



ĐÁNH GIÁ ĐỘ TIN CẬY CỦA KẾT CẤU KHUNG PHẪNG THEO ĐIỀU KIỆN ỔN ĐỊNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN

Đặng Xuân Hùng¹, Nguyễn Trọng Hà²

Tóm tắt: Bài báo nghiên cứu phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) ngẫu nhiên (Stochastic Finite Element Method - SFEM) nhằm phân tích kết cấu khi các thông số đầu vào là các đại lượng không chắc chắn. Phương pháp này được xây dựng trên cơ sở kết hợp phương pháp PTHH và mô phỏng Monte Carlo. Phương pháp PTHH ngẫu nhiên sau đó được ứng dụng để phân tích độ tin cậy của kết cấu khung phẳng theo điều kiện ổn định.

Từ khóa: PTHH; PTHHNN; mô phỏng Monte Carlo; ổn định khung phẳng.

Summary: This paper presents the stochastic finite element method (SFEM) which is used to analyze the structures with uncertainly parameters. This method is a combination of the finite element method (FEM) and Monte Carlo simulation. SFEM is then applied in the reliability analysis of a plan frame in the buckling condition.

Keywords: SFEM; Monte Carlo; plan frame; buckling condition.

Nhận ngày 01/01/2016, chỉnh sửa ngày 15/01/2016, chấp nhận đăng 15/3/2016



1. Mở đầu

Trong quá trình thi công và sử dụng, một số tham số như tính chất của vật liệu, kích thước hình học, tải trọng... thường có chứa các yếu tố ngẫu nhiên và ảnh hưởng của chúng đến sự làm việc của kết cấu cần được đánh giá. Do đó, việc đánh giá độ tin cậy của kết cấu, trong đó có việc đánh giá độ tin cậy theo điều kiện ổn định của kết cấu, khi làm việc thực tế so với thiết kế là rất quan trọng và cần thiết.

Phương pháp PTHH ngẫu nhiên (Stochastic Finite Element Method - SFEM) là sự mở rộng của phương pháp PTHH tĩnh cho các bài toán ngẫu nhiên và đã trở thành một phương pháp hiệu quả để giải quyết các bài toán này. Đặc điểm chung của SFEM là kết hợp giữa phương pháp PTHH và mô phỏng Monte Carlo để đánh giá độ tin cậy của kết cấu. Cùng với sự phát triển của công nghệ thông tin, SFEM được phát triển mạnh trong những năm gần đây. Phương pháp này cho đến nay đã được áp dụng thành công trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Stefanou trong [23] đã tổng kết sự phát triển của phương pháp PTHH ngẫu nhiên qua các thời kỳ. Năm 2001, khai triển Taylor kết hợp với lý thuyết trường ngẫu nhiên được Graham và cộng sự sử dụng để xây dựng chương trình PTHH ngẫu nhiên, áp dụng trong bài toán uốn và ổn định của tấm [8]. Trong đó sự thay đổi tính chất của vật liệu được các tác giả mô phỏng bởi mô hình trường ngẫu nhiên. Phương pháp này cũng được sử dụng trong các nghiên cứu [5, 7, 13, 17, 21] để phân tích sự làm việc của các kết cấu dầm và tấm. Trong các nghiên cứu này, trường chuyển vị hoặc ma trận độ cứng được phân tích theo chuỗi Taylor, phụ thuộc vào các biến ngẫu nhiên và thường dừng lại ở đạo hàm bậc nhất. Kết hợp mô hình này với mô phỏng Monte Carlo các tác giả phân tích được phản ứng ngẫu nhiên của kết cấu. Cùng chung ý tưởng đó nhưng trong [12] nhóm tác giả không sử dụng khai triển Taylor mà dùng phân tích wavelet để khai triển trường chuyển vị theo các biến ngẫu nhiên.

Phương pháp phổ (Spectral Method) cũng là một công cụ phổ biến để mô phỏng trường ngẫu nhiên trong xây dựng thuật toán PTHH ngẫu nhiên. Các tác giả Argyris [1] và Stefanou [22] sử dụng phương pháp

¹TS, Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp. Trường Đại học Xây dựng. Email: hungdx@nuce.edu.vn.

²ThS, Trường Đại học Vinh.

này trong bài toán phân tích kết cấu vỏ trụ chịu uốn. Tính chất của vật liệu được mô phỏng như là các trường ngẫu nhiên chuẩn, dừng (stationary Gaussian random filed). Trong khi đó Papadopoulos và các cộng sự lại dùng phương pháp này để nghiên cứu sự làm việc của dầm chữ I [19]. Với ưu điểm là thời gian tính toán nhanh, phương pháp này cũng được sử dụng rộng rãi trong phân tích các loại kết cấu khác [6, 24].

