

MÔ HÌNH TỰA BA CHIỀU ĐƠN GIẢN TRONG PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA TẤM SANDWICH FGM CÓ VI BỌT RỖNG

Chu Thanh Bình^{a,*}

^a*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 31/3/2025, Sửa xong 25/5/2025, Chấp nhận đăng 25/5/2025

Tóm tắt

Bài báo này sử dụng lý thuyết biến dạng cắt tựa ba chiều đơn giản (quasi-3D) để phân tích dao động tự do của tấm sandwich làm từ vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) chứa vi bọt rỗng. Hàm biến dạng cắt dạng đa thức được sử dụng để thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt bằng không trên bề mặt tấm mà không cần hệ số hiệu chỉnh cắt. Các phương trình cân bằng được thiết lập từ nguyên lý Hamilton và giải bằng phương pháp nghiệm Navier. Các vật liệu cấu thành ba lớp của tấm sandwich có thể là gốm, kim loại hoặc hỗn hợp gốm-kim loại được phân bố theo quy luật lũy thừa, thay đổi theo chiều dày của tấm. Ba mô hình tấm sandwich FGM khác nhau được xem xét trong nghiên cứu này. Các kết quả thu được được so sánh với lý thuyết đàn hồi ba chiều để kiểm chứng độ tin cậy của mô hình và chương trình tính. Các khảo sát số đánh giá ảnh hưởng của vật liệu, kiểu phân bố vi bọt rỗng, hệ số vi bọt rỗng, cấu trúc lớp và các kích thước hình học đến tần số dao động của tấm sandwich PoFGM.

Từ khóa: phân tích dao động; tấm sandwich; FGM; vi bọt rỗng; lý thuyết tựa ba chiều.

A SIMPLE QUASI-3D MODEL FOR FREE VIBRATION ANALYSIS OF POROUS FGM SANDWICH PLATES

Abstract

In this paper, the quasi-3D shear deformation theory is used to analyze the free vibration of porous functionally graded sandwich plates. A polynomial transverse shear deformation function satisfies the zero transverse shear stress condition on the plate surfaces without needing shear correction factors. The equilibrium equations are derived from Hamilton's principle and solved by the Navier method. The sandwich plate consists of three layers made of homogeneous ceramic, homogeneous metal, or functionally graded ceramic-metal materials with power-law distribution through the thickness. Three functionally graded material sandwich plate models are studied. Results are compared with three-dimensional elasticity theory to verify the model and computational accuracy. Parametric studies assess the effects of material properties, porosity distribution, porosity coefficients, layer configuration, and geometry on the natural frequencies of Po-FGM sandwich plates.

Keywords: vibration analysis; sandwich plate; FGM; porosity; quasi 3D plate theory.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2025-19\(2V\)-13](https://doi.org/10.31814/stce.huce2025-19(2V)-13) © 2025 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Mở đầu

Là một loại vật liệu mới, vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Material - FGM) được hình thành từ hai hoặc nhiều pha vật liệu thành phần, trong đó các đặc tính vật liệu biến đổi trơn, liên tục theo các hướng cụ thể. Nhờ những ưu điểm vượt trội, vật liệu FGM cho phép tối ưu hóa thiết kế theo đặc tính cơ học và không bị phân tách lớp - nguyên nhân phổ biến gây hư hỏng trong kết cấu composite truyền thống. Vật liệu FGM có thể được chế tạo từ nhiều loại vật liệu thành phần khác

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: binhct@huce.edu.vn (Binh, C. T.)

nhau, nhưng phần lớn vẫn là kim loại và gốm. Trong đó, gốm cung cấp khả năng chịu nhiệt, kim loại tăng cường độ bền và tính dẻo, nhờ đó vật liệu này thường được sử dụng để chế tạo các cấu kiện làm việc ổn định trong môi trường có nhiệt độ cao. Một số nghiên cứu ban đầu về ứng xử cơ học của tấm FGM đã được đề cập trong [1–3].

Tấm sandwich cấu tạo từ vật liệu FGM được đánh giá là một thành tựu đột phá trong ngành khoa học vật liệu nhờ khả năng kết hợp hài hòa các đặc tính cơ học và vật lý đa dạng vào một kết cấu thống nhất [4]. Thiết kế đa lớp theo chiều dày của vật liệu này cho phép tăng cường hiệu suất vượt trội, bao gồm tỷ lệ độ bền-trọng lượng, khả năng chịu nhiệt cao và độ bền va đập [5]. Những ưu điểm vượt trội này đã mở rộng phạm vi ứng dụng của chúng sang các ngành kỹ thuật yêu cầu khắt khe như ngành công nghiệp ô tô, tàu biển, hạt nhân, hàng không, vũ trụ. Với sự đa dạng trong phương pháp tiếp cận, các nhà nghiên cứu đã ứng dụng nhiều lý thuyết biến dạng cắt để phân tích kết cấu sandwich FGM. Điển hình, Thai và cs. [6] đã phát triển một lý thuyết tấm bậc nhất cải tiến nhằm nghiên cứu đặc trưng uốn, ổn định và dao động tự do của tấm sandwich FGM. Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) tổng quát đã được Zenkour và cs. [7] xây dựng để khảo sát các đặc tính cơ học của tấm sandwich FGM. Houari [8] và Tounsi và cs. [9] đã sử dụng lý thuyết HSDT cải tiến để nghiên cứu ứng xử uốn đàn hồi nhiệt của tấm sandwich FGM, trong khi Alibeigloo và nhóm nghiên cứu [10] đã áp dụng lý thuyết đàn hồi ba chiều để phân tích trạng thái tĩnh và dao động của tấm sandwich FGM.

Các công nghệ sản xuất FGM như luyện kim bột, đúc ly tâm, lắng đọng hơi hay tổng hợp tự lan truyền tuy hiệu quả nhưng còn phức tạp, tốn kém và đòi hỏi thiết bị đặc biệt. Thiêu kết là một lựa chọn tiềm năng, song dễ gây rỗ vì mô do chênh lệch tốc độ hóa rắn giữa các thành phần. Hiện tượng này cũng xuất hiện ở FGM chế tạo bằng kỹ thuật thẩm thấu phân lớp. Những khuyết tật vi cấu trúc này làm suy giảm đặc tính vật liệu, dẫn đến sự hình thành khái niệm FGM chứa vi bọt rỗng (PoFGM). Từ những kết quả trên, việc đánh giá tác động của các vi bọt rỗng siêu nhỏ đến quá trình thiết kế kết cấu làm từ loại vật liệu này là yếu tố then chốt nhằm nâng cao độ tin cậy và hiệu suất ứng dụng. Điều này lý giải vì sao PoFGM hiện đang là một trong những chủ đề nghiên cứu trọng tâm trong cộng đồng khoa học vật liệu tiên tiến. Ebrahimi và cs. [11] đã nghiên cứu đáp ứng dao động nhiệt của dầm PoFGM, kết quả nghiên cứu đã chỉ ra rằng vi bọt rỗng có ảnh hưởng đáng kể đến tần số tự nhiên của dầm. Theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản, Thảm [12] đã phân tích đặc trưng dao động tấm FGM đàn hồi-điện-từ có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi Kerr, trong khi, Hải và cs. [13] đã phân tích dao động riêng và đáp ứng động của tấm FGM có vi bọt rỗng với cùng điều kiện nền. Tahir và nhóm nghiên cứu [14] đã phân tích sự lan truyền sóng của tấm sandwich PoFGM với các kiểu phân bố vi bọt rỗng khác nhau trong môi trường nhiệt ẩm. Một lý thuyết biến dạng cắt lượng giác tựa ba chiều đã được đề xuất bởi Liang và Wang [15] để phân tích sự lan truyền sóng của tấm sandwich PoFGM, tấm được đặt trên nền đàn hồi nhớt.

