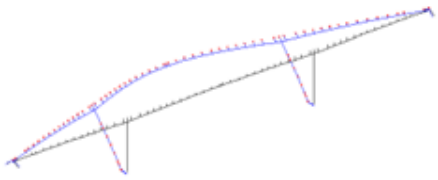
### *3.4. Kết quả phân tích theo phương pháp đa phổ*

Hệ số phản ứng động đất đàn hồi $C_{sm}$, đối với phương pháp đa phổ xét trong chu kỳ 10 s thu được phổ phản ứng như thể hiện trên Hình 11. Kết quả phân tích các mode dao động đầu tiên thể hiện trên

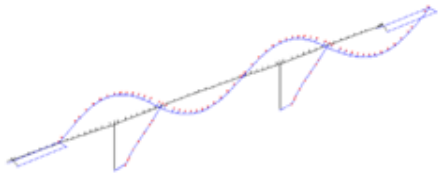
Hình 12, Hình 13 và Bảng 4.



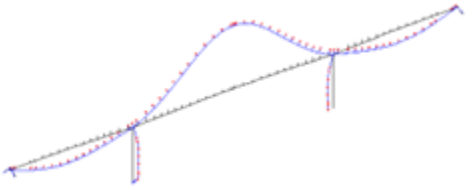

Hình 11. Biểu đồ hệ số phản ứng động đất đàn hồi $C_{sm}$ theo phương pháp đa phổ



