

# PHÂN TÍCH TÍNH TẮM FGM CÓ VI BỌT RỖNG TRÊN NỀN ĐÀN HỒI DƯỚI TÁC DỤNG TẢI TRỌNG CƠ HỌC, NHIỆT ĐỘ VÀ ĐỘ ẨM THEO LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC NHẤT

Tạ Thị Hiền<sup>a</sup>, Trần Minh Tú<sup>b,\*</sup>, Phạm Thúy Hằng<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Khoa Công trình, Trường Đại học Giao thông Vận tải,  
số 3 phố Cầu Giấy, phường Láng, Hà Nội, Việt Nam

<sup>b</sup>Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,  
55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam

<sup>c</sup>Công ty tư vấn Đại học Xây dựng (CCU), 55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 22/04/2025, Sửa xong 28/05/2025, Chấp nhận đăng 17/06/2025

## Tóm tắt

Bài báo tiến hành phân tích tĩnh tấm chữ nhật FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak chịu tải trọng cơ học, nhiệt độ và độ ẩm. Bốn loại vật liệu P-FGM được xét đến gồm tấm FGM hoàn hảo, tấm FGM có vi bọt rỗng phân bố đều, không đều phân bố bậc nhất và không đều phân bố theo hàm logarit. Dựa trên nguyên lý chuyển vị khả dĩ, hệ phương trình cân bằng được thiết lập trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất gồm có năm thành phần chuyển vị, sau đó được giải bằng cách sử dụng dạng nghiệm Navier cho tấm chữ nhật liên kết khớp trên chu tuyến. Độ tin cậy của lời giải và chương trình tính được kiểm chứng với các kết quả đã công bố của các tác giả uy tín. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước, nhiệt độ, độ ẩm, và nền đàn hồi đến độ võng và các thành phần ứng suất của tấm được khảo sát qua các ví dụ số.

**Từ khóa:** phân tích tĩnh; tấm FGM; tấm FGM có vi bọt rỗng; biến dạng cắt bậc nhất; lời giải Navier; nền đàn hồi; tải trọng cơ-nhiệt-ẩm.

STATIC ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED PLATES WITH POROSITIES RESTING ON ELASTIC FOUNDATION UNDER MECHANICAL AND HYGRO-THERMAL LOADING WITHIN THE FRAMEWORK OF FIRST-ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY

## Abstract

This paper conducts the static analysis of a rectangular functionally graded plate with porosities, resting on a Winkler-Pasternak elastic foundation, subjected to mechanical and hygrothermal loading. Perfect and imperfect functionally graded materials (FGMs) with three porosity distribution patterns (even, uneven, and logarithmic uneven) are considered. Based on the minimum potential energy principle, the equilibrium equations are derived within the framework of first-order shear deformation theory, and then solved using the Navier technique for simply supported rectangular plates. The reliability of the proposed solution and the self-written MATLAB code is verified against existing, authorized results. The effects of material, geometric, mechanical-hygrothermal, and elastic foundation parameters on deflection and stress components are investigated through numerical examples.

**Keywords:** static analysis; FG plates; FG plates with porosities; first-order shear deformation theory; Navier solution; elastic foundation; hygro-thermo-mechanical loading.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2025-19\(3V\)-03](https://doi.org/10.31814/stce.huce2025-19(3V)-03) © 2025 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

## 1. Mở đầu

Trong những năm gần đây, những tiến bộ vượt bậc của khoa học và công nghệ đã thúc đẩy các nghiên cứu về khoa học vật liệu trong việc tìm kiếm các loại vật liệu mới với những tính chất khác

\*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: [tutm@huce.edu.vn](mailto:tutm@huce.edu.vn) (Tú, T. M.)

biệt so với các loại vật liệu truyền thống. Vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Material - FGM) được coi là một trong những phát kiến bước ngoặt của khoa học vật liệu. Vật liệu FGM ngày càng được phát triển và ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực do sở hữu nhiều đặc tính ưu việt so với các vật liệu composite thông thường. Vì thế, phân tích về ứng xử cơ học của kết cấu FGM là một trong những hướng nghiên cứu được nhiều nhà khoa học quan tâm, chẳng hạn, Chi và Chung [1], Chen [2], Zenkour [3],...

Trong quá trình chế tạo, do nhiệt độ đông kết khác nhau của các pha vật liệu thành phần nên trong cấu trúc vật liệu FGM thường xuất hiện các vi bọt rỗng. Sự xuất hiện của các vi bọt rỗng này làm ảnh hưởng đến cơ tính của vật liệu FGM. Đã có nhiều nghiên cứu về ứng xử cơ học của các kết cấu bằng vật liệu FGM có vi bọt rỗng được công bố. Chẳng hạn như Merdaci [4] sử dụng lý thuyết cắt bậc cao để phân tích tĩnh tấm FGM có vi bọt rỗng. Bathini và Reddy [5] phân tích ứng xử uốn của tấm FGM có vi bọt rỗng bằng cách sử dụng lý thuyết bậc cao mới. Trên cơ sở lý thuyết tấm bốn ẩn chuyển vị, Demirhan và Taskin [6] phân tích ứng xử uốn và dao động riêng của tấm FGM có vi bọt rỗng. Tú và cs. [7] phân tích tĩnh tấm FGM có vi bọt rỗng trên nền đàn hồi Kerr theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản. Ảnh hưởng của vi bọt rỗng đến phân tích uốn của các tấm sandwich FGM khác nhau theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao được nghiên cứu bởi Daikh [8]. Alghanmi [9] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt với bốn ẩn chuyển vị để phân tích tĩnh tấm sandwich FGM với các dạng phân bố lỗ rỗng khác nhau.

Trong thực tế, kết cấu tấm thường được mô phỏng như là kết cấu đặt trên nền đàn hồi hoặc được bao quanh bởi môi trường đàn hồi như mặt đường trên nền đất, đường ống thoát nước trong lòng đất, ống dẫn dầu qua biển,... Nhiều mô hình nền khác nhau đã được đề xuất nhưng hai mô hình nền thông dụng nhất thường được đề cập đến là mô hình nền Winkler, và mô hình nền Pasternak. Xia và cs. [10] phân tích uốn và dao động riêng tấm nhiều lớp đặt trên nền đàn hồi Winkler dựa trên sự kết hợp giữa lý thuyết nhiều lớp liên tiếp bậc cao và phương pháp không lưới. Benyoucef [11] phân tích ứng xử uốn tấm FGM dày trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak sử dụng lý thuyết biến dạng cắt hyperbol. Dao động riêng của tấm FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak được Kumar và cs. [12] khảo sát theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Shahsavari và cs. [13] phân tích dao động tự do cho các tấm FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr theo lý thuyết tấm dạng hyperbol tựa 3D.

Khi làm việc trong môi trường có nhiệt độ, độ ẩm thì ảnh hưởng của lực nhiệt-ẩm cần được kể đến. Các nghiên cứu về ảnh hưởng của nhiệt độ và độ ẩm luôn thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trên thế giới. Sayyad và Ghugal [14] đã phân tích ảnh hưởng của tải trọng cơ-nhiệt-ẩm phi tuyến lên ứng xử uốn của tấm chữ nhật FGM tựa trên nền đàn hồi hai tham số sử dụng lý thuyết tấm với bốn ẩn số chuyển vị. Lý thuyết tấm bậc cao tựa 3D được Mashat [15] sử dụng để phân tích ứng xử uốn của tấm FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi dưới tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt-ẩm. Zidi và cs. [16] phân tích uốn của tấm FGM đặt trên nền đàn hồi, dưới tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt-ẩm sử dụng lý thuyết bốn ẩn số chuyển vị cải tiến. Zenkour [17] phân tích ảnh hưởng của lực cắt ngang và biến dạng pháp tuyến lên tấm FGM đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak dưới tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt-ẩm theo lý thuyết biến dạng cắt có kể đến biến dạng pháp tuyến với năm ẩn số chuyển vị.