Các phân tích ứng xử cơ học của kết cấu dạng tấm đã được thực hiện dựa trên lý thuyết tấm cổ điển (CPT) [16]. Mặc dù lý thuyết CPT đơn giản, nhưng chỉ mang lại kết quả chính xác khi áp dụng cho tấm mỏng. Lý thuyết tấm bậc nhất (FSDT), bằng cách đưa vào hệ số hiệu chỉnh cắt, đã xem xét đến hiệu ứng cắt ngang [17], tuy nhiên, việc tính toán hệ số hiệu chỉnh phù hợp là rất khó khăn. So với CPT và FSDT, lý thuyết tấm biến dạng cắt bậc cao (HSDT) chính xác hơn và không yêu cầu hệ số hiệu chỉnh, nhưng tính toán theo lý thuyết HSDT lại khá phức tạp [18]. Lý thuyết tấm bốn ẩn chuyển vị cải tiến (HSDT-4) đạt độ chính xác cao và đơn giản trong tính toán bằng cách phân tách chuyển vị ngang thành các thành phần cắt và uốn, đồng thời sử dụng các hàm mô tả sự biến thiên của ứng suất cắt ngang, đảm bảo thỏa mãn điều kiện biên với ứng suất bằng không tại các bề mặt tấm [19, 20]. Tuy nhiên, tất cả các lý thuyết đã đề cập ở trên đều giả định rằng các chuyển vị ngang không thay đổi theo chiều dày, dẫn đến việc bỏ qua ứng suất theo phương chiều dày. Để tính đến ảnh hưởng

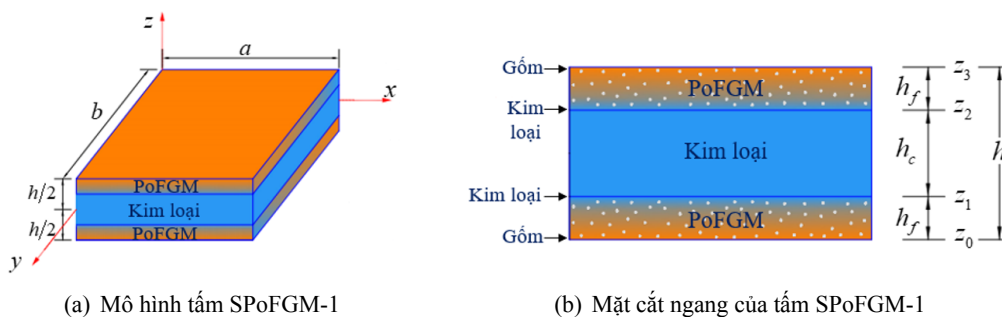
của biến dạng theo phương này, các lý thuyết tựa ba chiều kết hợp với một số mô hình biến dạng cắt đã được đề xuất nhằm phân tích ứng xử cơ học của các tấm dày [21–23].

Qua việc tổng hợp các nghiên cứu trước đây, có thể nhận thấy rằng lý thuyết tựa ba chiều, dù đơn giản và chính xác hơn nhưng vẫn chưa được nghiên cứu đầy đủ để phân tích dao động tự do của tấm sandwich PoFGM. Vì vậy, việc bổ sung và hoàn thiện những nội dung còn thiếu trong tài liệu nghiên cứu cho đối tượng này là cần thiết. Trong nghiên cứu này, ba mô hình tấm sandwich PoFGM khác nhau được xem xét. Các tính chất vật liệu FGM được giả định thay đổi trơn theo chiều dày tấm và tuân theo quy luật phân phối lũy thừa. Hàm biến dạng cắt ngang dạng đa thức theo Ambartsumian [24, 25] lần đầu tiên được áp dụng trong lý thuyết tựa ba chiều để tính toán tấm sandwich PoFGM. Phương pháp này cho kết quả gần với lý thuyết đàn hồi ba chiều, đồng thời giảm thời gian tính toán của chương trình tính so với các hàm lượng giác và các hàm phức tạp khác đã được công bố. Phương trình cân bằng được thiết lập theo nguyên lý Hamilton và lời giải Navier. Tần số dao động riêng của các tấm sandwich PoFGM được suy ra thông qua bài toán trị riêng. Các kết quả thu được được so sánh với các mô hình khác đã được công bố để kiểm tra tính chính xác và hiệu quả của lý thuyết biến dạng cắt sử dụng. Các khảo sát số được tiến hành để đánh giá ảnh hưởng của thuộc tính vật liệu, kiểu phân bố vi bọt rỗng, hệ số vi bọt rỗng, kích thước hình học và các mô hình tấm sandwich khác nhau đến tần số dao động của tấm sandwich PoFGM.

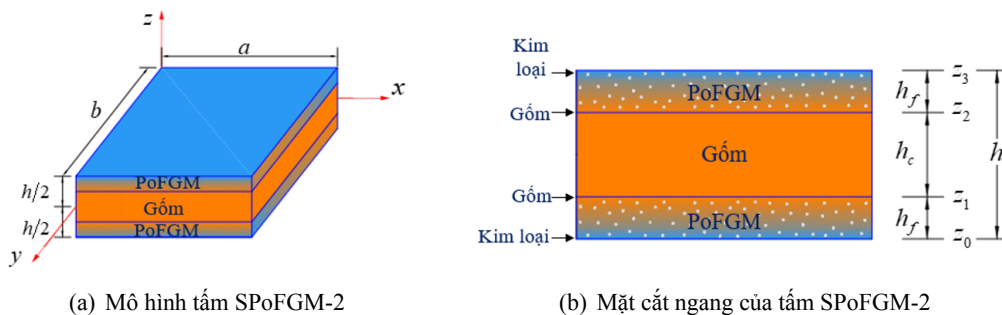
2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Mô hình tấm sandwich PoFGM

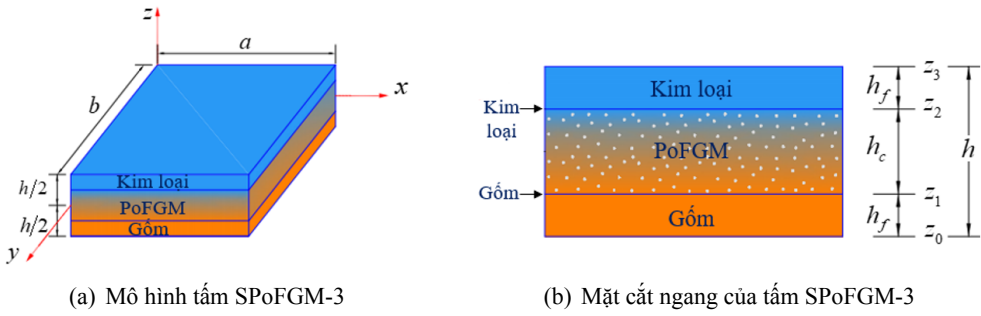
Xét ba loại tấm chữ nhật sandwich FGM chứa vi bọt rỗng (ký hiệu là SPoFGM-1, SPoFGM-2, SPoFGM-3) có cấu tạo các lớp vật liệu như Hình 1–3, kích thước các cạnh $a \times b \times h$. Chiều dày của mỗi lớp bề mặt được ký hiệu là h_f và chiều dày của lớp lõi ký hiệu là h_c . Các lớp được phân biệt theo phương trục z bằng các tọa độ z_0, z_1, z_2 và z_3 .



Hình 1. Tấm SPoFGM-1



Hình 2. Tấm SPoFGM-2



Hình 3. Tấm SPoFGM-3

Như thể hiện trong Hình 1, tấm SPoFGM-1 được tạo thành từ lõi kim loại và các tấm mặt PoFGM. Hình 2, tấm SPoFGM-2 được tạo thành từ lõi gôm và các tấm mặt PoFGM. Trong Hình 3, tấm SPoFGM-3 được tạo thành từ các tấm mặt kim loại và gôm, lớp lõi PoFGM.

Lớp vật liệu PoFGM gồm hai pha vật liệu thành phần: gôm và kim loại. Các tính chất hiệu dụng $P^{(N)}$ của mỗi lớp thứ N ($N = 1, 2, 3$) được giả thiết biến đổi trơn dọc chiều dày tấm theo quy luật hàm lũy thừa:

$$P^{(N)}(z) = P_m + (P_c - P_m) V_c^{(N)} - \frac{\alpha_0}{2} (P_c + P_m) \delta^{(N)} \quad (1)$$

trong đó: N biểu thị số lớp; α_0 là hệ số vi bọt rỗng; P_m và P_c lần lượt là các tính chất vật liệu của kim loại và gôm; $V_c^{(N)}$ là phần thể tích của gôm và $\delta^{(N)}$ là hàm bậc thang.