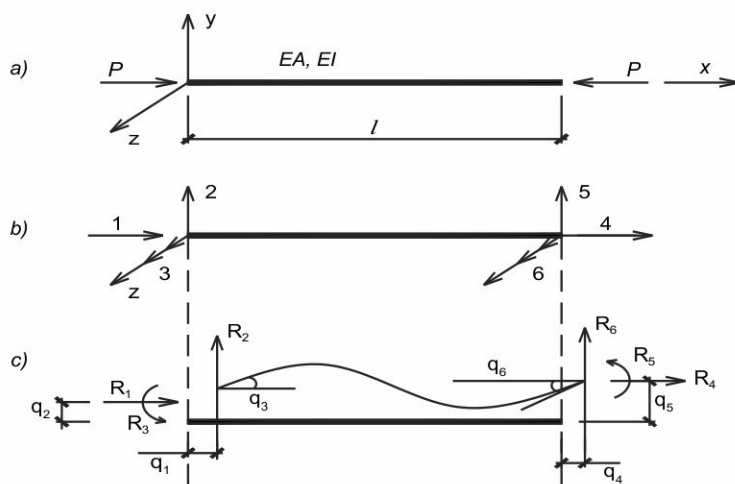
Hai phương pháp trên tuy tương đối rõ ràng và dễ hiểu về mặt xây dựng thuật toán nhưng lại phải can thiệp trực tiếp vào code chương trình PTHH (intrusive SFEM). Đây là nhược điểm lớn nhất của các phương pháp này và điều này gây khó khăn khi sử dụng phần mềm thương mại. Một hướng nghiên cứu mới gần đây được phát triển dựa trên ý tưởng xây dựng một mô hình gần đúng (Meta-Model) mà không cần can thiệp vào code chương trình PTHH (non-intrusive SFEM). Silva và cộng sự trong [26] xây dựng mô hình gần đúng bằng chuỗi đa thức (chaos polynomial) để phân tích tấm chịu uốn trên nền đàn hồi Winkler. Sasikumar trong [20] lại dùng xấp xỉ tuyến tính OLE (optimal linear expansion) để mô phỏng trường ngẫu nhiên không chuẩn (non-Gaussian random field). Phương pháp này cũng được sử dụng để mô phỏng các loại kết cấu khác trong [2, 4, 10, 15, 25].

Trong nghiên cứu này, nhóm tác giả xây dựng chương trình PTHH phân tích ổn định của kết cấu khung phẳng với mô đun đàn hồi của vật liệu được xem là đại lượng ngẫu nhiên. Chương trình PTHH ngẫu nhiên được xây dựng trên cơ sở kết hợp giữa chương trình PTHH tĩnh và mô phỏng Monte Carlo. Từ đó, đánh giá ảnh hưởng của các tham số đến độ tin cậy theo điều kiện ổn định của một kết cấu khung phẳng.



2. Phân tích ổn định khung phẳng bằng phương pháp phần tử hữu hạn

2.1 Ma trận độ cứng của phần tử thanh thẳng trong hệ tọa độ địa phương



Hình 1. Phần tử khung phẳng chịu lực dọc trục [14]

Phần tử thanh thẳng chịu nén và uốn trong hệ tọa độ địa phương được thể hiện trên Hình 1.a. Các độ cứng khi uốn và khi nén lần lượt là EI và EA không đổi, chiều dài là L, chịu lực nén P với quy ước chiều dương và thứ tự của tọa độ nút như trên Hình 1.b, chiều dương của nội lực nút và chuyển vị nút tương ứng như trên Hình 1.c.

Ma trận độ cứng $[K^e]$ của phần tử khung phẳng trong hệ tọa độ địa phương theo [14] được biểu diễn như sau:

$$[K^e] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A/I & 0 & 0 & -A/I & 0 & 0 \\ 0 & 12\phi_1/L^2 & \phi_2 & 0 & -12\phi_1/L^2 & -6\phi_2/L \\ 0 & 6\phi_2/L & 4\phi_3 & 0 & -6\phi_2/L & 2\phi_4 \\ -A/I & 0 & 0 & A/I & 0 & 0 \\ 0 & -12\phi_1/L^2 & -6\phi_2/L & 0 & 12\phi_1/L^2 & -6\phi_2/L \\ 0 & 6\phi_2/L & 2\phi_4 & 0 & -6\phi_2/L & 4\phi_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

trong đó:

$$f_1 = \frac{v^3 \sin v}{12\phi_n}; f_2 = \frac{v^2(1 - \cos v)}{6\phi_n}; f_3 = \frac{v(\sin v - v \cos v)}{4\phi_n}; f_4 = \frac{v(v - \cos v)}{2\phi_n}$$

với $\phi_n = 2 - 2\cos v - v \sin v$; và $v = L \sqrt{\frac{P}{EI}}$

Trong trường hợp nếu lực dọc trong các phần tử là nhỏ, khai triển các hàm số ϕ_i theo chuỗi Taylor và dừng lại ở số hạng đầu tiên ta thu được:

$$\phi_1 = 1 - \frac{v^2}{10}; \quad \phi_2 = 1 - \frac{v^2}{60}; \quad \phi_3 = 1 - \frac{v^2}{30}; \quad \phi_4 = 1 + \frac{v^2}{60}.$$