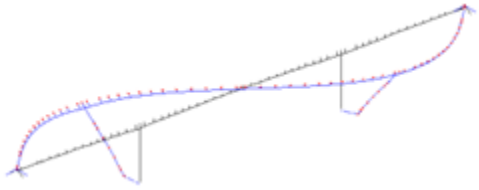
(a) Eigenmode 1, $f_1$ = 1,404 Hz



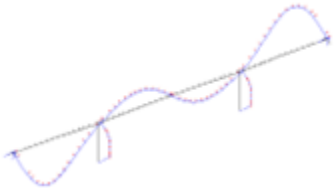
(b) Eigenmode 2, $f_2$ = 1,475 Hz



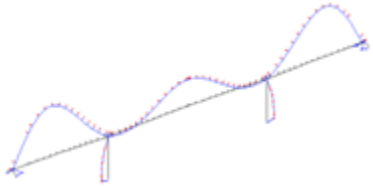
(c) Eigenmode 3, $f_3$ = 1,896 Hz



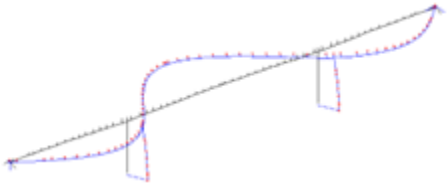
(d) Eigenmode 4, $f_4$ = 2,216 Hz



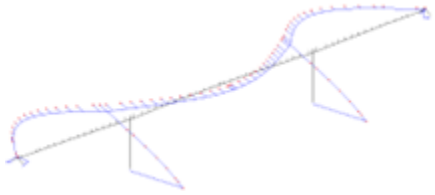
(e) Eigenmode 5, $f_5$ = 3,045 Hz



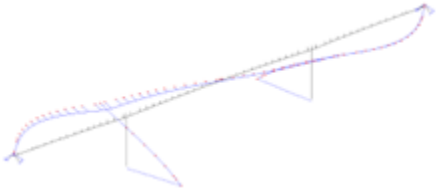
(f) Eigenmode 6, $f_6$ = 3,282 Hz



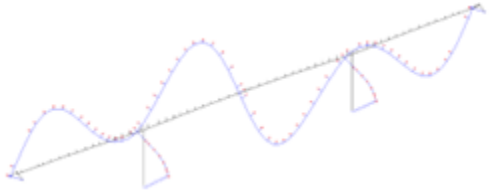
(g) Eigenmode 7, $f_7$ = 3,612 Hz



(h) Eigenmode 8, $f_8$ = 4,584 Hz

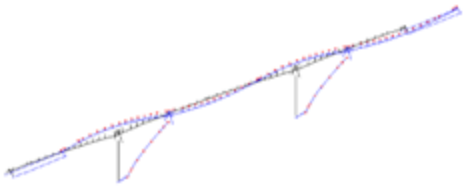


(i) Eigenmode 9, $f_9$ = 4,618 Hz

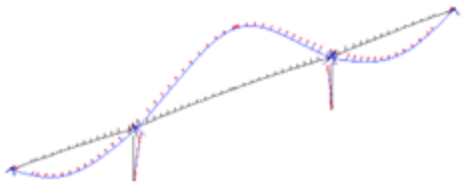


(j) Eigenmode 10, $f_{10}$ = 4,625 Hz

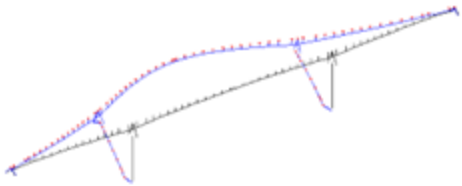
Hình 12. 10 mode dao động đầu tiên với trường hợp liên kết ngàm tại trụ