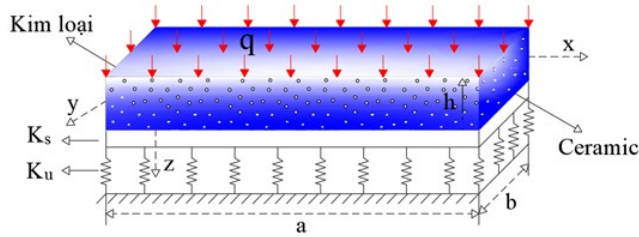
Qua nghiên cứu tổng quan ở trên, có thể thấy rằng có rất nhiều nghiên cứu về ứng xử tĩnh và động của tấm FGM hoàn hảo (không có vi bọt rỗng), cũng như của tấm FGM có vi bọt rỗng. Ảnh hưởng của nhiệt độ và độ ẩm đến ứng xử cơ học của kết cấu FGM có vi bọt rỗng là không thể bỏ qua, tuy nhiên, các nghiên cứu về tấm FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi dưới tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt-ẩm còn chưa được khai thác đầy đủ. Chính vì vậy, mục tiêu của bài báo này là tiến hành phân tích ứng xử uốn tĩnh của tấm FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak chịu tác

dụng của tổ hợp các tải trọng cơ, nhiệt, ẩm. Các phương trình cân bằng được thiết lập theo nguyên lý chuyển vị khả dĩ, trong khuôn khổ của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Vật liệu FGM với quy luật biến thiên hàm lũy thừa của các vật liệu thành phần (power law), hoàn hảo (không có vi bọt rỗng) và không hoàn hảo (3 dạng phân bố vi bọt rỗng) sẽ được khảo sát. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước hình học, nhiệt độ, độ ẩm và nền đàn hồi đến độ võng và các thành phần ứng suất của các loại tấm bằng vật liệu FGM khác nhau sẽ được đánh giá.

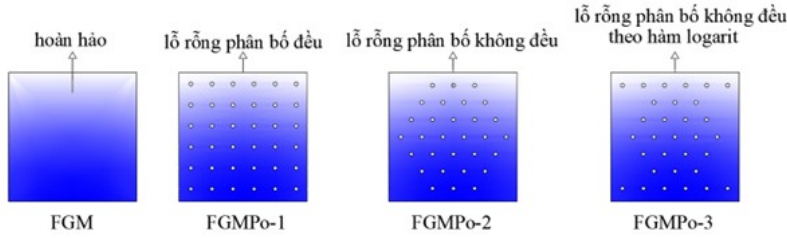
## 2. Cơ sở lý thuyết

### 2.1. Tấm FGM có vi bọt rỗng (FGMPo)

Xét tấm chữ nhật P-FGMPo, chịu tải trọng phân bố  $q$  vuông góc với bề mặt trên, với chiều dày  $h$ , kích thước các cạnh  $a \times b$ . Tấm đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak (xem Hình 1) với hai hệ số nền lần lượt là:  $K_u$  là hệ số độ cứng uốn lớp đàn hồi;  $K_s$  là hệ số độ cứng của lớp trượt.



(a) Tấm FGM đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak



(b) Bốn dạng vật liệu FGM

Hình 1. Mô hình tấm FGM với bốn dạng phân bố vi bọt rỗng trên nền đàn hồi

Vật liệu P-FGMPo gồm hai vật liệu thành phần: ceramic và kim loại. Tấm đặt trong môi trường nhiệt-ẩm với trường nhiệt độ là  $T(x, y, z)$  và trường độ ẩm là  $C(x, y, z)$ . Tính chất vật liệu của tấm P-FGMPo, chẳng hạn như mô đun đàn hồi  $E$ , hệ số giãn nở nhiệt  $\alpha$  và hệ số ngấm ẩm  $\beta$  được giả thiết dưới dạng [5]:

- Vật liệu FGM hoàn hảo (không có vi bọt rỗng: FGM):

$$P(z) = (P_c - P_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m \quad (1)$$

- Vật liệu FGM có vi bọt rỗng phân bố đều (FGMPo-1):

$$P(z) = (P_c - P_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m - \frac{e}{2} (P_c + P_m) \quad (2)$$

- Vật liệu FGM có vi bọt rỗng phân bố không đều (FGMPo-2):

$$P(z) = (P_c - P_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m - \frac{e}{2} (P_c + P_m) \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (3)$$

- Vật liệu FGM có vi bột rỗng phân bố không đều theo hàm logarit (FGMPo-3):

$$P(z) = (P_c - P_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m - \log \left( 1 + \frac{e}{2} \right) (P_c + P_m) \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (4)$$

trong đó  $p \geq 0$  là chỉ số tỷ lệ thể tích của các vật liệu thành phần;  $e$  là hệ số rỗng.

Để đơn giản, hệ số Poisson  $\nu$  được giả thiết là hằng số theo chiều dày tấm [18].

## 2.2. Trường chuyển vị và biến dạng

Trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất được giả thiết dưới dạng [19]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

trong đó  $u_0, v_0, w_0$  là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình của tấm theo các phương  $x, y$ , và  $z$ ;  $\varphi_x, \varphi_y$  là góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh trục  $y, x$ .

Các thành phần biến dạng được xác định theo:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

trong đó các thành phần biến dạng màng và các thành phần độ cong định nghĩa bởi:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}; \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}; \quad \kappa_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}; \quad \kappa_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}; \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \quad (7)$$

## 2.3. Trường ứng suất và nội lực

Quan hệ ứng suất - biến dạng có kể đến ảnh hưởng nhiệt-ẩm được viết dưới dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha \Delta T - \beta \Delta C \\ \varepsilon_y - \alpha \Delta T - \beta \Delta C \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha \Delta T - \beta \Delta C \\ \varepsilon_y - \alpha \Delta T - \beta \Delta C \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

trong đó

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}; \quad C_{12} = C_{21} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2}; \quad C_{66} = C_{55} = C_{44} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \quad (9)$$

$\Delta T = T - T_0$  và  $\Delta C = C - C_0$  là chênh lệch nhiệt độ và độ ẩm ở thời điểm xem xét so với nhiệt độ tham chiếu  $T_0$  và độ ẩm tham chiếu  $C_0$  ban đầu.

Hàm phân bố nhiệt độ  $T(x, y, z)$  và độ ẩm  $C(x, y, z)$  được giả thiết biến thiên theo quy luật hằng số, tuyến tính hay phi tuyến biểu diễn dưới dạng [20]:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) T_3(x, y) \\ C(x, y, z) &= C_1(x, y) + \frac{z}{h} C_2(x, y) + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) C_3(x, y) \end{aligned} \quad (10)$$

với  $T_i(x, y)$  và  $C_i(x, y)$  là hàm phân bố nhiệt độ và độ ẩm trên bề mặt tấm.

Các thành phần nội lực được định nghĩa bởi:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz; \quad (M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) z dz \\ (Q_x, Q_y) &= k \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \end{aligned} \quad (11)$$

với  $k$  là hệ số hiệu chỉnh cắt.