Ma trận độ cứng phần tử khi đó theo [14] có thể viết dưới dạng tổng của ma trận độ cứng đàn hồi $[k_d^e]$ của phần tử khung phẳng và ma trận độ cứng hình học $[k_p^e]$ và được xác định như biểu thức sau:

$$[k^e] = [k_d^e] \mp [k_p^e] \quad (2)$$

trong đó:

$$[k_d^e] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A/I & 0 & 0 & -A/I & 0 & 0 \\ 0 & 12/L^2 & 6/L & 0 & -12/L^2 & -6/L \\ 0 & 6/L & 4 & 0 & -6/L & 2 \\ -A/I & 0 & 0 & A/I & 0 & 0 \\ 0 & -12/L^2 & -6/L & 0 & 12/L^2 & -6/L \\ 0 & 6/L & 2 & 0 & -6/L & 4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Và

$$[k_p^e] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5 & L/10 & 0 & -6/5 & -L/10 \\ 0 & L/10 & 2L^2/15 & 0 & -L/10 & -2L^2/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/5 & -L/10 & 0 & 6/5 & -L/10 \\ 0 & L/10 & -L^2/30 & 0 & -L/10 & 2L^2/15 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Trong biểu thức (2), dấu âm được lấy khi phần tử thanh chịu nén và ngược lại.

2.2 Ma trận độ cứng của phần tử thanh thẳng trong hệ tọa độ tổng thể

Các ma trận độ cứng của phần tử thanh thẳng xác định theo biểu thức (1) hay tương ứng với các chuyển vị nút trong hệ tọa độ địa phương của mỗi phần tử. Khi xét toàn bộ kết cấu ta cần chuyển các đại lượng này từ hệ tọa độ địa phương về một hệ tọa độ tổng thể. Ma trận chuyển hệ trục tọa độ có dạng [16]:

$$[T^e] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Khi đó véc tơ chuyển vị nút của phần tử trong hệ tọa độ tổng thể được xác định theo (6) như sau:

$$[U^e] = [T^e][u^e] \quad (6)$$

Ma trận độ cứng của phần tử trong hệ tọa độ tổng thể được xác định theo biểu thức (7):

$$[K^e] = [T^e]^T \{ [k_d^e] \mp [k_p^e] \} [T^e] \quad (7)$$

Ma trận vị trí $[P^e]$ có vai trò xác định vị trí véc tơ chuyển vị nút của mỗi phần tử $[U^e]$ trong véc tơ chuyển vị nút tổng thể của kết cấu $[U]$ theo biểu thức (8):

$$[U^e] = [P^e][U] \quad (8)$$

Khi đó ma trận độ cứng của mỗi phần tử trong ma trận độ cứng tổng thể được xác định theo biểu thức (9):

$$[K] = [P^e]^T \{ [K_d^e] \mp [K_p^e] \} [P^e] \quad (9)$$

Ma trận độ cứng tổng thể của toàn bộ kết cấu được xác định theo biểu thức (10):

$$[K] = \sum_{e=1}^n [P^e]^T \{ [K_d^e] \mp [K_p^e] \} [P^e] \quad (10)$$

trong đó n là số phần tử của khung.

2.3 Phương trình ổn định

Đối với kết cấu hệ thanh chịu nén và uốn, hiện tượng mất ổn định thường xảy ra đối với các cấu kiện nén lệch tâm hay chịu uốn và nén đồng thời. Phương trình cân bằng tương ứng của toàn kết cấu có dạng:

$$[R] = [K][q] = \{ [K_d] \mp [K_p] \} [q] \quad (11)$$

Đặc trưng của sự mất ổn định này là:

- Dạng cân bằng không phân nhánh và biến dạng
- Dạng cân bằng của hệ không thay đổi về tính chất.