Phần thể tích gôm $V_c^{(N)}$ và hàm bậc thang $\delta^{(N)}$ cho ba loại tấm sandwich SPoFGM-1, SPoFGM-2, SPoFGM-3 được xác định như sau [26]:

SPoFGM-1:

$$V_c^{(N)} = \begin{cases} ((z - z_1)/(z_0 - z_1))^p \\ 0 \\ ((z - z_2)/(z_3 - z_2))^p \end{cases} \quad \text{và } \delta^{(N)} = \begin{cases} \psi^{(1)} \\ 0 \\ \psi^{(3)} \end{cases} \quad \text{khi } \begin{cases} z_0 \leq z \leq z_1 \\ z_1 \leq z \leq z_2 \\ z_2 \leq z \leq z_3 \end{cases} \quad (2)$$

SPoFGM-2:

$$V_c^{(N)} = \begin{cases} ((z - z_0)/(z_1 - z_0))^p \\ 1 \\ ((z - z_3)/(z_2 - z_3))^p \end{cases} \quad \text{và } \delta^{(N)} = \begin{cases} \psi^{(1)} \\ 0 \\ \psi^{(3)} \end{cases} \quad \text{khi } \begin{cases} z_0 \leq z \leq z_1 \\ z_1 \leq z \leq z_2 \\ z_2 \leq z \leq z_3 \end{cases} \quad (3)$$

SPoFGM-3:

$$V_c^{(N)} = \begin{cases} 1 \\ ((z - z_2)/(z_1 - z_2))^p \\ 0 \end{cases} \quad \text{và } \delta^{(N)} = \begin{cases} 0 \\ \psi^{(2)} \\ 0 \end{cases} \quad \text{khi } \begin{cases} z_0 \leq z \leq z_1 \\ z_1 \leq z \leq z_2 \\ z_2 \leq z \leq z_3 \end{cases} \quad (4)$$

với p là chỉ số tỷ lệ thể tích ($p \geq 0$); $\psi^{(N)}$ ($n = 1, 2, 3$) là hàm số phụ thuộc vào kiểu phân bố vi bọt rỗng (KPB), được xác định theo [27].

Kiểu phân bố vi bọt rỗng đều (PB-I):

$$\psi^{(1)} = \psi^{(2)} = \psi^{(3)} = 1 \quad (5)$$

Kiểu phân bố vi bọt rỗng không đều (PB-II):

$$\begin{aligned}\psi^{(1)} &= (1 - |2z - (z_1 + z_0)| / (z_1 - z_0)) \\ \psi^{(2)} &= (1 - |2z - (z_2 + z_1)| / (z_2 - z_1)) \\ \psi^{(3)} &= (1 - |2z - (z_3 + z_2)| / (z_3 - z_2))\end{aligned}\quad (6)$$

Kiểu phân bố vi bọt rỗng không đều theo quy luật hàm logarit (PB-III):

$$\begin{aligned}\psi^{(1)} &= (2/\alpha_0) \log(1 + 0,15\alpha_0) (1 - |2z - (z_1 + z_0)| / (z_1 - z_0)) \\ \psi^{(2)} &= (2/\alpha_0) \log(1 + 0,15\alpha_0) (1 - |2z - (z_2 + z_1)| / (z_2 - z_1)) \\ \psi^{(3)} &= (2/\alpha_0) \log(1 + 0,15\alpha_0) (1 - |2z - (z_3 + z_2)| / (z_3 - z_2))\end{aligned}\quad (7)$$

Kiểu phân bố vi bọt rỗng không đều theo quy luật hàm tuyến tính (PB-IV):

$$\psi^{(1)} = \left(1 - \frac{z - z_1}{z_0 - z_1}\right); \quad \psi^{(2)} = \left(1 - \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}\right); \quad \psi^{(3)} = \left(1 - \frac{z - z_3}{z_2 - z_3}\right)\quad (8)$$

Do đó, hệ số Poisson $\nu^{(N)}(z)$, khối lượng riêng $\rho^{(N)}(z)$ và mô đun đàn hồi $E^{(N)}(z)$ của tấm sandwich FGM xấp được biểu thị như sau:

$$\begin{aligned}\nu^{(N)}(z) &= \nu_m + (\nu_c - \nu_m) V_c^{(N)} - 0,5\alpha_0 (\nu_c + \nu_m) \delta^{(N)} \\ \rho^{(N)}(z) &= \rho_m + (\rho_c - \rho_m) V_c^{(N)} - 0,5\alpha_0 (\rho_c + \rho_m) \delta^{(N)} \\ E^{(N)}(z) &= E_m + (E_c - E_m) V_c^{(N)} - 0,5\alpha_0 (E_c + E_m) \delta^{(N)}\end{aligned}\quad (9)$$

2.2. Trường chuyển vị

Trường chuyển vị theo lý thuyết tựa ba chiều có dạng [28]:

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - zw_{0,x} - f(z)\theta_{,x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - zw_{0,y} - f(z)\theta_{,y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + g(z)\varphi_z(x, y, t)\end{aligned}\quad (10)$$

trong đó u_0, v_0, w_0, θ và φ_z là năm ẩn chuyển vị của tọa độ x, y và t ; $f(z)$ là hàm số mô tả sự phân bố phi tuyến tính của ứng suất và biến dạng cắt ngang theo chiều dày tấm; $g(z) = f'(z)$. Dạng hàm $f(z)$ thỏa mãn các điều kiện biên không ứng suất ở bề mặt trên cùng và dưới cùng của các tấm được xác định theo Ambartsumian [24, 25]: $f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2}\right) \frac{h^2}{8}$.

Dựa trên giả thiết về biến dạng nhỏ, trường biến dạng tuyến tính được xác định từ trường chuyển vị (10) và được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^2 \\ \varepsilon_y^2 \\ \varepsilon_{xy}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -w_{0,xx} \\ -w_{0,yy} \\ -2w_{0,xy} \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} -\theta_{,xx} \\ -\theta_{,yy} \\ -2\theta_{,xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \varphi_{z,y} - \theta_{,y} \\ \varphi_{z,x} - \theta_{,x} \end{Bmatrix}; \quad \varepsilon_z = g'(z)\varepsilon_z^0 = g'(z)\varphi_z\end{aligned}\quad (11)$$

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của tấm SPoFGM tuân theo định luật Hooke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

trong đó $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}\}^T$ và $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}\}^T$ lần lượt là véc tơ ứng suất và biến dạng. Hệ số độ cứng Q_{ij} được xác định theo:

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} &= \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\ Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} &= \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (13)$$

với ν là hệ số Poisson, ở đây được giả thiết là không đổi theo chiều dày.

2.3. Phương trình chuyển động

Phương trình chuyển động được thiết lập từ nguyên lý Hamilton mở rộng:

$$\int_0^t \delta(U - K)dt = 0 \quad (14)$$

ở đây U là năng lượng biến dạng và K là động năng.

Biến phân của năng lượng biến dạng được xác định theo:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \\ &= \int_A \left(N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x \delta \varepsilon_x^1 + S_x \delta \varepsilon_x^2 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + M_y \delta \varepsilon_y^1 + S_y \delta \varepsilon_y^2 + N_z \delta \varepsilon_z^0 \right. \\ &\quad \left. + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^1 + S_{xy} \delta \gamma_{xy}^2 + N_{yz} \delta \gamma_{yz}^0 + N_{xz} \delta \gamma_{xz}^0 \right) dA \end{aligned} \quad (15)$$

Biến phân của động năng:

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V \rho(z) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dAdz \\ &= \int_A \left(\begin{aligned} &I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) \\ &- I_1 (\dot{u}_0 \delta \dot{w}_{0,x} + \dot{w}_{0,x} \delta \dot{u}_0 + \dot{w}_{0,y} \delta \dot{v}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{w}_{0,y}) \\ &+ I_2 (\dot{w}_{0,x} \delta \dot{w}_{0,x} + \dot{w}_{0,y} \delta \dot{w}_{0,y}) \\ &- I_3 (\dot{\theta}_{,x} \delta \dot{u}_0 + \dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_{,x} + \dot{\theta}_{,y} \delta \dot{v}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{\theta}_{,y}) \\ &+ I_4 (\dot{\theta}_{,x} \delta \dot{w}_{0,x} + \dot{w}_{0,x} \delta \dot{\theta}_{,x} + \dot{\theta}_{,y} \delta \dot{w}_{0,y} + \dot{w}_{0,y} \delta \dot{\theta}_{,y}) \\ &+ I_5 (\dot{\theta}_{,x} \delta \dot{\theta}_{,x} + \dot{\theta}_{,y} \delta \dot{\theta}_{,y}) + I_6 (\dot{\varphi}_z \delta \dot{w}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{\varphi}_z) + I_7 (\dot{\varphi}_z \delta \dot{\varphi}_z) \end{aligned} \right) dA \end{aligned} \quad (16)$$

trong đó dấu chấm phía trên biểu diễn đạo hàm theo biến thời gian; $\rho(z)$ là khối lượng riêng; I_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) là các mômen quán tính khối lượng được tính toán theo:

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7) \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z), g(z), g^2(z)\right) dz \quad (17)$$