Thay quan hệ (8) vào biểu thức (11) ta được:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^C \\ N_y^C \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^C \\ M_y^C \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

trong đó

$$\begin{aligned} (A_{11}, B_{11}, D_{11}) &= (A, B, D) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(1, z, z^2) dz; \quad (A_{12}, B_{12}, D_{12}) = \nu(A, B, D) \\ (A_{66}, B_{66}, D_{66}) &= \frac{1-\nu}{2}(A, B, D); \quad A_{44} = A_{55} = A^s = k \int_{-h/2}^{h/2} C_{55} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} dz \\ N_x^T &= N_y^T = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) \Delta T dz; \quad M_x^T = M_y^T = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) \Delta T z dz \\ N_x^C &= N_y^C = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \beta(z) \Delta C dz; \quad M_x^C = M_y^C = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \beta(z) \Delta C z dz \end{aligned} \quad (13)$$

#### 2.4. Phương trình cân bằng

Các phương trình cân bằng được thiết lập theo nguyên lý chuyển vị khả dĩ, được thể hiện như sau [20]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - f_e &= 0; & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0; & \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (14a)$$

trong đó  $f_e$  là phản lực nền Winkler-Pasternak cho bởi:

$$f_e = K_u w - K_s \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (14b)$$

Biểu diễn nội lực qua biến dạng, rồi biến dạng qua chuyển vị nhờ sự trợ giúp của (6), và (12) hệ phương trình (14a) trở thành hệ phương trình cân bằng biểu diễn theo các thành phần chuyển vị  $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$ :

$$\begin{aligned} A \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + B \left( \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \right) &= p_1 \\ A \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + B \left( \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} \right) &= p_2 \\ A^s \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + q - f_e &= 0 \\ B \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + D \left( \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \right) - A^s \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \right) &= p_4 \\ B \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + D \left( \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} \right) - A^s \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \right) &= p_5 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{với } p_1 = \frac{\partial N_x^T}{\partial x} + \frac{\partial N_x^C}{\partial x}; p_2 = \frac{\partial N_y^T}{\partial y} + \frac{\partial N_y^C}{\partial y}; p_4 = \frac{\partial M_x^T}{\partial x} + \frac{\partial M_x^C}{\partial x}; p_5 = \frac{\partial M_y^T}{\partial y} + \frac{\partial M_y^C}{\partial y}.$$

### 3. Lời giải Navier

Trong trường hợp tấm chữ nhật liên kết khớp trên chu tuyến, điều kiện biên thể hiện dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} \text{Tại } x = 0, a: \quad N_x = v_0 = w_0 = \varphi_y = M_x &= 0 \\ \text{Tại } y = 0, b: \quad N_y = u_0 = w_0 = \varphi_x = M_y &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Các thành phần chuyển vị được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép, thỏa mãn điều kiện biên (16) được giả thiết dưới dạng:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn} \cos \lambda x \sin \gamma y; & v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} \sin \lambda x \cos \gamma y; & w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn} \sin \lambda x \sin \gamma y \\ \varphi_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{0xmn} \cos \lambda x \sin \gamma y; & \varphi_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{0ymn} \sin \lambda x \cos \gamma y \end{aligned} \quad (17)$$

trong đó  $u_{0mn}, v_{0mn}, w_{0mn}, \varphi_{0xmn}, \varphi_{0ymn}$  là các hệ số cần được xác định và  $\lambda = \frac{m\pi}{a}, \gamma = \frac{n\pi}{b}$ .

Tải trọng cơ học, nhiệt độ và độ ẩm  $q, T_i, C_i$  cũng có thể được khai triển theo chuỗi lượng giác kép:

$$\begin{aligned} q &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda x \sin \gamma y \\ T_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t_{imn} \sin \lambda x \sin \gamma y \\ C_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{imn} \sin \lambda x \sin \gamma y \end{aligned} \quad (18)$$

trong đó  $T_i, C_i$  được định nghĩa trong phương trình (10) với  $i = 1, 2, 3$ . Với tải trọng phân bố đều:

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2}, \quad t_{imn} = \frac{16t_{0i}}{mn\pi^2}, \quad c_{imn} = \frac{16c_{0i}}{mn\pi^2}. \quad \text{Với tải trọng phân bố hình sin: } q_{mn} = q_0, \quad t_{imn} = t_{0i}, \quad c_{imn} = c_{0i}.$$

Thế biểu thức (17) và (18) vào (15), ta được nhận được hệ phương trình đại số:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & 0 & s_{24} & s_{25} \\ 0 & 0 & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0mn} \\ v_{0mn} \\ w_{0mn} \\ \varphi_{0xmn} \\ \varphi_{0ymn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ q_{mn} \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix}; \quad \forall m, n \quad (19)$$

trong đó các hệ số  $s_{ij}$  và  $P_i$  được xác định bởi:

$$\begin{aligned} s_{11} &= A\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}A\gamma^2; \quad s_{12} = \frac{1+\nu}{2}A\lambda\gamma \\ s_{15} &= s_{51} = s_{24} = s_{42} = \lambda\gamma\frac{1+\nu}{2}B \\ s_{14} &= s_{41} = B\left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}\gamma^2\right) \\ s_{22} &= A\left(\frac{1-\nu}{2}\lambda^2 + \gamma^2\right); \quad s_{25} = s_{52} = B\left(\frac{1-\nu}{2}\lambda^2 + \gamma^2\right) \\ s_{33} &= A^s(\lambda^2 + \gamma^2); \quad s_{34} = s_{43} = A^s\lambda \\ s_{35} &= s_{53} = A^s\gamma; \quad s_{44} = A^s + D\left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}\gamma^2\right) \\ s_{45} &= s_{54} = \frac{1+\nu}{2}D\lambda\gamma; \quad s_{55} = A^s + D\left(\frac{1-\nu}{2}\lambda^2 + \gamma^2\right) \\ P_1 &= \lambda\left[(A^T t_1 + B^T t_2 + B^{*T} t_3) + (A^C c_1 + B^C c_2 + B^{*C} c_3)\right] \\ P_2 &= \gamma\left[(A^T t_1 + B^T t_2 + B^{*T} t_3) + (A^C c_1 + B^C c_2 + B^{*C} c_3)\right] \\ P_4 &= \lambda\left[(B^T t_1 + D^T t_2 + D^{*T} t_3) + (B^C c_1 + D^C c_2 + D^{*C} c_3)\right] \\ P_5 &= \gamma\left[(B^T t_1 + D^T t_2 + D^{*T} t_3) + (B^C c_1 + D^C c_2 + D^{*C} c_3)\right] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda\left[(A^T t_1 + B^T t_2 + B^{*T} t_3) + (A^C c_1 + B^C c_2 + B^{*C} c_3)\right] \\ P_2 &= \gamma\left[(A^T t_1 + B^T t_2 + B^{*T} t_3) + (A^C c_1 + B^C c_2 + B^{*C} c_3)\right] \\ P_4 &= \lambda\left[(B^T t_1 + D^T t_2 + D^{*T} t_3) + (B^C c_1 + D^C c_2 + D^{*C} c_3)\right] \\ P_5 &= \gamma\left[(B^T t_1 + D^T t_2 + D^{*T} t_3) + (B^C c_1 + D^C c_2 + D^{*C} c_3)\right] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{với } \bar{z} = \frac{z}{h}; \quad \bar{\psi}(z) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

$$\begin{aligned}
 A^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) dz; & B^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) \bar{z} dz; & D^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) \bar{z}^2 dz \\
 A^C &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \beta(z) dz; & B^C &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \beta(z) \bar{z} dz; & D^C &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \beta(z) \bar{z}^2 dz \\
 B^{*T} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) \bar{\psi}(z) dz; & D^{*T} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) \bar{\psi}(z) \bar{z} dz \\
 B^{*C} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \beta(z) \bar{\psi}(z) dz; & D^{*C} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \beta(z) \bar{\psi}(z) \bar{z} dz
 \end{aligned} \tag{22}$$

Giải hệ phương trình (19) ta nhận được các hệ số  $u_{0mn}, v_{0mn}, w_{0bmn}, \varphi_{0xmn}, \varphi_{0ymn}$ , từ đó xác định được các thành phần chuyển vị, biến dạng, ứng suất và nội lực tương ứng.

#### 4. Kết quả số và thảo luận

Trong phần này, trước tiên các ví dụ kiểm chứng được thực hiện cho tấm FGM hoàn hảo. Tiếp theo đó, ảnh hưởng của các tham số vật liệu, hình học và nền đàn hồi đến độ võng và các thành phần ứng suất các vật liệu FGM sẽ được khảo sát thông qua các ví dụ số. Các ví dụ kiểm chứng và các ví dụ số được khảo sát với tải trọng cơ-nhiệt-ẩm phân bố dạng hàm sin  $\left(q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}\right)$ .