Từ (11), theo tiêu chuẩn ổn định năng lượng Lejeune - Dirichle [14], ta nhận thấy nếu $[K]$ xác định dương thì kết cấu ổn định, nếu $[K]$ xác định âm thì kết cấu bị mất ổn định. Do đó tải trọng tới hạn được xác định từ phương trình

$$\det[K] = \det[[K_d] \mp [K_p]] = 0 \quad (12)$$

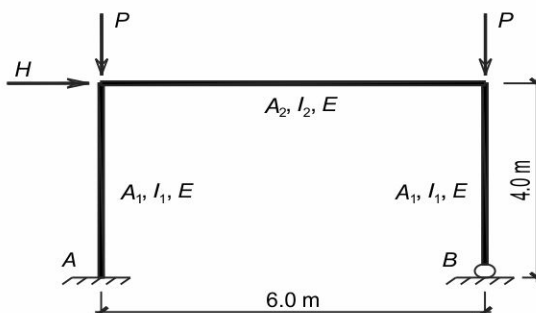
2.4 Các bước phân tích ổn định khung phẳng

Hình 2 thể hiện sơ đồ các bước phân tích ổn định của khung phẳng bằng phương pháp PTHH. Chương trình tính được lập trình trên ngôn ngữ Matlab cho hai trường hợp: 1. Khi giữ nguyên ma trận độ cứng của phần tử theo biểu thức (1); 2. Khi dùng ma trận độ cứng phần tử gần đúng tính theo biểu thức (2). Chương trình này sẽ được kiểm chứng so với kết quả đã công bố trong [3] ở mục tiếp theo.

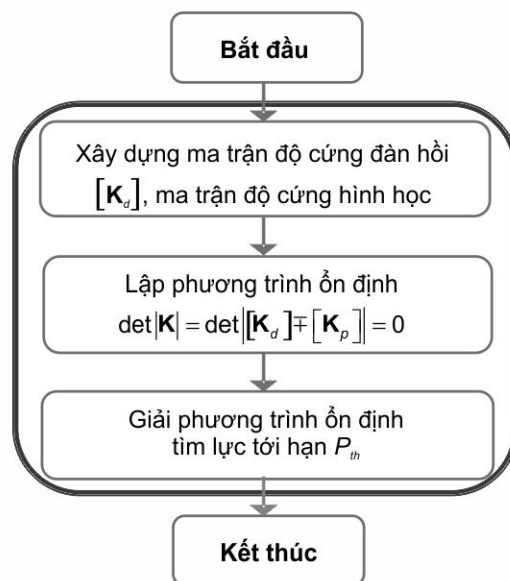
2.5 Kiểm chứng chương trình phân tích ổn định khung phẳng theo phương pháp PTHH

Để kiểm chứng chương trình tính, nhóm tác giả sử dụng lại ví dụ phân tích ổn định kết cấu khung phẳng trong [3]. Sơ đồ kết cấu và các thông số hình học được thể hiện trên Hình 3. Các thông số về vật liệu, tiết diện và tải trọng được thống kê trong Bảng 1. Xét ba trường hợp:

- [14]-orig: ma trận độ cứng phần tử tính theo công thức gốc (1);
- [14]-appro: ma trận độ cứng phần tử tính theo công thức gần đúng (2);
- [3]-Calfem: kết quả công bố trong [3] với ma trận độ cứng phần tử tính theo (1)



Hình 3. Sơ đồ kết cấu khung phẳng [3]



Hình 2. Các bước phân tích ổn định của khung phẳng bằng phương pháp PTHH

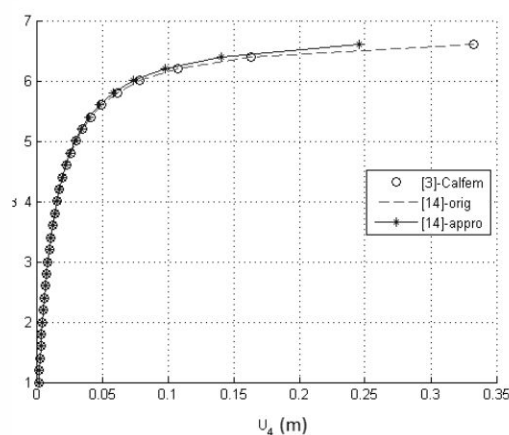
Bảng 1. Bảng số liệu đầu vào cho bài toán phân tích ổn định khung phẳng [3]

TT	Tham số	Ký hiệu	Giá trị
1	Mô đun đàn hồi	E	200 GPa
2	Diện tích tiết diện cột	A_1	$2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
3	Mômen quán tính cột	I_1	$1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$
4	Diện tích tiết diện dầm	A_2	$6,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
5	Mômen quán tính dầm	I_2	$5,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$
6	Lực ngang	H	1,0 kN
7	Lực thẳng đứng	P	150,0 kN