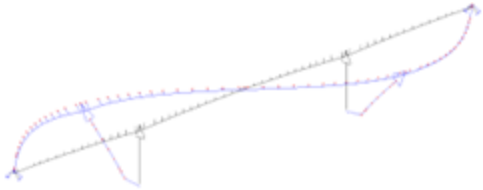
(a) Eigenmode 1, $f_1$ = 1,250 Hz



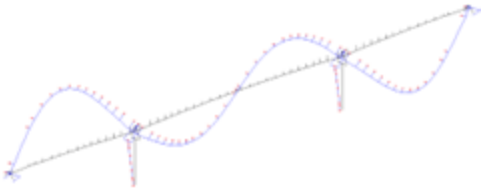
(b) Eigenmode 2, $f_2$ = 1,302 Hz



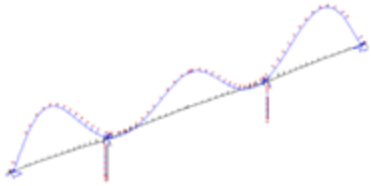
(c) Eigenmode 3, $f_3$ = 1,370 Hz



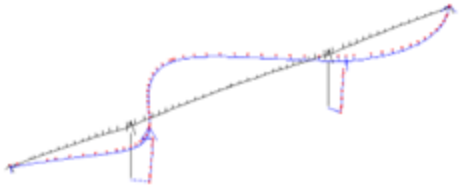
(d) Eigenmode 4, $f_4$ = 2,130 Hz



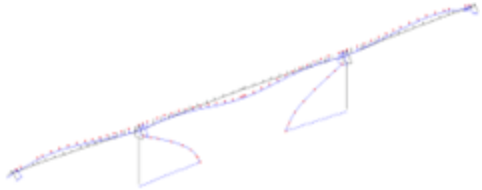
(e) Eigenmode 5, $f_5$ = 2,521 Hz



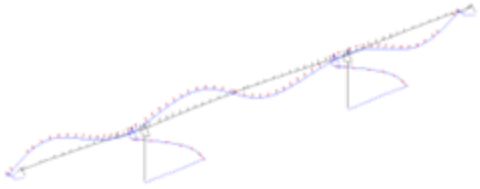
(f) Eigenmode 6, $f_6$ = 3,229 Hz



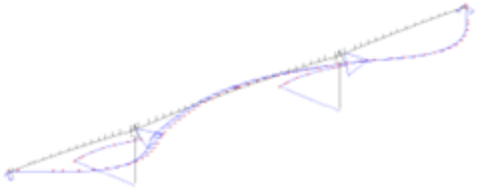
(g) Eigenmode 7, $f_7$ = 3,427 Hz



(h) Eigenmode 8, $f_8$ = 4,312 Hz



(i) Eigenmode 9, $f_9$ = 4,482 Hz



(j) Eigenmode 10, $f_{10}$ = 4,562 Hz

Hình 13. 10 dạng dao động (mode) đầu tiên với trường hợp liên kết gối tại trụ

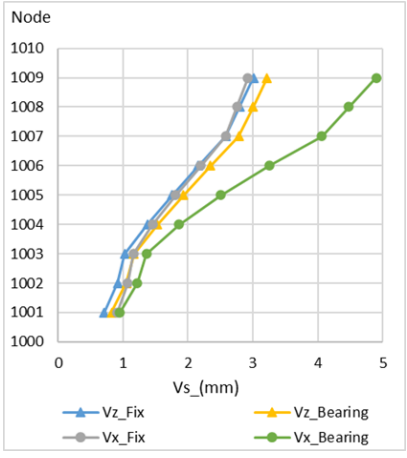
Với phương án liên kết ngàm, mode thứ 1 là dạng dao động uốn ngang đầu tiên, mode thứ 2 là dao động uốn dọc đầu tiên và mode thứ 3 là dao động uốn đứng đầu tiên. Tổng khối lượng tham gia trong 10 dao động đầu tiên theo phương dọc cầu 95,73% và theo phương ngang cầu 94,85%. Đối với trường hợp bố trí gối trên trụ, mode thứ 1 là dạng dao động uốn dọc đầu tiên, mode thứ 2 là dao động uốn đứng đầu tiên và mode thứ 3 là dạng dao động uốn ngang đầu tiên. Tổng khối lượng tham gia trong 10 dao động đầu tiên theo phương dọc cầu 99,34% và theo phương ngang cầu 94,59%. Do trong thiết kế động đất phương thẳng đứng không chịu chi phối lớn như phương dọc và phương ngang vì vậy khi phương dọc và phương ngang có tổng khối lượng tham gia phản ứng lớn hơn 90% [12, 13].

Bảng 4. Tần số dao động và hệ số tham gia khối lượng của 10 mode dao động đầu tiên – trường hợp ngàm tại trụ

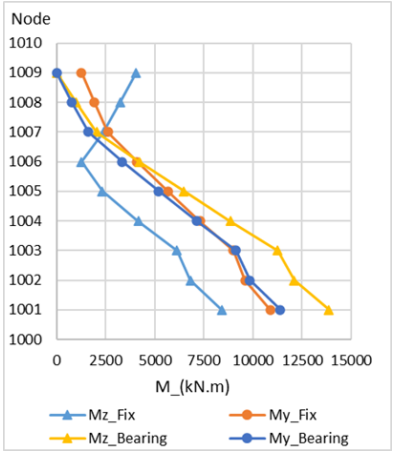
| Mode | Tần số (Hz) | Hệ số tham gia khối lượng | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Dx (%) | Dy (%) | Dz (%) | Rx (%) | Ry (%) | Rz (%) |
| 1 | 1,404 | 0 | 0 | 63,72 | 21,11 | 0 | 0 |
| 2 | 1,475 | 72,93 | 0 | 0 | 0 | 0 | 16,57 |
| 3 | 1,896 | 0 | 6,02 | 0 | 0,07 | 0 | 0 |
| 4 | 2,216 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 60,63 |
| 5 | 3,045 | 16,89 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,68 |
| 6 | 3,282 | 0 | 24,37 | 0 | 0 | 0 | 0,01 |
| 7 | 3,612 | 0 | 0 | 21,83 | 0,07 | 0 | 0 |
| 8 | 4,584 | 0 | 0 | 9,3 | 36,04 | 0 | 0,12 |
| 9 | 4,618 | 0 | 0 | 0 | 1,07 | 11,63 | 0 |
| 10 | 4,625 | 5,91 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,08 |
| SUM | | 95,73 | 30,39 | 94,85 | 58,37 | 11,63 | 78,09 |

Bảng 5. Tần số dao động và hệ số tham gia khối lượng của 10 mode dao động đầu tiên trường hợp gối tại trụ