Vật liệu P-FGM với hai vật liệu thành phần  $\text{ZrO}_2$  và  $\text{Ti-6Al-4V}$  có các đặc trưng cơ học như sau [20]:

- Ceramic ( $\text{ZrO}_2$ ):  $E_c = 117 \text{ GPa}$ ;  $\nu_c = 0,33$ ;  $\alpha_m = 10,3 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ;  $\beta_m = 0,33$ ;
- Kim loại ( $\text{Ti-6Al-4V}$ ):  $E_m = 66,2 \text{ GPa}$ ;  $\nu_m = 0,33$ ;  $\alpha_c = 7,11 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ;  $\beta_c = 0$ .

Trong tất cả các tính toán khảo sát và ví dụ kiểm chứng, giá trị của hệ số hiệu chỉnh cắt được lấy là 5/6. Nhiệt độ và độ ẩm quy chiếu được sử dụng:  $T_0 = 25^\circ\text{C}$  (nhiệt độ phòng),  $C_0 = 0\%$ . Sau khi khảo sát tính hội tụ của nghiệm Navier, số số hạng trong khai triển chuỗi lượng giác kép đối với tải trọng phân bố đều được lấy với  $m = n = 20$ . Các giá trị không thứ nguyên trong các ví dụ kiểm chứng được tính theo [16]:

$$\begin{aligned}
 \bar{w} &= \frac{100\Pi}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right); & \bar{\sigma}_{xx} &= \frac{1}{100q_0} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right); & \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{1}{10q_0} \sigma_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{3}\right) \\
 \bar{\sigma}_{xz} &= \frac{1}{10q_0} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right); & K_0 &= \frac{K_u a^4}{\Pi}; & J_0 &= \frac{K_s a^2}{\Pi}; & \Pi &= \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}
 \end{aligned} \tag{23}$$

##### 4.1. Ví dụ kiểm chứng

Độ võng và ứng suất không thứ nguyên của tấm chữ nhật FGM hoàn hảo (không có vi bọt rỗng) đặt trên nền đàn hồi Pasternak chịu tác dụng của tải trọng phân bố dạng hàm sin và trường nhiệt-ẩm phân bố phi tuyến được trình bày trong Bảng 1. Kết quả của bài báo cũng được so sánh với kết quả của Zidi [16] sử dụng lý thuyết 4 ẩn số chuyển vị cải tiến và dạng nghiệm Navier.

Ví dụ so sánh thứ hai trình bày trong Bảng 2 là độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của tấm vuông FGM (hoàn hảo) chịu tải trọng cơ phân bố đều. Kết quả được so sánh với kết quả của Thai và Choi [21] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản và lời giải Navier cho tấm chữ nhật liên kết khớp trên chu vi.

Bảng 1. Ứng suất và độ võng không thứ nguyên của tấm chữ nhật FGM hoàn hảo ( $b = 3a$ ) đặt trên nền đàn hồi chịu tải trọng cơ phân bố dạng hàm sin và trường nhiệt-ẩm phân bố phi tuyến ( $a/h = 10$ ,  $q_0 = 100$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = t_3 = 10$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = c_3 = 100$ )

| $p$ | $K_0$ | $J_0$ | Nguồn     | $\bar{w}$ | $\bar{\sigma}_{xx}$ | $\bar{\sigma}_{xy}$ |
|-----|-------|-------|-----------|-----------|---------------------|---------------------|
| 0   | 0     | 0     | Zidi [16] | 2,54076   | 0,52522             | 2,20374             |
|     |       |       | Bài báo   | 2,54108   | 0,52260             | 2,20529             |
|     | 100   | 0     | Zidi [16] | 1,36682   | -0,17643            | 1,20877             |
|     |       |       | Bài báo   | 1,36698   | -0,17545            | 1,20806             |
|     | 0     | 100   | Zidi [16] | 0,26518   | -0,83500            | 0,27507             |
|     |       |       | Bài báo   | 0,26520   | -0,83051            | 0,27226             |
|     | 100   | 100   | Zidi [16] | 0,24336   | -0,84804            | 0,25658             |
|     |       |       | Bài báo   | 0,24338   | -0,84348            | 0,25373             |
| 1   | 100   | 100   | Zidi [16] | 0,26330   | -0,86205            | 0,23762             |
|     |       |       | Bài báo   | 0,26334   | -0,85552            | 0,23483             |
| 2   | 100   | 100   | Zidi [16] | 0,26396   | -0,84138            | 0,20133             |
|     |       |       | Bài báo   | 0,26413   | -0,83506            | 0,19728             |
| 5   | 100   | 100   | Zidi [16] | 0,26601   | -0,81745            | 0,18459             |
|     |       |       | Bài báo   | 0,26634   | -0,81150            | 0,17896             |

Bảng 2. Độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của tấm vuông FGM hoàn hảo chịu tải trọng cơ phân bố đều ( $a/h = 10$ )

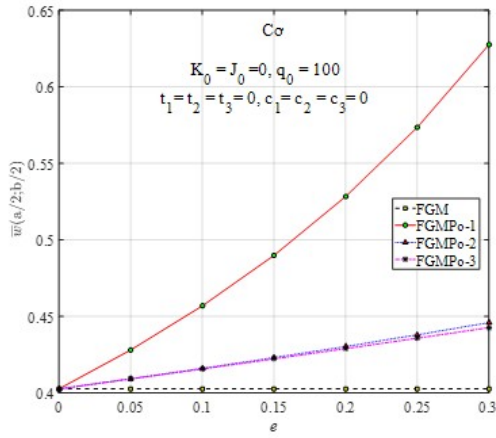
| $p$ | Nguồn             | $\bar{w}$ | $\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{h}{2}\right)$ | $\bar{\sigma}_{xy}\left(-\frac{h}{3}\right)$ | $\bar{\sigma}_{xz}(0)$ |
|-----|-------------------|-----------|---------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------|
| 0   | Thai và Choi [21] | 0,4666    | 2,8732                                      | 1,2990                                       | 0,4004                 |
|     | Bài báo           | 0,4666    | 2,8732                                      | 1,2992                                       | 0,4027                 |
| 1   | Thai và Choi [21] | 0,9288    | 4,4407                                      | 1,1218                                       | 0,4004                 |
|     | Bài báo           | 0,9288    | 4,4407                                      | 1,1220                                       | 0,4027                 |
| 2   | Thai và Choi [21] | 1,1909    | 5,1853                                      | 0,9998                                       | 0,3407                 |
|     | Bài báo           | 1,1909    | 5,1852                                      | 1,0000                                       | 0,3427                 |
| 5   | Thai và Choi [21] | 1,4205    | 6,0857                                      | 1,0591                                       | 0,2622                 |
|     | Bài báo           | 1,4205    | 6,0856                                      | 1,0593                                       | 0,2638                 |

Qua các hai ví dụ kiểm chứng trình bày ở trên, có thể thấy rằng kết quả của bài báo có sai lệch ít so với các kết quả đã công bố của Zidi [16], Thai và Choi [21]. Vì vậy có thể kết luận rằng, nghiệm giải tích thiết lập cũng như code chương trình tính bằng Matlab cho phân tích tĩnh tấm FGM chịu tác dụng đồng thời của tải trọng cơ học, nhiệt độ và độ ẩm trong bài báo có độ tin cậy.