Các phương trình chuyển động của tấm SPoFGM được suy ra bằng cách sử dụng nguyên lý Hamilton và được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : N_{x,x} + N_{xy,y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \ddot{w}_{0,x} - I_3 \ddot{\theta}_{0,x} \\ \delta v_0 : N_{y,y} + N_{xy,x} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \ddot{w}_{0,y} - I_3 \ddot{\theta}_{0,y} \\ \delta w_0 : M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy} &= I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) - I_2 (\ddot{w}_{0,xx} + \ddot{w}_{0,yy}) - I_4 (\ddot{\theta}_{x,xx} + \ddot{\theta}_{y,yy}) + I_6 \ddot{\varphi}_z \\ \delta \theta : S_{x,xx} + S_{y,yy} + 2S_{xy,xy} - N_{yz,y} - N_{xz,x} &= I_3 (\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) - I_4 (\ddot{w}_{0,xx} + \ddot{w}_{0,yy}) - I_5 (\ddot{\theta}_{x,xx} + \ddot{\theta}_{y,yy}) \\ \delta \varphi_z : -N_z + N_{yz,y} + N_{xz,x} &= I_6 \ddot{w}_0 + I_7 \ddot{\varphi}_z \end{aligned} \quad (18)$$

trong đó các lực và mô men trong tấm được xác định như sau:

$$\begin{aligned} (N_i, M_i, S_i) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f(z)) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy) \\ N_z &= \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \\ (N_{yz}, N_{xz}) &= \int_{-h/2}^{h/2} g(z) (\sigma_{yz}, \sigma_{xz}) dz \end{aligned} \quad (19)$$

Bằng cách thay thế quan hệ ứng suất-biến dạng vào các định nghĩa về lực và mô men trong công thức (19), ta được:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ S_x \\ S_y \\ S_{xy} \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & G_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 & G_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & E_{11} & E_{12} & 0 & H_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & E_{12} & E_{22} & 0 & H_{23} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & E_{66} & 0 \\ C_{11} & C_{12} & 0 & E_{11} & E_{12} & 0 & F_{11} & F_{12} & 0 & I_{13} \\ C_{12} & C_{22} & 0 & E_{12} & E_{22} & 0 & F_{12} & F_{22} & 0 & I_{23} \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & E_{66} & 0 & 0 & F_{66} & 0 \\ G_{13} & G_{23} & 0 & H_{13} & H_{23} & 0 & I_{13} & I_{23} & 0 & K_{23} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \\ \varepsilon_x^2 \\ \varepsilon_y^2 \\ \gamma_{xy}^2 \\ \varepsilon_z^0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} N_{yz} \\ N_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_{44} & 0 \\ 0 & J_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

trong đó

$$(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}, I_{ij}, J_{ij}, K_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \left(1, z, f(z), z^2, zf(z), f^2(z), g'(z), zg'(z), g'(z)f(z), g^2(z), [g'(z)]^2\right) dz \quad (22)$$

3. Lời giải Navier

Xét các tấm sandwich hình chữ nhật với bốn biên tựa khớp, có kích thước và cấu tạo vật liệu như trong Hình 1–3. Theo phương pháp nghiệm Navier, các biến chuyển vị thỏa mãn điều kiện biên được đưa ra như sau [29]:

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= U_{mn} \cos(\xi x) \sin(\eta y) e^{i\omega t}; & v_0(x, y, t) &= V_{mn} \sin(\xi x) \cos(\eta y) e^{i\omega t} \\ w_0(x, y, t) &= W_{mn} \sin(\xi x) \sin(\eta y) e^{i\omega t}; & \theta(x, y, t) &= X_{mn} \sin(\xi x) \sin(\eta y) e^{i\omega t} \\ \varphi_z(x, y, t) &= Z_{mn} \sin(\xi x) \sin(\eta y) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (23)$$

trong đó ω là tần số dao động riêng (rad/s); $\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Z_{mn}\}^T$ là các hệ số của các thành phần chuyển vị cần xác định; $\xi = m\pi/a, \eta = n\pi/b$; t là biến thời gian; $i^2 = -1$ là số phức.

Thay thế các biểu thức chuyển vị (23) vào các phương trình (18) và thực hiện các phép biến đổi toán học ta thu được phương trình:

$$\left\{ \left[\hat{K} \right]_{5 \times 5} - \omega^2 \left[\hat{M} \right]_{5 \times 5} \right\} \{\Delta\} = \{0\} \quad (24)$$

trong đó các hệ số \hat{k}_{ij} và \hat{m}_{ij} của ma trận độ cứng kết cấu $\left[\hat{K} \right]_{5 \times 5}$ và ma trận khối lượng $\left[\hat{M} \right]_{5 \times 5}$ được tính theo:

$$\begin{aligned} \hat{k}_{11} &= -(A_{11}\xi^2 + A_{66}\eta^2); & \hat{k}_{12} &= -(A_{12} + A_{66})\xi\eta; & \hat{k}_{13} &= B_{11}\xi^3 + (B_{12} + 2B_{66})\xi\eta^2 \\ \hat{k}_{14} &= C_{11}\xi^3 + (C_{12} + 2C_{66})\xi\eta^2; & \hat{k}_{15} &= G_{13}\xi; & \hat{k}_{22} &= -(A_{22}\eta^2 + A_{66}\xi^2) \\ \hat{k}_{23} &= (B_{12} + 2B_{66})\xi\eta^2 + B_{22}\eta^3; & \hat{k}_{24} &= (C_{12} + 2C_{66})\xi^2\eta + C_{22}\eta^3; & \hat{k}_{25} &= G_{23}\eta \\ \hat{k}_{33} &= -D_{11}\xi^4 - (2D_{12} + 4D_{66})\xi^2\eta^2 - D_{22}\eta^4 \\ \hat{k}_{34} &= -E_{11}\xi^4 - (2E_{12} + 4E_{66})\xi^2\eta^2 - E_{22}\eta^4; & \hat{k}_{35} &= -(H_{13}\xi^2 + H_{23}\eta^2) \\ \hat{k}_{44} &= -F_{11}\xi^4 - (2F_{12} + 4F_{66})\xi^2\eta^2 - F_{22}\eta^4 - J_{44}\eta^2 - J_{55}\xi^2 \\ \hat{m}_{11} &= \hat{m}_{22} = -I_0; & \hat{m}_{13} &= -I_1\xi; & \hat{m}_{14} &= -I_3\xi; & \hat{m}_{23} &= -I_1\eta; & \hat{m}_{24} &= -I_3\eta \\ \hat{m}_{33} &= -I_0 - I_2(\xi^2 + \eta^2); & \hat{m}_{34} &= -I_4(\xi^2 + \eta^2); & \hat{m}_{35} &= -I_6; & \hat{m}_{44} &= -I_5(\xi^2 + \eta^2); & \hat{m}_{55} &= -I_7 \end{aligned} \quad (25)$$

Tần số dao động riêng của tấm SPoFGM được xác định bằng cách giải phương trình trị riêng: $\left[\left[\hat{K} \right]_{5 \times 5} - \omega^2 \left[\hat{M} \right]_{5 \times 5} \right] = 0$. Nghiệm của phương trình này là tần số góc dao động ω_{mn} tương ứng với dạng dao động (m, n) của tấm. Tần số dao động riêng cơ bản là tần số nhỏ nhất, được xác định bởi: $\omega = \min \{\omega_{mn}\}$.

4. Kết quả số và thảo luận

Trên cơ sở mô hình giải tích đã thiết lập, tác giả viết chương trình tính tần số dao động của tấm SPoFGM bằng ngôn ngữ Matlab để thực hiện các khảo sát số.

4.1. Ví dụ kiểm chứng

Hai ví dụ so sánh được thực hiện để kiểm chứng tính chính xác của mô hình hiện tại. So sánh đầu tiên được tiến hành với tấm đơn lớp FGM (Al/Al_2O_3) hoàn hảo ($\alpha_0 = 0$) và đối chiếu với kết quả của Jin và cs. [30], trong đó sử dụng mô hình giải tích dựa trên lý thuyết đàn hồi ba chiều. Các thuộc tính vật liệu của Al_2O_3 : $E_c = 380$ GPa; $\rho_c = 3800$ kgm^{-3} ; $\nu_c = 0,3$ và của Al : $E_m = 70$ GPa; $\rho_m = 2702$ kgm^{-3} ; $\nu_m = 0,3$. Kết quả so sánh tần số cơ bản không thứ nguyên $\tilde{\omega}$ được trình bày trong Bảng 1. Có thể thấy rằng, các giá trị tần số thu được từ mô hình hiện tại, dựa trên hàm biến dạng cắt ngang của Ambartsumian [24, 25], cho sai khác nhỏ so với kết quả tính theo mô hình ba chiều (3D), ngay cả trong trường hợp tấm chữ nhật rất dày ($a/h = 2$).