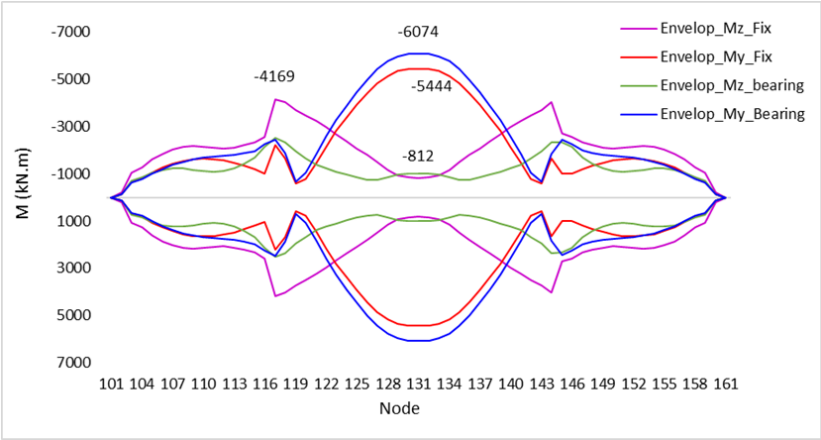
| Mode | Tần số (Hz) | Hệ số tham gia khối lượng | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Dx (%) | Dy (%) | Dz (%) | Rx (%) | Ry (%) | Rz (%) |
| 1 | 1,250 | 77,51 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,39 |
| 2 | 1,302 | 0 | 2,54 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1,370 | 0 | 0 | 64,56 | 13,99 | 0 | 0 |
| 4 | 2,130 | 0 | 0 | 0 | 0 | 65,58 | 0 |
| 5 | 2,521 | 0,74 | 0 | 0 | 0 | 0 | 52,07 |
| 6 | 3,229 | 0 | 28,80 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 3,427 | 0 | 0 | 19,44 | 0,01 | 0 | 0 |
| 8 | 4,312 | 0 | 0 | 0 | 9,72 | 2,80 | 0 |
| 9 | 4,482 | 21,09 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,16 |
| 10 | 4,562 | 0 | 0 | 10,59 | 0,01 | 0 | 0 |
| SUM | | 99,34 | 31,34 | 94,59 | 23,73 | 68,38 | 54,62 |




Hình 14. Biểu đồ chuyển vị trụ cầu với 2 trường hợp liên kết dầm và trụ theo phương pháp đa phổ




Hình 15. Biểu đồ mô men trụ cầu với 2 trường hợp liên kết dầm và trụ theo phương pháp đa phổ - trụ cầu




Hình 16. Biểu đồ bao mô men dầm với 2 trường hợp liên kết dầm và trụ theo phương pháp đa phổ dưới tải trọng động đất – kết cấu nhịp

Tương tự như trường hợp phân tích bằng phương pháp đơn phổ, kết quả cho thấy nội lực trường hợp liên kết gối tại trụ lớn hơn trường hợp ngàm tại trụ được thể hiện trên Hình 14, Hình 16 và chuyển vị trên Hình 15. Đối với phương án liên kết gối tại trụ theo phương ngang chuyển vị lớn nhất tại đỉnh trụ là 3,22 mm, mô men lớn nhất tại đáy thân trụ là 11394 kNm. Theo phương dọc chuyển vị đỉnh trụ là 4,90 mm và mô men tại đáy trụ 13871 kNm. Với kết cấu nhịp cho mô men theo phương ngang là 6074 kNm lớn hơn so với phương dọc có mô men là 2521 kNm. Đối với phương án liên kết ngàm tại trụ theo phương ngang chuyển vị lớn nhất tại đỉnh trụ là 3,01 mm, mô men lớn nhất tại đáy thân trụ là 10894 kNm. Theo phương dọc chuyển vị đỉnh trụ là 2,92 mm và mô men tại đáy trụ 8403 kNm. Với kết cấu nhịp cho mô men theo phương ngang là 5444 kNm lớn hơn so với phương dọc có mô men là 4169 kNm.