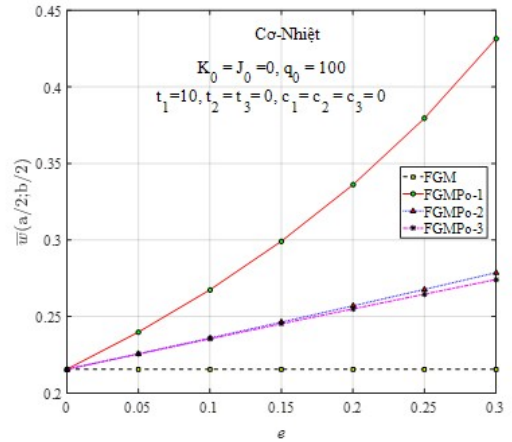
#### 4.2. Ví dụ khảo sát

a. Khảo sát ảnh hưởng của tải trọng cơ, nhiệt và ẩm, dạng phân bố vi bọt rỗng, và hệ số rỗng  $e$  đến độ võng

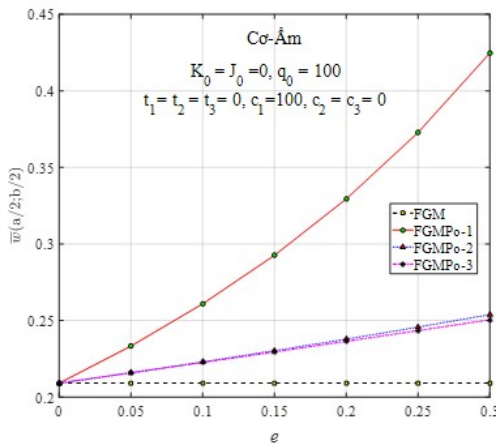
Xét các tấm chữ nhật FGM hoàn hảo (FGM), và không hoàn hảo (FGMPo-1, FGMPo-2, FGMPo-3) với  $b/a = 1$ ,  $a/h = 10$ ,  $p = 5$  không đặt trên nền đàn hồi ( $K_0 = 0$ ,  $J_0 = 0$ ). Độ võng lớn nhất không



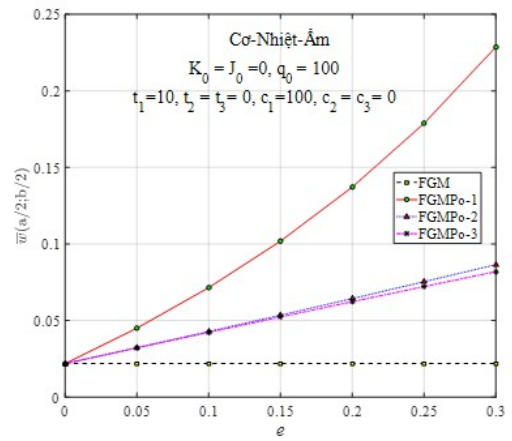
(a) Cơ



(b) Cơ-Nhiệt



(c) Cơ-Ấm



(d) Cơ-Nhiệt-Ấm

Hình 2. Độ võng không thứ nguyên lớn nhất  $\bar{w}_{\max}$  của các loại tấm FGM chịu tải trọng cơ, cơ-nhiệt, cơ-ấm, cơ-nhiệt-ấm biến thiên theo hệ số rỗng  $e$  (trường nhiệt độ và độ ẩm là hằng số theo chiều dày)

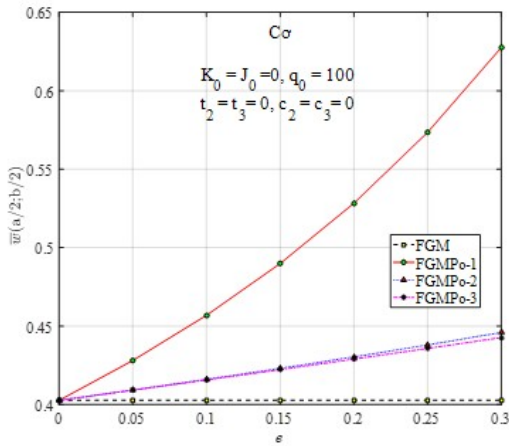
thứ nguyên biến thiên theo hệ số rỗng  $e$  với các dạng phân bố lỗ rỗng khác nhau chịu tác dụng của các tổ hợp tải trọng khác nhau trong môi trường nhiệt độ và độ ẩm là không đổi ( $t_2 = t_3 = c_2 = c_3 = 0$ ) và thay đổi phi tuyến ( $t_2, t_3, c_2, c_3 \neq 0$ ) theo chiều dày tấm được thể hiện trong Hình 2 và 3. Quan sát đồ thị trên Hình 2 và Hình 3 ta thấy:

- Nhiệt độ và độ ẩm có ảnh hưởng rõ rệt đến độ cứng của tấm, làm cho độ võng của tấm thay đổi đáng kể.

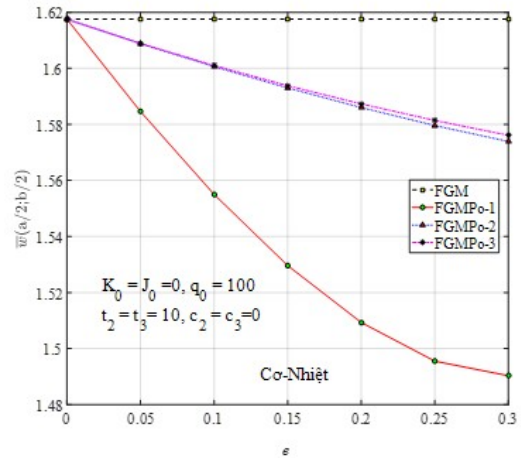
- Đối với cả bốn loại tấm, khi chỉ chịu tác dụng của tải cơ, hoặc tải cơ-ấm, hệ số rỗng tăng làm độ cứng của tấm giảm, kết quả là độ võng của tấm tăng. Tuy nhiên với tải cơ-nhiệt, khi hệ số rỗng  $e$  tăng thì độ võng của tấm tăng hay giảm phụ thuộc vào quy luật biến thiên của trường nhiệt độ. Với trường nhiệt độ hằng số, hệ số rỗng  $e$  tăng làm cho độ cứng của tấm giảm dẫn đến độ võng tăng; tuy nhiên với trường nhiệt độ phi tuyến, hệ số rỗng  $e$  tăng làm cho độ cứng của tấm tăng dẫn đến độ võng giảm. Ứng xử phức tạp này cũng đã được một số tác giả ghi nhận [22], sự gia tăng hệ số độ rỗng không đơn thuần làm giảm độ cứng cơ học như trong các trường hợp tải cơ đơn thuần, mà còn ảnh hưởng đến

khả năng dẫn nhiệt của vật liệu. Sự có mặt các lỗ rỗng làm giảm khả năng dẫn nhiệt của vật liệu, giúp phân bố nhiệt độ đồng đều hơn và làm giảm ứng suất nhiệt. Ngoài ra có thể thấy rằng ảnh hưởng của nhiệt độ lẫn át ảnh hưởng của độ ẩm, do vậy dưới tác dụng đồng thời của tải cơ-nhiệt-ẩm, trong một số trường hợp, độ võng giảm khi hệ số độ rỗng tăng lên.

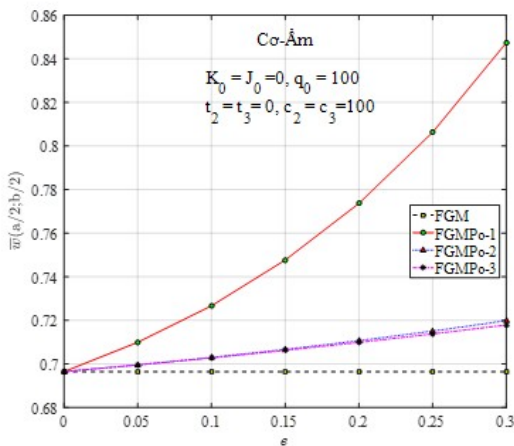
Cũng cần nhấn mạnh rằng tấm FGM với vi bọt rỗng phân bố đều (FGMPo-1) có ảnh hưởng đến sự thay đổi độ cứng của tấm nhiều hơn cả, trong khi hai quy luật phân bố vi bọt rỗng còn lại là gần như nhau. Hệ số rỗng càng lớn, ảnh hưởng của quy luật phân bố vi bọt rỗng càng đáng kể.