Bảng 1. So sánh tần số cơ bản không thứ nguyên $\tilde{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$ của tấm vuông FGM dày vừa phải, dày và rất dày

a/h	Mô hình	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$
10	3D [30]	0,1135	0,0870	0,0789
	Bài báo	0,1135	0,0882	0,0806
5	3D [30]	0,4169	0,3222	0,2905
	Bài báo	0,4168	0,3260	0,2961
2	3D [30]	1,8470	1,4687	1,3095
	Bài báo	1,8507	1,4776	1,3221

So sánh thứ hai được thực hiện cho tấm sandwich FGM (Al/Al₂O₃) có vi bọt rỗng. Bảng 2 trình bày kết quả tính toán và so sánh tần số dao động $\tilde{\omega} = \omega a^2/h \sqrt{\rho_0/E_0}$ ($\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$; $E_0 = 1 \text{ GPa}$) và so sánh khi thay đổi kiểu phân bố vi bọt rỗng, hệ số vi bọt rỗng và tỷ lệ chiều dày các lớp của tấm sandwich (ký hiệu: $h_f - h_c - h_f$) với nghiên cứu của Daikh và Zenkour [27] sử dụng mô hình giải tích dựa trên lý thuyết tấm bậc cao năm ẩn chuyển vị (TSDT). Kết quả cho thấy, với các giá trị tham số α_0 và các kiểu phân bố vi bọt rỗng khác nhau, sai lệch giữa kết quả của hai phương pháp là không đáng kể.

Bảng 2. So sánh tần số dao động cơ bản không thứ nguyên $\tilde{\omega}$ của tấm sandwich FGM có vi bọt rỗng ($p = 2$; $a/b = 1$; $a/h = 10$)

KPB	α_0	Mô hình	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2
PB-I	0	TSDT [27]	1,06155	1,18847	1,30244	1,12248
		Bài báo	1,06350	1,19058	1,30475	1,12447
	0,1	TSDT [27]	0,98258	1,12071	1,24933	1,04712
		Bài báo	0,99324	1,13160	1,25924	1,05817
	0,2	TSDT [27]	0,87867	1,04201	1,19156	0,95491
		Bài báo	0,89542	1,05903	1,20655	0,97239
PB-II	0,1	TSDT [27]	1,03235	1,15768	1,27723	1,09008
		Bài báo	1,03892	1,16445	1,28351	1,09694
	0,2	TSDT [27]	1,00033	1,12524	1,25140	1,05528
		Bài báo	1,01062	1,13570	1,26074	1,06604
PB-III	0,1	TSDT [27]	1,03308	1,15844	1,27785	1,09089
		Bài báo	1,03955	1,16511	1,28405	1,09764
	0,2	TSDT [27]	1,00347	1,12837	1,25386	1,05867
		Bài báo	1,01346	1,13852	1,26294	1,06910
PB-IV	0,1	TSDT [27]	1,05559	1,17079	1,28422	1,10840
		Bài báo	1,06175	1,17739	1,29093	1,11451
	0,2	TSDT [27]	1,05213	1,15260	1,26581	1,09394
		Bài báo	1,05979	1,16307	1,27621	1,10356

Dựa trên hai ví dụ kiểm chứng ở trên, có thể thấy rằng phương pháp giải tích và mô hình tính theo lý thuyết tựa ba chiều đơn giản được trình bày trong bài báo có độ tin cậy cao. Trên cơ sở đó, các ví dụ khảo sát được thực hiện trong mục tiếp theo.

4.2. Các ví dụ khảo sát

Trong đề mục này, các khảo sát số được thực hiện để đánh giá sự ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kiểu phân bố vi bột rỗng và các kích thước hình học đến tần số dao động riêng của tấm SPoFGM. Xét ba loại tấm SPoFGM có cấu tạo như các Hình 1–3. Các thông số vật liệu FGM (Al/Al₂O₃) được lấy theo ví dụ 4.1. Công thức xác định tần số dao động riêng không thứ nguyên sau đây được sử dụng:

$$\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_0 / E_0} \text{ với } \rho_0 = 1 \text{ GPa}; E_0 = 1 \text{ kg/m}^3 \tag{26}$$

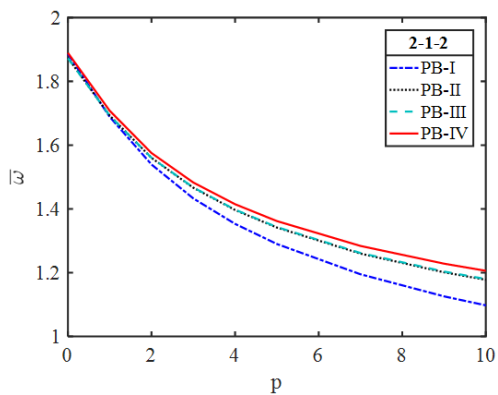
Bảng 3. Tần số dao động cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm sandwich FGM có vi bột rỗng ($p = 5; a/b = 1; a/h = 10$)

Tấm	KBP	α_0	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	1-2-2	1-1-2	
SPoFGM-1	PB-I	0	1,4268	1,3238	1,2564	1,3693	1,2860	1,3373	
		0,1	1,4053	1,2798	1,2030	1,3345	1,2421	1,3014	
		0,2	1,3645	1,2257	1,1386	1,2899	1,1889	1,2560	
	PB-II	0,1	1,4226	1,3050	1,2319	1,3562	1,2671	1,3237	
		0,2	1,4161	1,2844	1,2052	1,3415	1,2464	1,3085	
	PB-III	0,1	1,4227	1,3055	1,2325	1,3565	1,2675	1,3241	
		0,2	1,4168	1,2864	1,2078	1,3430	1,2484	1,3100	
	PB-IV	0,1	1,4321	1,3148	1,2397	1,3665	1,2752	1,3320	
		0,2	1,4309	1,3047	1,2217	1,3618	1,2633	1,3248	
	SPoFGM-2	PB-I	0	0,9479	1,0466	1,1762	0,9837	1,1178	1,0402
			0,1	0,8451	0,9629	1,1158	0,8866	1,0441	0,9505
			0,2	0,6886	0,8549	1,0444	0,7519	0,9505	0,8261
PB-II		0,1	0,9108	1,0095	1,1480	0,9431	1,0850	1,0031	
		0,2	0,8670	0,9679	1,1176	0,8965	1,0485	0,9604	
PB-III		0,1	0,9118	1,0105	1,1487	0,9442	1,0858	1,0041	
		0,2	0,8714	0,9720	1,1205	0,9012	1,0521	0,9647	
PB-IV		0,1	0,9384	1,0252	1,1566	0,9648	1,0984	1,0227	
		0,2	0,9276	1,0016	1,1357	0,9437	1,0771	1,0032	
SPoFGM-3		PB-I	0	1,2712	1,2622	1,2654	1,2619	1,2637	1,2636
			0,1	1,2712	1,2650	1,2615	1,2656	1,2752	1,2742
			0,2	1,2712	1,2665	1,2528	1,2690	1,2856	1,2847
	PB-II	0,1	1,2712	1,2651	1,2889	1,2612	1,2477	1,2545	
		0,2	1,2712	1,2662	1,2951	1,2604	1,2285	1,2453	
	PB-III	0,1	1,2712	1,2651	1,2886	1,2612	1,2481	1,2547	
		0,2	1,2712	1,2662	1,2950	1,2605	1,2304	1,2462	
	PB-IV	0,1	1,2712	1,2619	1,2308	1,2658	1,2789	1,2785	
		0,2	1,2712	1,2571	1,1472	1,2692	1,2796	1,2929	

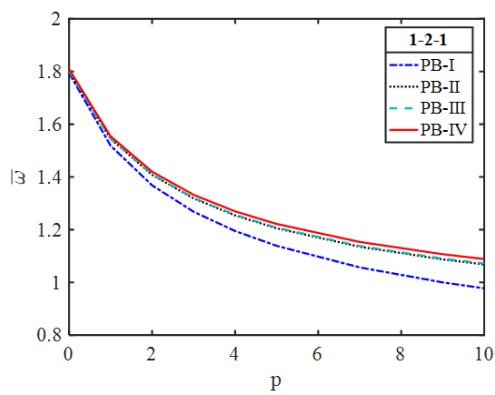
Bảng 3 trình bày kết quả phân tích tần số $\bar{\omega}$ của ba loại tấm SPoFGM với bốn kiểu phân bố vi bột rỗng và sáu tỷ lệ chiều dày lớp mặt/lõi (tính theo thứ tự từ dưới lên trên). Với SPoFGM-1, tỷ lệ (2-1-2) luôn cho tần số $\bar{\omega}$ cao nhất, tiếp theo là (1-1-2), (1-1-1), (1-2-2), (1-2-1) và thấp nhất là (1-2-1). Đáng chú ý, tấm không lõi (1-0-1) có tần số cao hơn tất cả các tấm có lõi. Với SPoFGM-2, tỷ lệ (1-2-1) luôn cho tần số lớn nhất, kể cả so với (1-0-1). Riêng SPoFGM-3, tần số cao nhất phụ thuộc vào kiểu phân bố vi bột: (1-0-1) cao nhất với PB-I, PB-IV; còn (1-2-1) cao nhất với PB-II, PB-III.