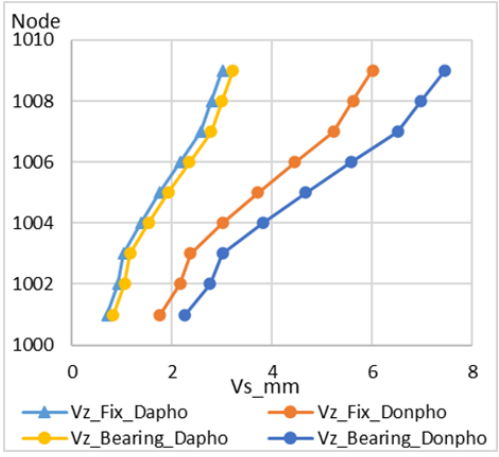
## 4. Thảo luận và đánh giá

Các kết quả phân tích cho thấy chuyển vị và nội lực tại đáy thân trụ và theo phương ngang cầu là lớn nhất ở cả hai trường hợp theo cả hai phương pháp thể hiện trong Hình 17, Hình 18. Với cả 2 phương pháp phân tích, các giá trị này trong mô hình sử dụng liên kết gối đều lớn hơn so với mô hình sử dụng liên kết ngàm. Đối với phân tích đơn phổ, chênh lệch chuyển vị giữa hai phương án liên kết dầm và trụ là 23,96% theo phương ngang và 93,61% theo phương dọc, trong khi nội lực tại đáy trụ chênh lệch 23,08% phương ngang và 92,79% theo phương dọc. Ngược lại, với phân tích đa phổ, mức chênh lệch thấp hơn nhiều: chỉ 6,98% theo phương ngang và 67,81% theo phương dọc đối với chuyển vị; nội lực tại đáy trụ chênh lệch 4,59% phương ngang và 65,07% theo phương dọc. Kết quả này phản ánh rằng liên kết gối làm kết cấu linh hoạt hơn nhưng đồng thời khiến kết cấu trụ cầu chịu ảnh hưởng động đất lớn hơn Hình 19, Hình 20.

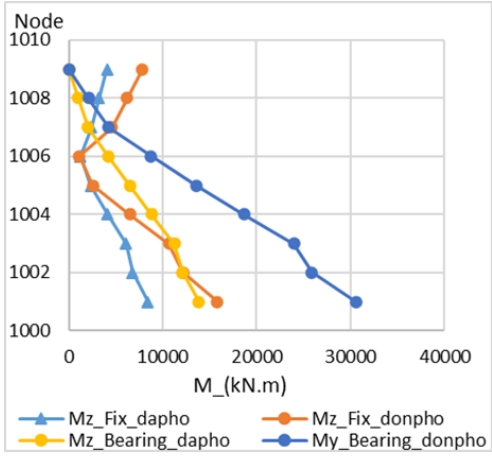
Kết quả so sánh cũng chỉ ra rằng nội lực và chuyển vị cực đại của kết cấu với phương pháp phân tích đa phổ có xu hướng thấp hơn đáng kể so với các giá trị tương ứng với phương pháp phân tích đơn phổ (hơn 30% đối với giá trị nội lực và 100% với giá trị chuyển vị). Phương pháp đơn phổ cho nội lực lớn hơn do phương pháp này giả định rằng toàn bộ hệ thống dao động chủ yếu theo mode dao động cơ bản (Fundamental Mode), tức là tần số dao động đầu tiên. Đáp ứng của mode cơ bản thường chiếm ưu thế và có biên độ lớn nhất so với các mode cao hơn. Việc không tính đến sự giảm thiểu nội lực do hiệu ứng pha hoặc tương tác giữa các mode (như trong phương pháp đa phổ), dẫn đến nội lực trong phương pháp đơn phổ có xu hướng cao hơn so với phương pháp đa phổ.

Các tiêu chuẩn thiết kế thường sử dụng phương pháp đơn giản hóa để đảm bảo an toàn, nên kết

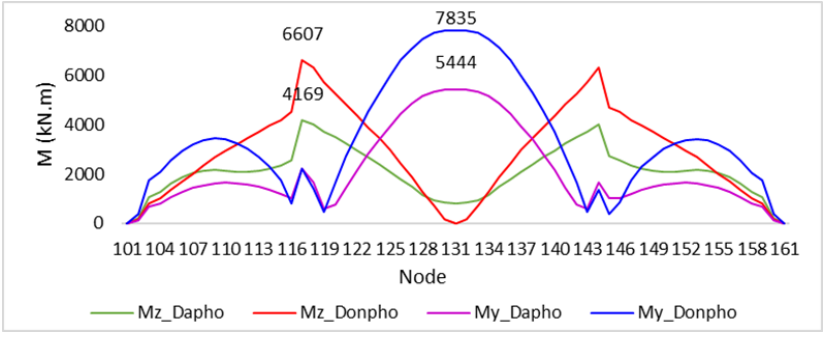
quả nội lực từ phương pháp đơn phổ có thể mang tính ước lượng quá mức (Overestimate). Trong khi đó, phương pháp đa phổ cho nội lực nhỏ hơn do phương pháp này xem xét nhiều mode dao động. Mặc dù các phản ứng từ các mode cao hơn thường giảm dần so với mode cơ bản nhưng do sự lệch pha giữa các mode khác nhau ảnh hưởng đến giá trị tổng hợp có xu hướng thấp hơn so với việc chỉ xét một mode cơ bản như phương pháp đơn phổ. Vì vậy, phương pháp đa phổ phản ánh chính xác hơn cách mà năng lượng được phân phối qua các mode dao động khác nhau, giúp giảm nội lực không cần thiết bằng hiệu ứng triệt tiêu pha trong quá trình tính toán thiết kế.