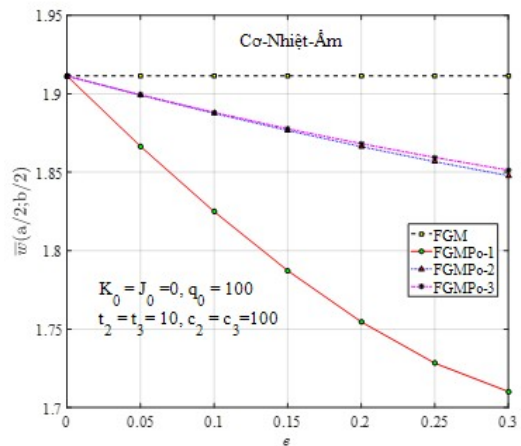
(a) Cơ



(b) Cơ-Nhiệt



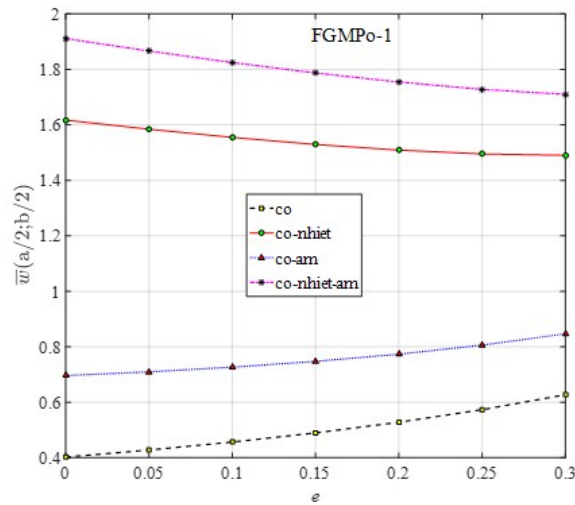
(c) Cơ-Ẩm



(d) Cơ-Nhiệt-Ẩm

Hình 3. Độ võng không thứ nguyên lớn nhất  $\bar{w}_{\max}$  của các loại tấm FGM chịu tải trọng cơ, cơ-nhiệt, cơ-ẩm, cơ-nhiệt-ẩm biến thiên theo hệ số rỗng  $e$  (trường nhiệt độ và độ ẩm là phi tuyến theo chiều dày)

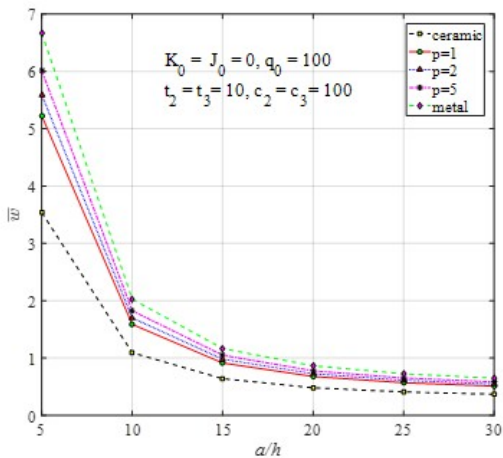
Hình 4 biểu diễn sự biến thiên của độ võng không thứ nguyên lớn nhất  $\bar{w}_{\max}$  của tấm FGMPo-1 theo hệ số rỗng dưới tác dụng của các tổ hợp tải trọng khác nhau. Rõ ràng là sự có mặt của nhiệt độ và độ ẩm đều làm cho độ võng của tấm tăng lên với tất cả các giá trị của  $e$ . Độ võng do độ ẩm gây ra luôn bé hơn do nhiệt độ gây ra. Tuy nhiên khi chịu tác dụng của các tổ hợp tải trọng, ảnh hưởng của hệ số rỗng là khác biệt với từng loại.



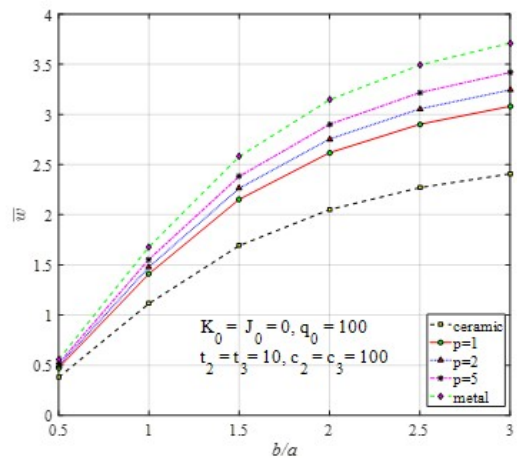
Hình 4. Độ võng không thứ nguyên lớn nhất  $\bar{w}_{\max}$  của tấm FGMPo-1 chịu tải trọng cơ; cơ-nhiệt; cơ-ẩm; cơ-nhiệt-ẩm biến thiên theo hệ số rỗng  $e$  (trường nhiệt độ và độ ẩm là phi tuyến theo chiều dày)

b. Khảo sát ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  của vật liệu FGM, tỷ số kích thước tấm  $a/h$ , và  $b/a$  đến độ võng

Xét tấm chữ nhật FGMPo-1 (vi bột rỗng phân bố đều,  $e = 0,1$ ),  $p = (0, 1, 2, 5, \infty)$  không đặt trên nền đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt-ẩm ( $q_0 = 100$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = t_3 = 10$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = c_3 = 100$ ). Với  $b/a = 1$ , sự biến thiên của độ võng lớn nhất không thứ nguyên theo tỷ số  $a/h$ , với các giá trị chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  khác nhau của tấm FGMPo-1 ( $e = 0,1$ ) được biểu diễn bằng các đồ thị trên Hình 5(a). Với  $a/h = 10$ , sự biến thiên của độ võng lớn nhất không thứ nguyên theo tỷ số  $b/a$ , với các giá trị chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  khác nhau của tấm FGMPo-1 ( $e = 0,1$ ) được biểu diễn bằng các đồ thị trên Hình 5(b).



(a) Tỷ số  $a/h$



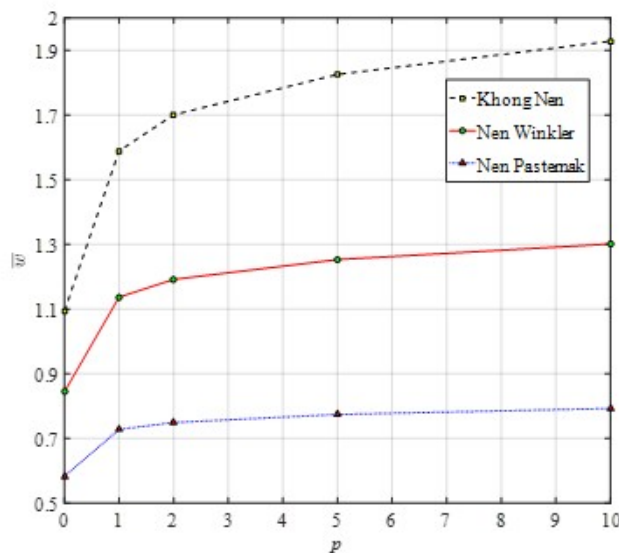
(b) Tỷ số  $b/a$

Hình 5. Độ võng không thứ nguyên  $\bar{w}$  của tấm FGMPo-1 ( $e = 0,1$ ) chịu tác dụng đồng thời của tải trọng cơ-nhiệt-ẩm biến thiên theo: (a) tỷ số  $a/h$ ; (b) tỷ số  $b/a$  (trường nhiệt độ và độ ẩm là phi tuyến theo chiều dày)

Quan sát đồ thị ta thấy rằng chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  tăng, tỷ phần thể tích của thành phần kim loại tăng dần làm độ cứng của tấm giảm dần, dẫn đến độ võng của tấm tăng. Ngoài ra, theo khi tấm càng mỏng (tỷ số  $a/h$  tăng), độ võng lớn nhất không thứ nguyên của tấm FGMPo-1 càng giảm. Trong khi đó, độ võng không thứ nguyên của tấm lại tăng dần theo chiều tăng của tỷ số  $b/a$ , khi tấm chuyển dần từ làm việc hai chiều sang một chiều.

#### c. Khảo sát ảnh hưởng của nền đàn hồi đến độ võng

Xét tấm chữ nhật FGMPo-1 (vi bột rỗng phân bố đều,  $e = 0,1$ ) với  $b/a = 1$ ,  $p = (0, 1, 2, 5, \infty)$  đặt trên nền đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt-ẩm ( $q_0 = 100$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = t_3 = 10$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = c_3 = 100$ ). Sự biến thiên của độ võng lớn nhất không thứ nguyên theo chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$ , với các hệ số nền đàn hồi khác nhau: Không nền ( $K_0 = J_0 = 0$ ), nền Winkler ( $K_0 = 100$ ,  $J_0 = 0$ ), nền Pasternak ( $K_0 = 100$ ,  $J_0 = 10$ ) của tấm FGMPo-1 ( $e = 0,1$ ) được biểu diễn bằng các đồ thị trên Hình 6.