Trong chương trình tính giá trị ban đầu của lực nén P lấy bằng $P_0 = 150 \text{ kN}$. Hệ số α là tỷ số giữa P và P_0 , $\left(\alpha = \frac{P}{P_0}\right)$. Khi α tăng dần từ 1 đến α_{th} thì giá trị của P cũng tăng từ P_0 đến P_{th} . Hình 4 thể hiện kết quả so sánh chuyển vị theo phương ngang của góc trên bên trái theo sự tăng dần của hệ số α cho đến khi đạt trạng thái tới hạn. Cũng trên Hình 4, giá trị của $\alpha_{th} = 6,7$ nên ta có giá trị của lực tới hạn trong ví dụ kiểm chứng:

$$P_{th} = \alpha_{th} \cdot P_0 = 6,7 \cdot 150 = 1005 \text{ kN}$$

Khi lực tác dụng còn nhỏ thì kết quả chương trình đã xây dựng trong hai trường hợp trùng khớp với kết quả trong [3]. Tuy nhiên, khi lực tác dụng tăng lên thì giá trị của chuyển vị tăng một cách phi tuyến. Kết quả tính toán theo Calfem ([3]-Calfem) và kết quả tính toán theo (1) ([14]-orig) vẫn trùng khớp, nhưng kết quả tính toán theo (2) ([14]-appro) thì bắt đầu có sự sai lệch. Điều này phù hợp với nhận xét trong [14] rằng ma trận độ cứng phần tử gần đúng theo (2) chỉ đúng trong trường hợp lực dọc trong phần tử là nhỏ. Kết quả này cho phép các tác giả quyết định sử dụng chương trình xây dựng với ma trận độ cứng phần tử tính theo (1) trong các phần tiếp theo của nghiên cứu này.

**Hình 4.** Mối quan hệ giữa hệ số α và chuyển vị đỉnh trong bài toán kiểm chứng chương trình tính

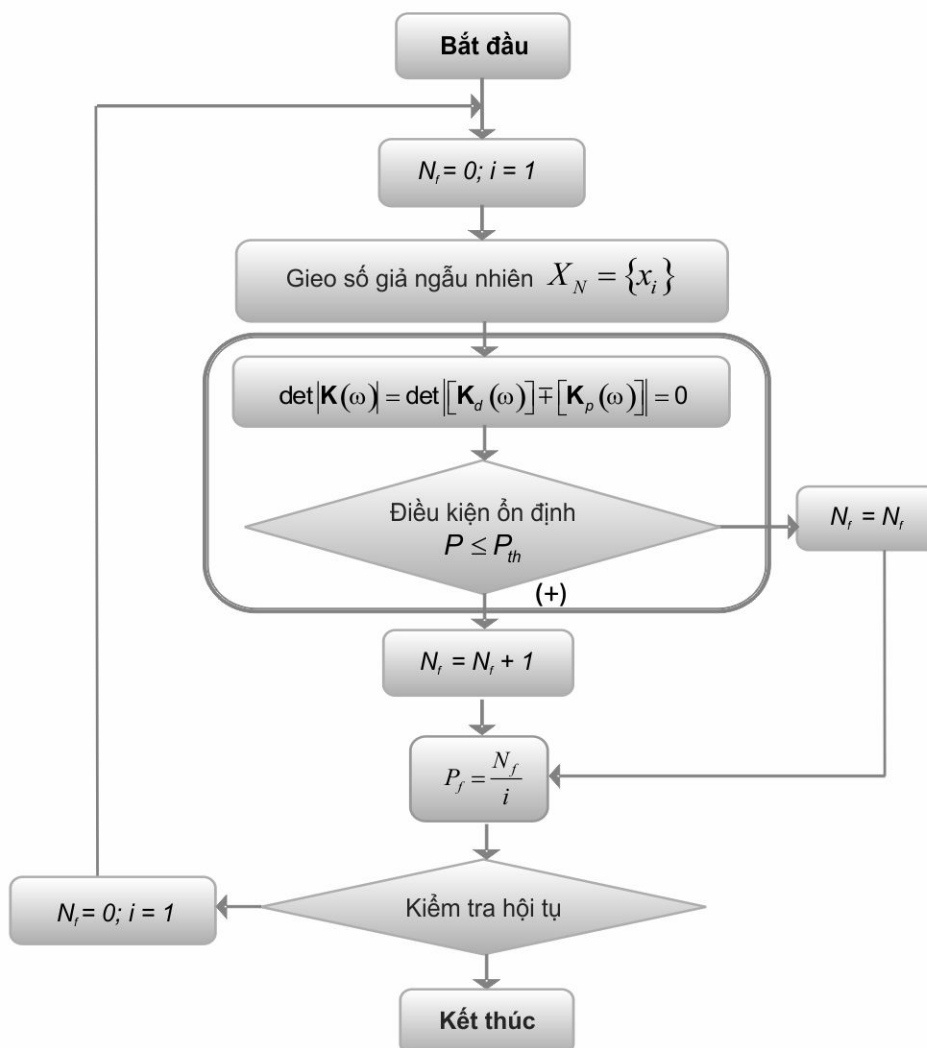
3. Đánh giá độ tin cậy của kết cấu khung phẳng theo điều kiện ổn định bằng phương pháp phân tử hữu hạn ngẫu nhiên