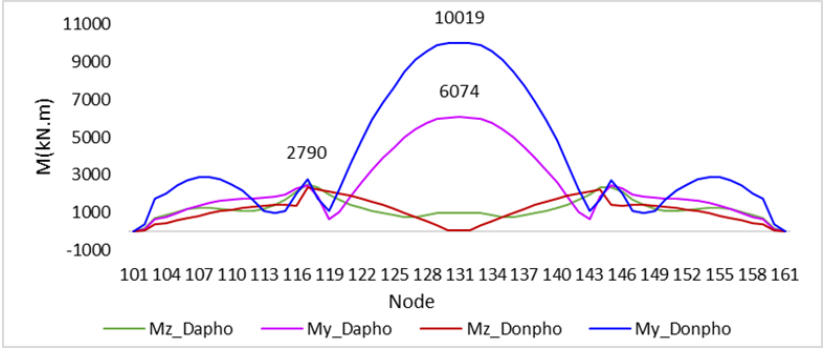

Hình 17. Biểu đồ chuyển vị thân trụ với 2 trường hợp liên kết dầm và trụ theo hai phương pháp phân tích




Hình 18. Biểu đồ mô men thân trụ với 2 trường hợp liên kết dầm và trụ theo hai phương pháp phân tích




Hình 19. Biểu đồ mô men dầm trường hợp liên kết ngàm theo 2 phương pháp phân tích dưới tải trọng động đất




Hình 20. Biểu đồ mô men dầm trường hợp liên kết gối theo 2 phương pháp phân tích dưới tải trọng động đất

Phương pháp đơn phổ thường cho nội lực lớn nhất theo phương ngang, còn phương pháp đa phổ lại chỉ ra sự ảnh hưởng đồng thời của cả phương ngang và phương dọc, cho thấy sự ảnh hưởng rõ ràng các mode dao động cao trong phản ứng tổng thể của cầu. Điều này khẳng định sự cần thiết trong việc xem xét tác động của các mode bậc cao trong việc phân tích động đối với các công trình cầu có kết cấu lớn và phức tạp và sử dụng phương pháp đa phổ để phân tích động đất là phù hợp hơn so với phân tích đơn phổ trong quá trình phân tích dao động cho các công trình này dưới các tải trọng nguy hiểm như động đất.

## 5. Kết luận

Bài báo phân tích ứng xử động đất, so sánh nội lực và chuyển vị của một kết cấu cầu dầm liên tục BTƯST đúc hẫng cân bằng theo hai phương pháp phân tích động đất được sử dụng phổ biến là phân tích đơn phổ và phân tích đa phổ. Từ kết quả nghiên cứu phân tích có thể rút ra một số kết luận sau:

- Phương pháp đơn phổ chỉ tập trung vào phản ứng của một mode dao động chính của kết cấu, bỏ qua ảnh hưởng dao động bậc cao và tương tác giữa các mode dao động. Vì vậy, nội lực trong các kết cấu cầu đặc biệt là trụ rất lớn, đặc biệt khi bỏ qua ảnh hưởng dao động bậc cao và tương tác giữa các mode dao động. Phương pháp đơn phổ có ưu điểm dễ áp dụng, nhanh chóng, phù hợp với các kết cấu có phản ứng chi phối bởi một mode dao động chính, thích hợp phân tích động đất tuyến tính. Tuy nhiên, phương pháp này không phản ánh đầy đủ các ứng xử phức tạp của các kết cấu có nhiều dạng mode dao động.