a. Ảnh hưởng của các đặc trưng vật liệu

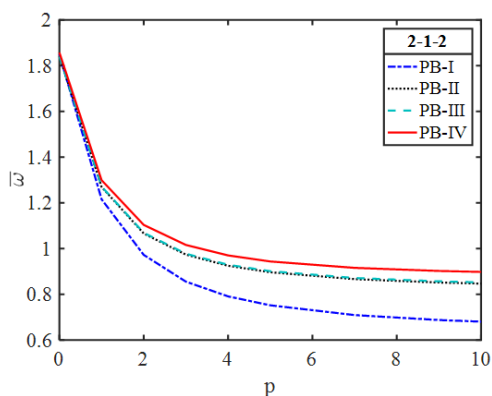
Hình 4 cho thấy sự thay đổi của tần số dao động cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm sandwich SPoFGM theo chỉ số tỷ lệ thể tích p , với bốn kiểu phân bố vi bột rỗng khác nhau, xét cho hai trường hợp tỷ lệ lớp (2-1-2) và (1-2-1). Kết quả cho thấy, khi chỉ số p tăng, tần số dao động giảm. Nguyên nhân là do khi p tăng, vật liệu lớp FGM chuyển dần từ gốm thuần sang hỗn hợp giữa gốm và kim loại.



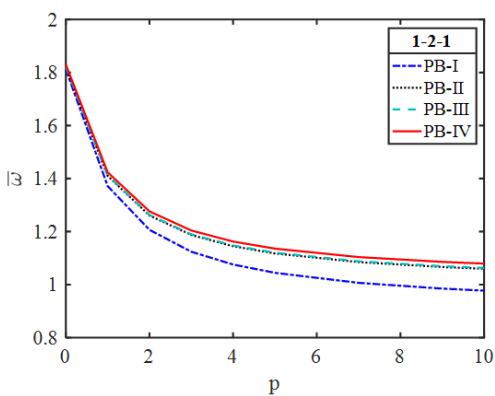
(a) SPoFGM-1; (2-1-2)



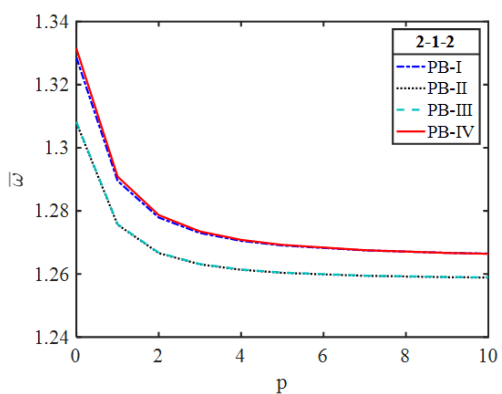
(b) SPoFGM-1; (1-2-1)



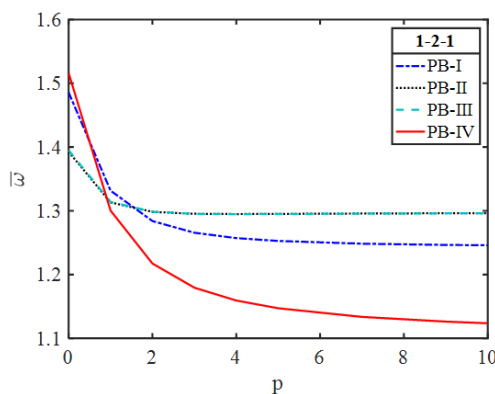
(c) SPoFGM-2; (2-1-2)



(d) SPoFGM-2; (1-2-1)



(e) SPoFGM-3; (2-1-2)

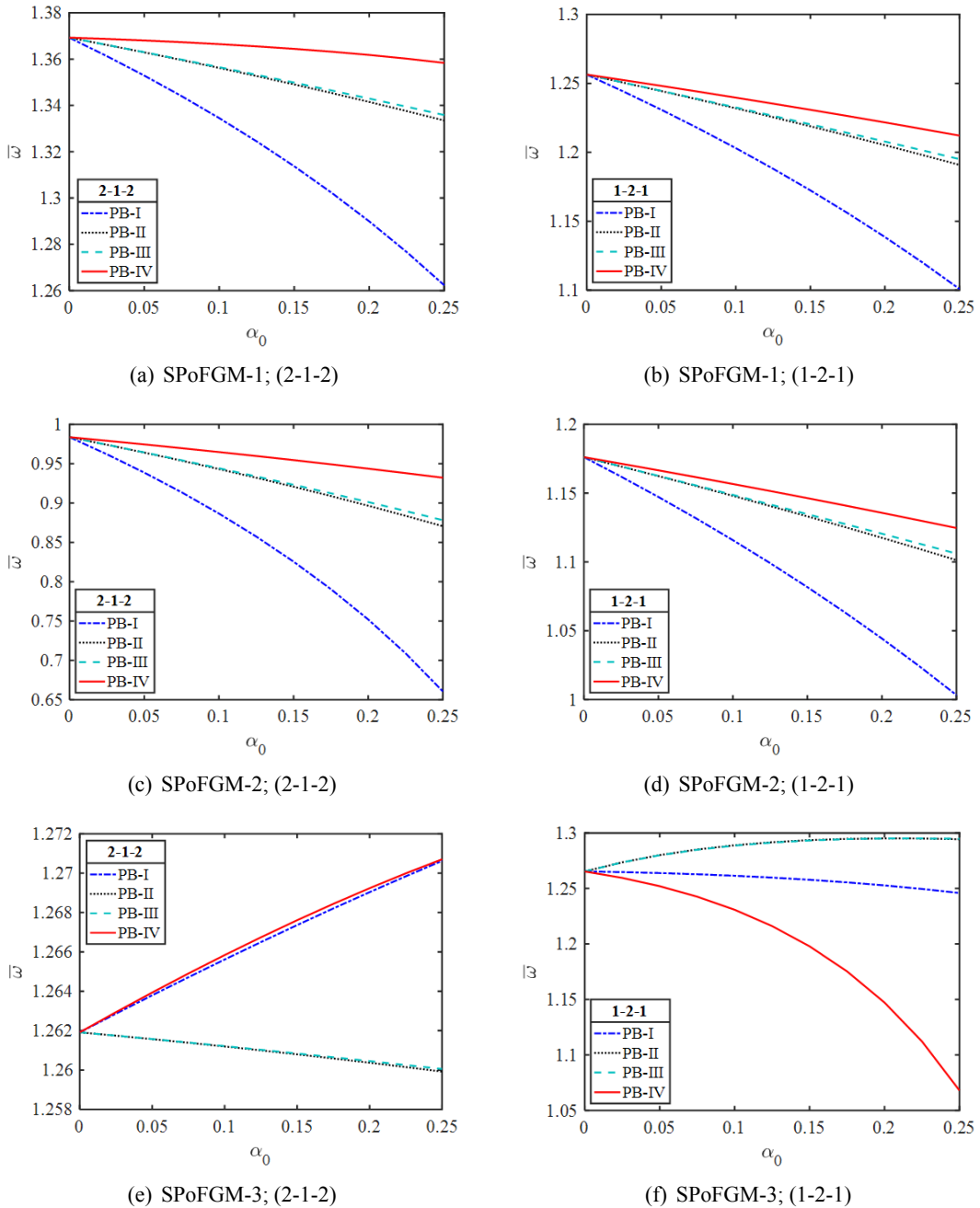


(f) SPoFGM-3; (1-2-1)

Hình 4. Ảnh hưởng của tham số p đến tần số dao động riêng không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm SPoFGM ($a/b = 1; a/h = 10; \alpha_0 = 0,2$)

Việc gia tăng thành phần kim loại có mô đun đàn hồi thấp hơn so với gốm sẽ làm giảm độ cứng tổng thể của tấm, dẫn đến tần số dao động thấp hơn.

Ngoài ra, đối với tấm SPoFGM-1 và SPoFGM-2, kiểu phân bố vi bột rỗng PB-I cho tần số thấp nhất, PB-IV cho tần số cao nhất. Tuy nhiên, tấm SPoFGM-3 có xu hướng khác biệt. Cụ thể, với tỷ lệ lớp (2-1-2), kiểu phân bố PB-IV cho tần số cao nhất (Hình 4(e)), trong khi với tỷ lệ (1-2-1), tần số lại giảm xuống thấp nhất khi $p \geq 1$ (Hình 4(f)).