3.1 Phương pháp phân tử hữu hạn ngẫu nhiên và Monte Carlo

Phương pháp PTHH ngẫu nhiên được xây dựng trên cơ sở kết hợp phương pháp PTHH tất định và phương pháp mô phỏng Monte Carlo. Mô hình tất định của bài toán phân tích ổn định khung phẳng theo sẽ được mở rộng cho bài toán ngẫu nhiên. Khi đó mô hình ngẫu nhiên của bài toán được xác định theo (12).

$$\det[\mathbf{K}(\omega)] = \det[\mathbf{K}_s(\omega)] \mp [\mathbf{K}_p(\omega)] = 0 \quad (12)$$

Trong đó ω đặc trưng cho tính ngẫu nhiên. Từ mô hình ngẫu nhiên (12), thực hiện mô phỏng Monte Carlo ta sẽ ước lượng được xác suất mất ổn định của kết cấu. Sơ đồ các bước mô phỏng Monte Carlo thể hiện trên Hình 5.



Hình 5. Các bước mô phỏng Monte Carlo để ước lượng độ tin cậy khung phẳng theo điều kiện ổn định

3.2 Kết quả số

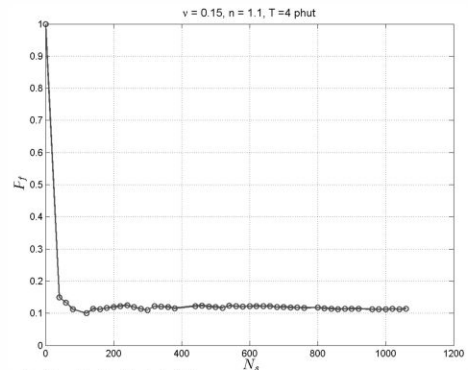
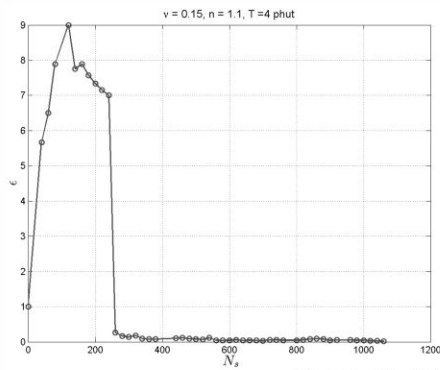
a) Sự hội tụ của Mô phỏng Monte Carlo

Xét lại ví dụ ở trên với sơ đồ kết cấu như thể hiện trên Hình 4 và các thông số cấu tạo hình học và vật liệu thống kê trong Bảng 1. Giá trị của lực tới hạn trong phân tích tiền định như đã nêu ở trên là $P_{th} = 1005kN$. Giả thiết hệ số an toàn $n = 1,1$ thì giá trị tải trọng cho phép là $[P] = P_{th}/n = 913,63kN$.

Trong ví dụ này, mô đun đàn hồi E của vật liệu được coi như một biến ngẫu nhiên có luật phân bố chuẩn, giá trị kỳ vọng bằng 200 GPa và có hệ số biến động $v = 0,15$ (hệ số biến động là tỷ số giữa độ lệch chuẩn và kỳ vọng $v = \sigma/\mu$). Các thông số về kích thước hình học, tiết diện là các đại lượng tất định. Tải trọng tác dụng lên kết cấu được lấy bằng giá trị của tải trọng cho phép.

Hình 6 thể hiện sự hội tụ của giá trị xác suất mất ổn định (phải) và của sai số giữa các vòng lặp sau 1060 vòng lặp Monte Carlo với tiêu chuẩn hội tụ là 2.5%. Giá trị của xác suất mất ổn định hội tụ tại giá trị 0.1142 tương ứng với giá trị độ tin cậy của kết cấu là 0.8858 (88.58%). Thời gian cho một mô phỏng là 4,0 phút. Tiêu chuẩn hội tụ 2.5% chứng minh sự tin cậy của giá trị xác suất mất ổn định ước lượng được.