- Phương pháp đa phổ phản ánh được ứng xử phức tạp của các kết cấu chịu động đất bởi việc xem xét đến nhiều mode dao động khác nhau, phù hợp với các công trình cầu có kết cấu phức tạp, chiều dài lớn. Nội lực, chuyển vị của toàn bộ hệ kết cấu phân tích theo phương pháp đa phổ cũng cho giá trị nhỏ hơn đáng kể so với phương pháp đơn phổ do sự cộng dồn giữa các mode dao động lệch pha. Nhược điểm của phương pháp này là yêu cầu nhiều thông tin hơn, phân tích, tính toán phức tạp hơn.

- Đối với kết cấu công trình, điều kiện biên là đặc biệt quan trọng, ảnh hưởng nhiều đến ứng xử, nội lực, chuyển vị của kết cấu. Đối với cầu liên tục thi công đúc hẫng cân bằng, giải pháp liên kết giữa dầm và trụ chính ảnh hưởng nhiều đến kết quả phân tích kết cấu chịu động đất. Liên kết ngàm giúp cho kết cấu cứng hơn, giảm chuyển vị của cầu, phân phối đều nội lực về trụ. Tuy nhiên, nhược điểm của liên kết ngàm là tạo ra mô men tại đỉnh trụ, làm tăng yêu cầu về khả năng chịu lực và có thể gây nguy cơ phá hoại cục bộ. Ngược lại, liên kết gối cho phép cầu có khả năng xoay hoặc chuyển vị nhất định tại trụ, làm tăng tính linh hoạt của kết cấu, giúp giảm nội lực tập trung tại trụ. Tuy nhiên, do kết cấu linh hoạt hơn nên chuyển vị tổng thể lại lớn hơn, làm tăng biên độ dao động và nguy cơ mất ổn định tổng thể khi chịu động đất mạnh và nội lực tại đáy thân trụ là rất lớn.

- Hiện nay, khi thiết kế cầu chịu động đất, đặc biệt là các cầu nhịp lớn, các kỹ sư thường sử dụng nguyên lý kết cấu đủ cứng, đủ khỏe để có thể chịu được tác động của các hiệu ứng tải trọng động đất, bởi vậy giá thành xây dựng công trình thường cao. Thêm nữa, việc sử dụng phổ phản ứng tiêu chuẩn có thể không phản ánh chính xác điều kiện địa chấn thực tế tại khu vực công trình, đặc biệt trong các vùng có địa chất phức tạp. Lựa chọn phương pháp phân tích và giải pháp liên kết giữa dầm và trụ phù hợp có thể giúp kết cấu chịu tải trọng động đất theo nguyên lý cùng dao động và hồi phục. Việc sử dụng các loại gối cách chấn, thiết bị giảm chấn tiên tiến hay thiết kế khớp dẻo trong thiết kế kết cấu cầu chịu động đất sẽ làm giảm kích thước, tiết kiệm vật liệu và hạ giá thành xây dựng.

## Tài liệu tham khảo

[1] Kramer, S. L. (1996). *Geotechnical earthquake engineering*. Prentice Hall, New York.
[2] USGS (2024). Earthquake Hazards Program. *Earthquake Spectra*, 40(1):5–88.

[3] Tafheem, Z., Jihan, J. I., Samdanee, T., Islam, M. Z., Tarin, A. S. M. (2016). Earthquake response analysis of a multistoried rc building under equivalent static and dynamic loading as per bangladesh national building code 2006. *Malaysian Journal of Civil Engineering*, 28(1).

[4] Nguyễn, H. P., Phạm, T. T. (2015). Tập bản đồ xác suất nguy hiểm động đất Việt Nam và Biển Đông. *Tạp chí Khoa học và Công nghệ Biển*, 15(1):77–90.

[5] Trần, T. T., Nguyễn, H. A., Nguyễn, K. H. (2012). Đánh giá chuyển vị mục tiêu cho nhà cao tầng chịu động đất bằng các phương pháp tĩnh phi tuyến. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, 6(3):45–52.

[6] Fragiadakis, M. (2013). Response spectrum analysis of structures subjected to seismic actions. *Encyclopedia of Earthquake Engineering*, Springer, 3–18.