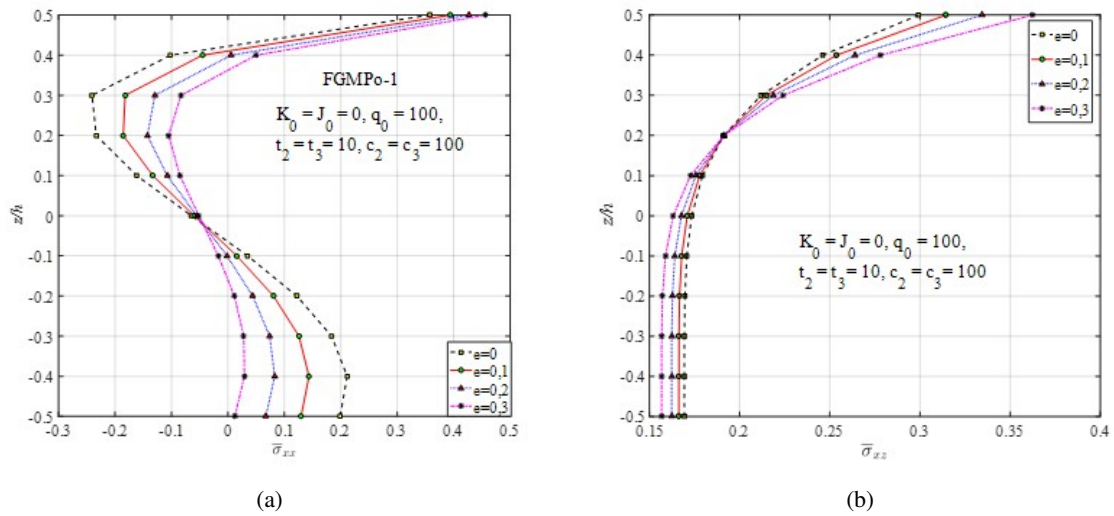
Hình 6. Độ võng không thứ nguyên  $\bar{w}$  của tấm FGMPo-1 biến thiên theo chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  (trường nhiệt độ và độ ẩm là phi tuyến theo chiều dày)

Từ các kết quả nhận được ta có thể thấy rằng khi có sự có mặt của nền đàn hồi thì độ võng của tấm sẽ giảm đáng kể. Theo chiều tăng chỉ số tỷ lệ thể tích thì độ võng của tấm FGMPo-1 không đặt trên nền đàn hồi hay đặt trên nền Winkler hoặc nền Pasternak đều tăng dần. Sự kết hợp của hai hệ số nền ( $K_0$  và  $J_0$ ) trong mô hình nền đàn hồi Winkler-Pasternak góp phần gia tăng độ cứng tổng thể của hệ kết cấu, dẫn đến độ võng nhỏ hơn so với khi chỉ xét nền Winkler thuần túy ( $J_0 = 0$ ).

#### 4.3. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước hình học và tải trọng cơ-nhiệt-ẩm đến các thành phần ứng suất

##### a. Khảo sát ảnh hưởng của hệ số rỗng $e$ đến các thành phần ứng suất

Các thành phần ứng suất pháp không thứ nguyên  $\bar{\sigma}_{xx}$ ,  $\bar{\sigma}_{xy}$  và  $\bar{\sigma}_{xz}$  của tấm FGMPo-1 ( $a/h = 10$ ,  $b/a = 1$ ,  $p = 5$ ,  $K_0 = J_0 = 0$ ) chịu tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt-ẩm ( $q_0 = 100$ ,  $t_2 = t_3 = 10$ ,  $c_2 = c_3 = 100$ ), với các giá trị hệ số rỗng khác nhau biến thiên theo tọa độ chiều dày được thể hiện bởi đồ thị trên Hình 7.



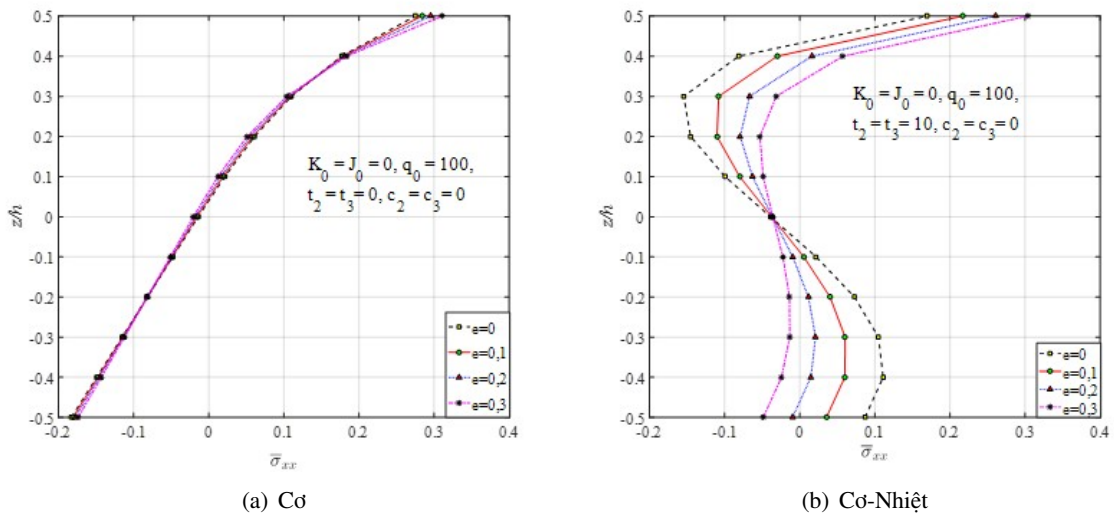
Hình 7. Các thành phần ứng suất không thứ nguyên  $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{xz}$  của tấm FGMPo-1 chịu tải trọng cơ-nhiệt-ẩm (trường nhiệt độ và độ ẩm là phi tuyến theo chiều dày)

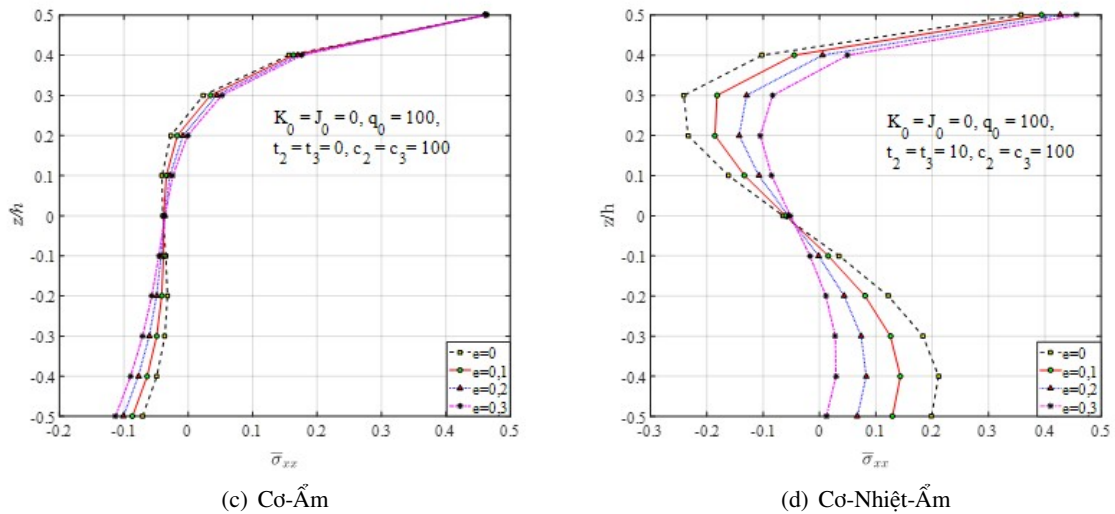
Ta thấy rằng ứng suất pháp  $\bar{\sigma}_{xx}$ , và ứng suất cắt ngang  $\bar{\sigma}_{xz}$  của tấm FGMPo-1 khi chịu tải trọng cơ-nhiệt-ẩm đều phân bố phi tuyến theo tọa độ chiều dày tấm. Khi hệ số rỗng  $e$  tăng dần thì ứng suất pháp  $\bar{\sigma}_{xx}$  tại mặt dưới của tấm tăng dần, tại mặt trên của tấm giảm dần còn với thành phần ứng suất cắt ngang  $\bar{\sigma}_{xz}$  thì giảm dần ở mặt trên và tăng dần ở mặt dưới.