Kết quả này cho thấy mặc dù trong thiết kế đã tính đến hệ số an toàn $n = 1,1$ nhưng do tính chất của vật liệu thay đổi ngẫu nhiên nên độ tin cậy cũng chỉ đạt 88.58%. Vì vậy việc đánh giá ước lượng độ tin cậy của kết cấu là rất cần thiết.

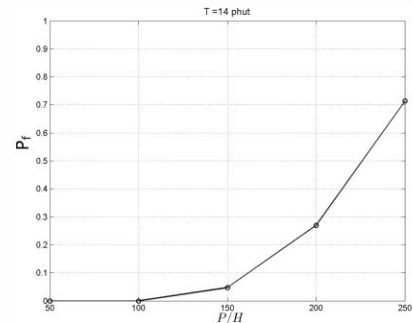


Hình 6. Sự hội tụ của giá trị xác suất mất ổn định P_f (phải) và của sai số ε (trái) trong mô phỏng Monte Carlo

b) Ảnh hưởng của tỷ số P/H

Khi phân tích ổn định của kết cấu, tỷ lệ giữa các thành phần tải trọng có ảnh hưởng không nhỏ đến giá trị của lực tới hạn. Trong mục này, bài báo sẽ khảo sát sự ảnh hưởng của tỷ lệ giữa tải trọng đứng và tải trọng ngang đến độ tin cậy của kết cấu. Các thông số về kích thước hình học, tiết diện là các đại lượng tất định; mô đun đàn hồi E của vật liệu được coi như biến ngẫu nhiên chuẩn có kỳ vọng bằng 200 Gpa và hệ số biến động $\nu = 0,2$; hệ số an toàn $n = 1,5$. Tỷ lệ P/H lần lượt bằng 50, 100, 150, 200, 250.

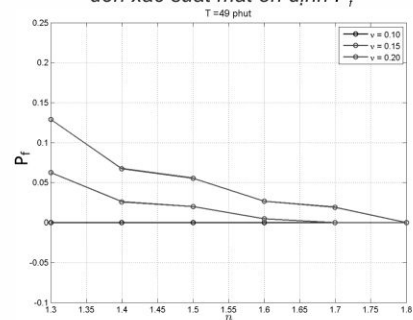
Hình 7 thể hiện sự ảnh hưởng của tỷ số P/H đến xác suất mất ổn định của kết cấu theo điều kiện ổn định. Hình 7 chỉ ra rằng khi tỷ số P/H tăng thì giá trị của xác suất mất ổn định P_f cũng tăng lên (0%, 0%, 4,76%, 27,0%, 71,35%), quan hệ giữa chúng là quan hệ phi tuyến. Tốc độ tăng của P_f càng nhanh khi tỷ lệ P/H càng lớn.



Hình 7. Ảnh hưởng của tỷ số lực tác dụng PIH đến xác suất mất ổn định P_f

c) Ảnh hưởng của số an toàn của lực tới hạn

Trong mục này bài báo khảo sát sự ảnh hưởng của hệ số an toàn n đến giá trị của xác suất mất ổn định P_f . Xét lại ví dụ bên trên với các giá trị của hệ số an toàn n lần lượt là 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8. Tiến hành khảo sát sự thay đổi của P_f khi hệ số an toàn thay đổi với ba giá trị của hệ số biến động ν khác nhau 0,1; 0,15; 0,2.



Hình 8. Ảnh hưởng của hệ số an toàn n đến xác suất mất ổn định P_f

Hình 8 thể hiện kết quả khảo sát sự ảnh hưởng của hệ số an toàn đến xác suất mất ổn định. Chúng ta dễ dàng quan sát thấy giá trị của P_f tăng lên khi ν tăng. Ngược lại khi n tăng thì P_f lại giảm. Kết quả này hoàn toàn phù hợp với các phân tích định tính khi xem xét ảnh hưởng của hệ số biến động và hệ số an toàn đến xác suất mất ổn định của kết cấu. Mặt khác Hình 8 cũng chỉ ra rằng đối với mỗi mức độ biến động khác nhau của biến ngẫu nhiên đầu vào thì có thể chọn hệ số an toàn khác nhau mà vẫn đảm bảo sự làm việc an toàn của kết cấu. Ví dụ trong trường hợp này nếu hệ số biến động là 0,1; 0,15; 0,2 thì cần chọn hệ số an toàn lần lượt là 1,3; 1,7 và 1,8.