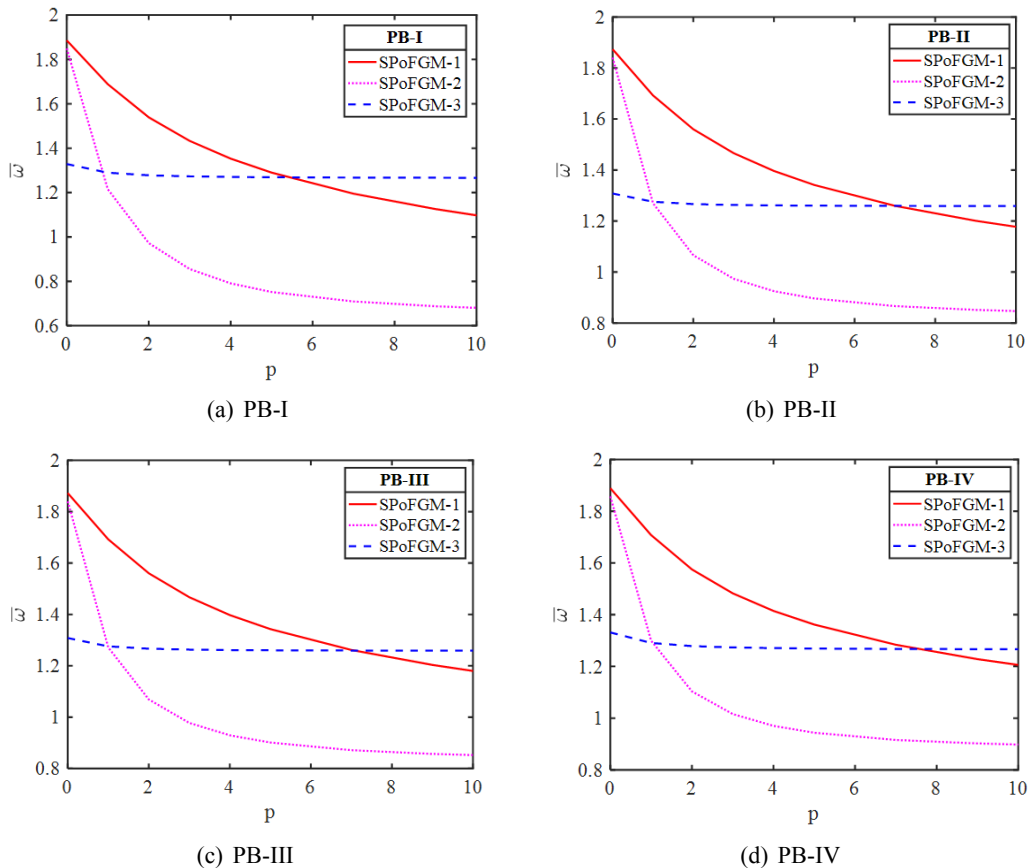
Hình 5. Ảnh hưởng của hệ số vi bột rỗng α_0 đến tần số dao động riêng không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm SPoFGM ($a/b = 1$; $a/h = 10$; $p = 5$)

Ảnh hưởng của hệ số vi bọt rỗng α_0 đến tần số dao động cơ bản không thứ nguyên của tấm vuông SPoFGM có các lớp bề mặt là PoFGM (tấm SPoFGM-1 và SPoFGM-2) được thể hiện trong các Hình 5(a), 5(b), 5(c) và 5(d). Kết quả cho thấy α_0 có tác động đáng kể đến đặc tính dao động của tấm, trong đó khi α_0 tăng, tần số không thứ nguyên giảm. Nguyên nhân là do sự xuất hiện của vi bọt rỗng làm thay đổi đặc tính vật liệu, chẳng hạn như mô đun Young, dẫn đến giảm độ cứng của tấm khi độ xốp tăng.

Đối với tấm SPoFGM-3 (Hình 5(e), 5(f)), trong đó lớp lõi là SPoFGM còn hai lớp bề mặt là vật liệu đồng hướng, tần số dao động có sự phụ thuộc phức tạp vào α_0 khi chiều dày lớp lõi thay đổi. Cụ thể, với kiểu phân bố vi bọt rỗng PB-I và PB-IV, nếu tỷ lệ các lớp của tấm sandwich là (2-1-2), tần số tăng khi α_0 tăng. Ngược lại, nếu tỷ lệ các lớp là (1-2-1), kiểu phân bố PB-I và PB-IV lại cho tần số giảm khi α_0 tăng, trong khi PB-II và PB-III lại cho tần số tăng khi α_0 tăng.

Như vậy, có thể kết luận rằng ảnh hưởng của hệ số vi bọt rỗng α_0 đến tần số $\bar{\omega}$ của các tấm SPoFGM khá phức tạp, phụ thuộc vào vật liệu lớp, kiểu phân bố vi bọt và tỷ lệ chiều dày lớp. Kết quả cho thấy việc lựa chọn cấu trúc lớp và phân bố vi bọt rỗng đóng vai trò quan trọng trong điều chỉnh đặc tính dao động. Do đó, cần xem xét kỹ các yếu tố này khi thiết kế tấm sandwich cho ứng dụng cụ thể. Ngoài ra, sự khác biệt giữa các loại tấm cho thấy cần phân tích riêng từng kết cấu để dự đoán chính xác ứng xử dao động.

b. Ảnh hưởng của cấu tạo tấm sandwich

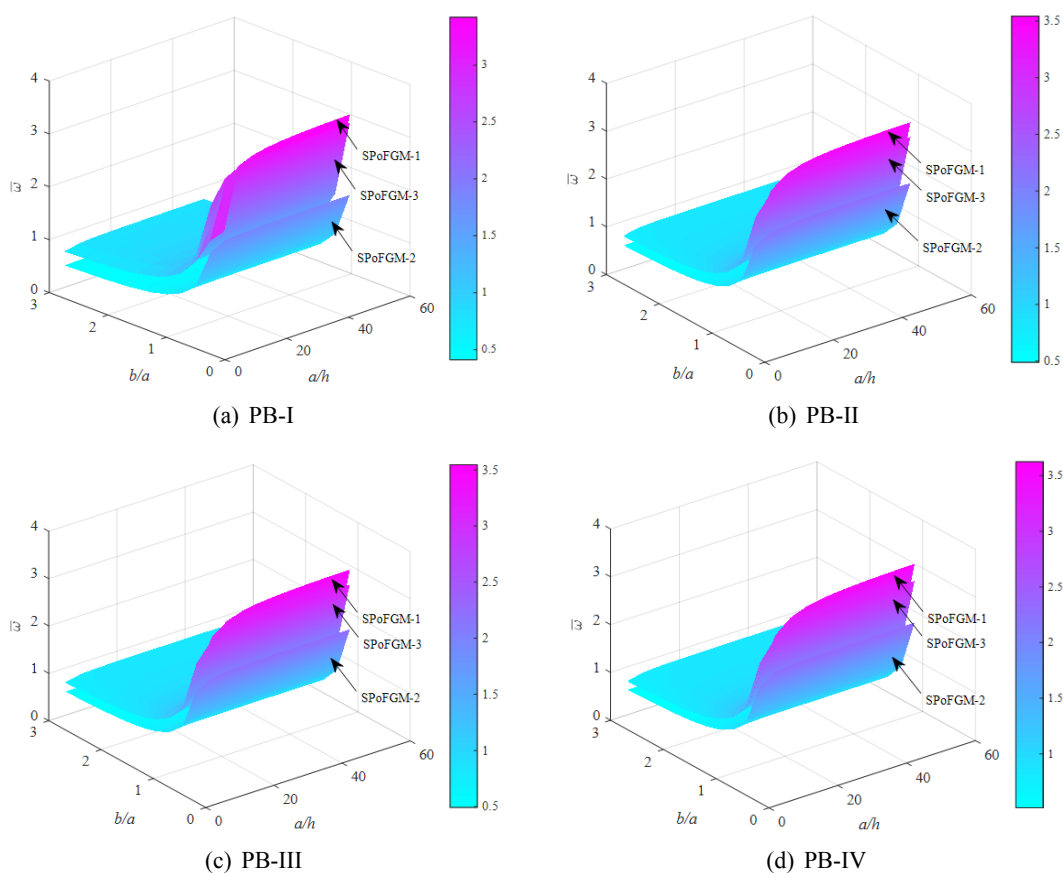


Hình 6. Ảnh hưởng của cấu trúc vật liệu các lớp đến tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của tấm SPoFGM ($a/b = 1; a/h = 10; \alpha_0 = 0,2; 2-1-2$)