[7] Nguyễn, H. H., Nguyễn, H. H., Vũ, X. T. (2014). Phổ phản ứng chuyển vị trong phân tích nhà cao tầng chịu động đất ở Việt Nam bằng phương pháp tĩnh phi tuyến. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, 4: 3–9.

[8] Chopra, A. K. (2012). *Dynamics of Structures: Theory and applications to earthquake engineering*. Pearson Education, Inc.

[9] Su, L., Dong, S. L., Kato, S. (2006). A new average response spectrum method for linear response analysis of structures to spatial earthquake ground motions. *Engineering Structures*, 28(13):1835–1842.

[10] Nguyen, Q. C., Nguyen, X. D., Pham, D. P., Nguyen, T. D. (2023). Evaluation of the applicability of simplified single-mode spectral analysis in the preliminary seismic design of isolated bridge according to TCVN 11823: 2017. *Proceedings of the International Conference, IBST*.

[11] Phan, H. N., Võ, N. K., Nguyễn, H. V., Hoàng, P. H. (2021). Phân tích ứng xử địa chấn và kiểm soát hư hại kết cấu trụ cầu bê tông cốt thép sử dụng phương pháp phân tích tĩnh và động phi tuyến. *Tạp chí Khoa học và Công nghệ – Đại học Đà Nẵng*, 37–42.

[12] TCVN 11823:2017. *Bộ tiêu chuẩn quốc gia về thiết kế cầu đường bộ*. Bộ Khoa học và Công nghệ, Việt Nam.

[13] AASHTO (2017). *AASHTO LRFD bridge design specifications*. American Association of State Highway and Transportation Officials.

[14] TCVN 9386:2025. *Thiết kế kết cấu chịu động đất*. Bộ Khoa học và Công nghệ, Việt Nam.

[15] Pettorruso, C., Quaglini, V. (2024). Comparison of Linear and Nonlinear Procedures for the Analysis of the Seismic Performance of Straight Multi-Span RC Bridges. *Buildings*, 14(2):464.

[16] Qu, B., Goel, R. K. (2015). Fault-rupture response spectrum analysis of a four-span curved bridge crossing earthquake fault rupture zones. *Structures Congress 2015*.

[17] Tures, J., Goel, R. K., Qu, B. (2013). Validation and Implementation of a Simplified Analysis Procedure for Bridges Crossing Earthquake Fault Ruptures. *Structures Congress 2013: Bridging Your Passion with Your Profession*.

[18] Goel, R., Qu, B., Tures, J., Rodriguez, O. (2014). Validation of fault rupture-response spectrum analysis method for curved bridges crossing strike-slip fault rupture zones. *Journal of Bridge Engineering*, 19(5): 06014002.

[19] Chen, W.-F., Duan, L. (2014). *Bridge engineering handbook: construction and maintenance*, volume 5. CRC Press.

[20] Yashinsky, M., Moehle, J., Eberhard, M. (2014). Earthquake damage to bridges. Chen, W.-F., Duan, L., editors, *Bridge Engineering Handbook (2nd Edition) – Seismic Design*, 53–97.

[21] Trifunac, M. D. (2012). Earthquake response spectra for performance based design – A critical review. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 37:73–83.

[22] Dao, S. D. (2018). *Tính toán tải trọng động đất tác dụng lên trụ cầu bằng phương pháp đàn hồi dạng đơn*. 7.

[23] Nguyễn, Đ. M. (2010). Phương pháp phổ phản ứng nhiều dạng dao động và tính toán nhà cao tầng chịu động đất theo TCXDVN 375: 2006. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, 4:8–21.

[24] Nguyễn, T. Đ., Phùng, B. T., Nguyễn, X. Đ. (2024). Tổng quan về tính toán phổ phản ứng gia tốc đàn hồi và thiết kế công trình cầu chống động đất. *Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải*, 75(5):1882–1896.

[25] Ngô, Đ. Q., Bùi, C. Đ., Nguyễn, V. A., Trần, N. L. (2012). *Mô hình hóa và phân tích kết cấu cầu với MIDAS/CIVIL.: Ứng dụng. Tập 2*. Xây dựng.