4. Kết luận

Nghiên cứu này đã tìm hiểu và xây dựng được chương trình PTHH ngẫu nhiên nhằm đánh giá độ tin cậy của kết cấu khung phẳng theo điều kiện ổn định trên cơ sở kết hợp giữa phương pháp PTHH tất định và mô phỏng Monte Carlo. Các kết quả phân tích đã được so sánh kiểm chứng với các kết quả đã công bố trong các tài liệu tin cậy. Sự ảnh hưởng của các thông số được khảo sát, so sánh với các phân tích định tính và cho kết quả phù hợp. Tuy nhiên, đây mới chỉ là kết quả bước đầu khi nghiên cứu chỉ kể đến yếu tố ngẫu nhiên của mô đun đàn hồi E . Nghiên cứu sẽ được phát triển mở rộng để xét đến các yếu tố ngẫu nhiên khác như hệ số Poisson, tải trọng...

Tài liệu tham khảo

1. Argyris, J.; M., Papadrakakis & G., Stefanou (2002), "Stochastic finite element analysis of shells", *Comput*, *Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191, 4781-4804.
2. Acharjee, S. & N., Zabarar (2006), "Uncertainty propagation in finite deformations - a spectral stochastic Lagrangian approach", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195, 2289-2312.
3. Austrell, P., E. & al. (2004), "CALFEM - A finite element toolbox Version 3.4", Lund University, Sweden.
4. Berveiller, M. (2005), *Éléments finis stochastiques : approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité*, Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont Ferrand, France.
5. Chang, T. P.; M. F., Liu & H. C., Chang (2008), "Finite element analysis of nonlinear shell structures with uncertain material property", *Thin-Walled Structures*, 46, 1055-1065.
6. Dang, X. H. (2012), *Identification de la variabilité spatiale des champs de contraintes dans les agrégats polycristallins et application à l'approche locale de la rupture*, Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont Ferrand, France.
7. Falsone, G., & N., Impollonia (2002), "A new approach for the stochastic analysis of finite element modelled structures with uncertain parameters", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191, 5067-5085.
8. Graham, L. L. & G., Deodatis (2001), "Response and eigenvalue analysis of stochastic finite element systems with multiple correlated material and geometric properties", *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16, 11-29.
9. Ghanem, R. (1998), "Hybrid stochastic finite elements and generalized Monte Carlo simulation", *J. Appl. Mech. (ASME)*, 65, 1004-1009.
10. Ghanem, R. (1999), "Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 168, 19-34.
11. Ghanem, R & P. D., Spanos (2003), *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer-Verlag, Berlin (1991), second ed., Dover Publications, NY.
12. Han, J. G.; W. X., Ren & Y., Huang (2007), "A wavelet-based stochastic finite element method of thin plate bending", *Applied Mathematical Modelling*, 31, 181-193.
13. Kamiński, M. (2009), "Perturbation-based stochastic finite element method using polynomial response function for the elastic beam", *Mechanics Research Communications*, 36, 381-390.
14. Leu, T. T. (2007), *Ổn định công trình*, Nhà xuất bản khoa học kỹ thuật, Hà Nội.
15. Lemaire, M. (2005), *Fiabilité des structures: couplage mecano-fiabiliste statique*, Hermes.
16. Moaveni, S. (2008), *Finite element analysis: theory and application with ANSYS*, Pearson Education.
17. Noh, H. C. (2005), "Stochastic behavior of Mindlin plate with uncertain geometric and material parameters", *Probabilistic Engineering Mechanics*, 20, 296-306.
18. Papadrakakis, M.; V., Papadopoulos (1996), "Robust and efficient methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo simulation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 134, 325-340.
19. Papadopoulos, V., Soimiris, G., & Papadrakakis, M. (2013), *Buckling analysis of I-section portal frame with stochastic imperfections*, *Engineering Structures*, 47, 54-66.
20. Sasikumar, P., Suresh, R., & Gupta, S. (2014), *Analysis of CFRP laminated plates with spatially varying non-Gaussian inhomogeneities using SFEM*, *Composite Structures*, 112, 308-326.
21. Singh, A. V., & Y., Zheng (2003), "On finite element analysis of beam with material properties", *Probabilistic Engineering Mechanics*, 18, 273-278.
22. Stefanou, G., & Papadrakakis, M. (2004), *Stochastic finite element analysis of shells with combined random material and geometric properties*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193, 139-160.
23. Stefanou, S. (2009), "The stochastic finite element method: Past, present and future", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198, 1031-1051.
24. Sudret, B., Dang, X. H., Berveiller, M., Zeghadi, A., & Yalamas, T. (2015), *Characterization of random stress fields obtained from polycrystalline aggregate calculations using multi-scale stochastic finite elements*, *Frontier of Structural and Civil Engineering*, 9(2), 121-140.
25. Sudret, B. (2007), *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models - Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*, HDR, Blaise Pascal university, Clermont Ferrand, France.
26. Silva, C. R., & Beck, A. T. (2010), *Bending of stochastic Kirchhoff plate on Winkler foundations via the Galerkin method and the Askey-Wiener scheme*, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 25, 172-182.