Hình 6 minh họa sự thay đổi của tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của ba loại tấm SPoFGM khi chỉ số tỷ lệ thể tích p thay đổi. Kết quả cho thấy: Khi $p \geq 1$, tấm SPoFGM-2 có tần số $\bar{\omega}$ thấp nhất trong ba loại tấm được xem xét. Khi $p \leq 5$, tấm SPoFGM-1 có tần số cao nhất. Tuy nhiên khi $p \geq 8$, tấm SPoFGM-3 lại có tần số cao nhất. Như vậy, thứ tự độ lớn của tần số $\bar{\omega}$ của 3 loại tấm thay đổi khi giá trị của p thay đổi. Ngoài ra, đường đồ thị của tấm SPoFGM-3 có xu hướng ổn định hơn so với hai loại tấm còn lại, cho thấy rằng chỉ số p ảnh hưởng không đáng kể đến tần số của loại tấm này.

c. Ảnh hưởng của kích thước hình học

Hình 7 minh họa ảnh hưởng của tỷ số a/h và b/a đến tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm sandwich SPoFGM, trong đó a được cố định là 1 m, còn h và b thay đổi. Khi tỷ số b/a tăng (chiều rộng b tăng), tần số $\bar{\omega}$ của tấm sandwich SPoFGM có xu hướng giảm đối với cả bốn kiểu phân bố vi bọt rỗng. Hiện tượng này có thể được giải thích bởi sự suy giảm độ cứng tương đối theo phương cạnh b , đồng thời khối lượng tấm tăng theo diện tích bề mặt dẫn đến tần số $\bar{\omega}$ giảm. Mặt khác, tham số tần số dao động riêng không thứ nguyên $\bar{\omega}$ lại có xu hướng tăng khi tỷ số a/h tăng lên.



Hình 7. Ảnh hưởng của tỷ số a/h và b/a đến tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của tấm SPoFGM ($a = 1$; $p = 5$; $\alpha_0 = 0,2$; 2-1-2)

5. Kết luận

Bài báo trình bày nghiên cứu lý thuyết về dao động tự do của tấm sandwich FGM chứa vi bọt rỗng, sử dụng lý thuyết biến dạng cắt tựa ba chiều đơn giản. Ba loại tấm sandwich SPoFGM (SPoFGM-1,

SPoFGM-2, SPoFGM-3) và bốn kiểu phân bố vi bọt rỗng được xem xét. Kết quả kiểm chứng cho thấy mô hình lý thuyết kết hợp nghiệm Navier đạt độ chính xác cao. Một số kết luận chính gồm:

- Tần số dao động cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ phụ thuộc vào tỷ lệ chiều dày lớp mặt/lõi, với tỷ lệ tối ưu thay đổi theo từng loại tấm và kiểu phân bố vi bọt.
- Tần số $\bar{\omega}$ giảm khi tăng chỉ số p do độ cứng tổng thể giảm; PB-I cho tần số thấp nhất, PB-IV cao nhất (trừ trường hợp đặc biệt của tấm SPoFGM-3).
- Hệ số vi bọt rỗng α_0 làm giảm tần số $\bar{\omega}$ do độ cứng giảm, nhưng ảnh hưởng này phức tạp hơn với tấm SPoFGM-3.
- Thứ tự tần số giữa ba loại tấm thay đổi theo chỉ số p , trong đó tấm SPoFGM-3 ít bị ảnh hưởng hơn.
- Tần số $\bar{\omega}$ giảm khi tăng b/a và tăng khi tăng a/h .

Tài liệu tham khảo

- [1] Reddy, J. N. (2000). [Analysis of functionally graded plates](#). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1–3):663–684.
- [2] Zenkour, A. M. (2006). [Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates](#). *Applied Mathematical Modelling*, 30(1):67–84.
- [3] Zhao, X., Lee, Y. Y., Liew, K. M. (2009). [Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method](#). *Journal of Sound and Vibration*, 319(3–5):918–939.
- [4] Garg, A., Belarbi, M.-O., Chalak, H. D., Chakrabarti, A. (2021). [A review of the analysis of sandwich FGM structures](#). *Composite Structures*, 258:113427.
- [5] Sayyad, A. S., Ghugal, Y. M. (2018). [Modeling and analysis of functionally graded sandwich beams: A review](#). *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(21):1776–1795.
- [6] Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., Vo, T. P., Lee, J. (2014). [Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory](#). *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 45:211–225.
- [7] Zenkour, A. M. (2005). [A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2—Buckling and free vibration](#). *International Journal of Solids and Structures*, 42(18–19):5243–5258.
- [8] Sid Ahmed Houari, M., Tounsi, A., Anwar Bég, O. (2013). [Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 76:102–111.
- [9] Tounsi, A., Houari, M. S. A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E. A. (2013). [A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates](#). *Aerospace Science and Technology*, 24(1):209–220.
- [10] Alibeigloo, A., Alizadeh, M. (2015). [Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using state space differential quadrature method](#). *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 54: 252–266.
- [11] Ebrahimi, F., Ghasemi, F., Salari, E. (2015). [Investigating thermal effects on vibration behavior of temperature-dependent compositionally graded Euler beams with porosities](#). *Meccanica*, 51(1):223–249.
- [12] Thâm, V. V. (2025). [Đặc trưng dao động của tấm FGM đàn hồi-điện-từ có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi Kerr](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCN XD) - ĐHXDHN*, 19(1V):134–151.
- [13] Hải, L. T., Long, N. V., Tú, T. M. (2024). [Dao động riêng và đáp ứng động của tấm FGM có vi bọt rỗng trên nền đàn hồi Kerr](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCN XD) - ĐHXDHN*, 18(3V):1–15.
- [14] Tahir, S. I., Chikh, A., Tounsi, A., Al-Osta, M. A., Al-Dulaijan, S. U., Al-Zahrani, M. M. (2021). [Wave propagation analysis of a ceramic-metal functionally graded sandwich plate with different porosity distributions in a hygro-thermal environment](#). *Composite Structures*, 269:114030.
- [15] Liang, C., Wang, Y. Q. (2020). [A quasi-3D trigonometric shear deformation theory for wave propagation analysis of FGM sandwich plates with porosities resting on viscoelastic foundation](#). *Composite Structures*, 247:112478.
- [16] Wang, Y. Q., Zu, J. W. (2017). [Vibration behaviors of functionally graded rectangular plates with porosities and moving in thermal environment](#). *Aerospace Science and Technology*, 69:550–562.

- [17] Mao, J.-J., Zhang, W. (2018). Linear and nonlinear free and forced vibrations of graphene reinforced piezoelectric composite plate under external voltage excitation. *Composite Structures*, 203:551–565.
- [18] Zhang, W., Yang, J., Hao, Y. (2009). Chaotic vibrations of an orthotropic FGM rectangular plate based on third-order shear deformation theory. *Nonlinear Dynamics*, 59(4):619–660.
- [19] Thâm, V. V., Huân, D. T., Bình, C. T. (2020). Phân tích tĩnh kết cấu tấm chữ nhật E-FGM có gắn lớp vật liệu áp điện. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD) - ĐHXD*, 14(4V):39–53.
- [20] Thâm, V. V., Quốc, T. H., Tú, T. M. (2019). Phân tích dao động riêng kết cấu tấm composite lớp gia cường ống nano cacbon có gắn lớp vật liệu áp điện. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD) - ĐHXD*, 13(3V):42–54.
- [21] Thai, H.-T., Kim, S.-E. (2013). A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Composite Structures*, 99:172–180.
- [22] Belabed, Z., Ahmed Houari, M. S., Tounsi, A., Mahmoud, S. R., Anwar Bég, O. (2014). An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates. *Composites Part B: Engineering*, 60:274–283.
- [23] Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M. S. A., Bessaim, A., Bedia, E. A. A. (2014). New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Journal of Engineering Mechanics*, 140(2):374–383.
- [24] Ambartsumian, S. A. (1960). On the theory of bending of anisotropic plates and shallow shells. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 24(2):500–514.
- [25] Belkhouja, Y., Ouinas, D., Fekirini, H., Olay, J. A. V., Touahmia, M. (2020). Three new hybrid quasi-3D and 2D higher-order shear deformation theories for free vibration analysis of functionally graded material monolayer and sandwich plates with stretching effect. *Advanced Composites Letters*, 29: 0963693520941865.
- [26] Li, Q., Iu, V. P., Kou, K. P. (2008). Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 311(1–2):498–515.
- [27] Daikh, A. A., Zenkour, A. M. (2019). Free vibration and buckling of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates using a simple higher-order shear deformation theory. *Materials Research Express*, 6(11):115707.
- [28] Zenkour, A. M. (2006). Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Archive of Applied Mechanics*, 77(4):197–214.
- [29] Li, M., Guedes Soares, C., Yan, R. (2021). Free vibration analysis of FGM plates on Winkler/Pasternak/Kerr foundation by using a simple quasi-3D HSDT. *Composite Structures*, 264: 113643.
- [30] Jin, G., Su, Z., Shi, S., Ye, T., Gao, S. (2014). Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions. *Composite Structures*, 108:565–577.