b. Khảo sát ảnh hưởng của tải trọng cơ-nhiệt-ẩm đến các thành phần ứng suất

Biểu đồ ứng suất pháp  $\bar{\sigma}_{xx}$  của tấm vuông FGMPo-1 ( $b/a = 1, a/h = 10, p = 5, K_0 = 0, J_0 = 0$ ) chịu tác dụng lần lượt của tải trọng cơ, cơ-nhiệt, cơ-ẩm, cơ-nhiệt-ẩm ( $q_0 = 100, t_1 = 0, t_2 = t_3 = 10, c_1 = 0, c_2 = c_3 = 100$ ) được thể hiện trên Hình 8.

Quan sát đồ thị trên Hình 8, một lần nữa có thể quan sát thấy ảnh hưởng của độ ẩm đến thành phần suất pháp  $\bar{\sigma}_{xx}$  là ít hơn nhiều so với ảnh hưởng của nhiệt độ với sự thay đổi của hệ số rỗng.





Hình 8. Ứng suất pháp không thứ nguyên  $\bar{\sigma}_{xx}$  của tấm FGMPo-1 chịu tải trọng (a) cơ; (b) cơ-nhiệt; (c) cơ-ấm; (d) cơ-nhiệt-ấm với các hệ số rỗng  $e$  khác nhau (trường nhiệt độ và độ ẩm là phi tuyến theo chiều dày)

## 5. Kết luận

Bài báo đã sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để phân tích tĩnh tấm FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi dưới tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt-ấm. Ba dạng phân bố vi bọt rỗng, trường nhiệt độ và độ ẩm là hằng số, hay biến thiên tuyến tính và phi tuyến theo chiều dày được xem xét. Sau khi kiểm chứng độ tin cậy của lời giải và code Matlab tự viết, ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu FGM, dạng phân bố và hệ số rỗng, nhiệt độ, độ ẩm và các mô hình nền đến ứng xử tĩnh của tấm FGM có vi bọt rỗng được khảo sát qua các ví dụ số. Một số kết quả đáng chú ý có thể tóm tắt như sau:

- Sự có mặt của vi bọt rỗng làm giảm đáng kể độ cứng của tấm, làm cho độ võng và các thành phần ứng suất tăng lên. Tấm có vi bọt rỗng phân bố đều là mềm hơn so với tấm có vi bọt rỗng phân bố không đều. Chỉ số tỷ lệ thể tích của các thành phần vật liệu FGM tăng làm cho độ cứng của tấm giảm.
- Sự có mặt của nhiệt độ và độ ẩm ảnh hưởng đáng kể độ võng và các thành phần ứng suất. Ảnh hưởng của nhiệt độ mạnh hơn ảnh hưởng của độ ẩm. Hệ số rỗng tăng thì độ võng của tấm có thể tăng hay giảm tùy thuộc vào dạng biến thiên của trường nhiệt độ, độ ẩm, về tương quan độ lớn giữa ba dạng tải trọng cơ-nhiệt-ấm.
- Sự có mặt của nền đàn hồi làm gia tăng độ cứng của tấm. Sự kết hợp của hai hệ số nền trong mô hình nền đàn hồi Winkler-Pasternak góp phần gia tăng độ cứng tổng thể của hệ kết cấu, dẫn đến độ võng nhỏ hơn so với khi chỉ xét nền Winkler thuần túy

## Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo trong đề tài mã số B2024-XDA-11.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Chi, S.-H., Chung, Y.-L. (2006). [Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part II: Numerical results](#). *International Journal of Solids and Structures*, 43(13):3675–3691.
- [2] Chen, F., Jia, M., She, Y., Wu, Y., Shen, Q., Zhang, L. (2020). [Mechanical behavior of AlN/Mo functionally graded materials with various compositional structures](#). *Journal of Alloys and Compounds*, 816: 152512.

- [3] Zenkour, A. M. (2009). [The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 51(11–12):869–880.
- [4] Merdaci, S., Belghoul, H. (2019). [High-order shear theory for static analysis of functionally graded plates with porosities](#). *Comptes Rendus. Mécanique*, 347(3):207–217.
- [5] Bathini, S., Reddy, K. V. K. (2020). [Flexural behavior of porous functionally graded plates using a novel higher order theory](#). *Journal of Computational Applied Mechanics*, 51(2):361–373.
- [6] Demirhan, P. A., Taskin, V. (2019). [Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach](#). *Composites Part B: Engineering*, 160:661–676.
- [7] Tú, T. M., Long, N. V., Hăng, P. T., Bình, T. V., Hiền, T. T. (2023). [Phân tích tĩnh tải FGM có vi bọt rỗng trên nền đàn hồi Kerr theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCN XD) - ĐHXDHN*, 17(4V):49–63.
- [8] Daikh, A. A., Zenkour, A. M. (2019). [Effect of porosity on the bending analysis of various functionally graded sandwich plates](#). *Materials Research Express*, 6(6):065703.
- [9] Alghanmi, R. A., Aljaghthami, R. H. (2024). [A Four-Variable Shear Deformation Theory for the Static Analysis of FG Sandwich Plates with Different Porosity Models](#). *Mathematical and Computational Applications*, 29(2):20.
- [10] Xia, Q., Xiang, P., Jiang, L., Yan, J., Peng, L. (2021). [Bending and free vibration and analysis of laminated plates on Winkler foundations based on meshless layerwise theory](#). *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 29(27):6168–6187.
- [11] Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A., Ait Atmane, H., Adda Bedia, E. A. (2010). [Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations](#). *Mechanics of Composite Materials*, 46(4):425–434.
- [12] Kumar, V., Singh, S., Saran, V., Harsha, S. (2021). [Vibration characteristics of porous FGM plate with variable thickness resting on Pasternak’s foundation](#). *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 85: 104124.
- [13] Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., Karami, B. (2018). [A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation](#). *Aerospace Science and Technology*, 72:134–149.
- [14] Sayyad, A. S., Ghugal, Y. M. (2018). [Effects of nonlinear hygrothermomechanical loading on bending of FGM rectangular plates resting on two-parameter elastic foundation using four-unknown plate theory](#). *Journal of Thermal Stresses*, 42(2):213–232.
- [15] Mashat, D. S., Zenkour, A. M., Radwan, A. F. (2020). [A quasi-3D higher-order plate theory for bending of FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loads with porosity](#). *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 82:103985.
- [16] Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M. S. A., Adda Bedia, E. A., Anwar Bég, O. (2014). [Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory](#). *Aerospace Science and Technology*, 34:24–34.
- [17] Zenkour, A., Allam, M., Radwan, A. (2014). [Effects of transverse shear and normal strains on FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loading](#). *International Journal of Applied Mechanics*, 6(05):1450063.
- [18] Zenkour, A. M. (2006). [Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates](#). *Applied Mathematical Modelling*, 30(1):67–84.
- [19] Reddy, J. N. (2003). [Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis](#). CRC Press, Boca Raton.
- [20] Boudierba, B., Houari, M. S. A., Tounsi, A. (2013). [Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations](#). *Steel and Composite Structures, An International Journal*, 14(1):85–104.
- [21] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2013). [A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates](#). *Composite Structures*, 101:332–340.
- [22] Akbaş, Ş. D. (2017). [Nonlinear static analysis of functionally graded porous beams under thermal effect](#). *Coupled Systems Mechanics*, 6(4):399–415.