



PHÂN TÍCH TĨNH VÀ DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA DẦM LÀM BẰNG VẬT LIỆU CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN (FGM) THEO CÁC LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT KHÁC NHAU

Vũ Văn Thắm¹, Trần Minh Tú²

Tóm tắt: Bài báo xây dựng lời giải giải tích để phân tích tĩnh và dao động riêng của dầm làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Materials-FGM) theo các mô hình dầm Euler-Benoulli, Timoshenko và một số lý thuyết dầm bậc cao khác. Các phương trình cân bằng cũng như điều kiện biên của các mô hình dầm thu được dựa trên nguyên lý công khả dĩ. Bài báo đưa ra phân tích giới hạn áp dụng của các mô hình dầm và khảo sát ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu FGM, tham số kích thước dầm đến trường chuyển vị, ứng suất và tần số dao động riêng của dầm.

Từ khóa: Dầm; vật liệu có cơ tính biến thiên; lý thuyết biến dạng cắt; phân tích tĩnh; dao động riêng.

Summary: In this paper, the analytical solution for static and free vibration analysis of functionally graded (FG) beam is developed by the Euler-Bernoulli's beam theory, Timoshenko's beam theory and some higher-order beam theories. Basing on the principle of virtual work, the equations of motion of FG beam with simply supported boundary conditions are derived. In this study, the effects of some dimensional parameters on the displacement, stress fields and natural frequency of FG beam are investigated. In addition, the range of application for different beam theories is examined.

Keywords: Functionally graded beam; shear deformation beam theory; static analysis; free vibration.

Nhận ngày 22/01/2016, chỉnh sửa ngày 05/02/2016, chấp nhận đăng 15/3/2016



1. Phần mở đầu

Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) là hỗn hợp của hai vật liệu thành phần với tỷ lệ pha trộn nhất định để đạt được một chức năng mong muốn tùy theo mục đích sử dụng. Các tính chất của vật liệu có cơ tính biến thiên biến đổi từ từ bề mặt này sang bề mặt khác nên tránh được sự tập trung ứng suất thường gặp ở các kết cấu làm bằng vật liệu composite lớp. Kết cấu bằng vật liệu FGM được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực: cơ khí, hàng không, công nghiệp hạt nhân, ô tô,...

Nhiều mô hình tính toán khác nhau được sử dụng khi phân tích tĩnh và động kết cấu dầm FGM. Lý thuyết dầm cổ điển dựa trên giả thiết Bernoulli, bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang và chỉ cho kết quả tính toán phù hợp với dầm dài. Lý thuyết dầm Timoshenko ra đời dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất với giả thiết mặt cắt ngang sau biến dạng vẫn phẳng nhưng có thể không còn vuông góc với trục thanh. Theo lý thuyết dầm Timoshenko hàm chuyển vị được giả thiết:

$$u(x,z,t) = u_0 - z\phi_x; \quad w(x,z,t) = w_0(x,t) \quad (1)$$

trong đó: u_0 , w_0 là thành phần chuyển vị của điểm bất kỳ có tọa độ (x_0) thuộc trục dầm theo các phương x , z và ϕ_x là góc xoay của mặt cắt ngang quanh trục y .

Theo mô hình dầm Timoshenko, biến dạng cắt ngang được giả thiết là hằng số theo chiều cao mặt cắt ngang điều này là không phù hợp với thực tế, do vậy cần sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt. Việc xác định hệ số hiệu chỉnh cắt là không đơn giản. Để khắc phục nhược điểm này các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao ra đời. Các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đã tính toán đến độ cong vênh của mặt cắt ngang dầm khi tải trọng

¹ThS, Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp. Trường Đại học Xây dựng. E-mail: vuthamxd@gmail.com.

²PGS.TS, Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp. Trường Đại học Xây dựng.

tác dụng. Một số mô hình bậc cao được đề xuất với các giả thiết khác nhau về dạng hàm của trường chuyển vị: Reddy (1984) với lý thuyết biến dạng cắt với hàm chuyển vị bậc hai (parabol) [6], Touratier (1991) với hàm chuyển vị dạng lượng giác [7], Soldatos (1992) với hàm chuyển vị dạng hyperbolic [9] và Karama (2003) với hàm chuyển vị dạng hàm mũ [4].

Để thuận tiện khi phân tích tĩnh và động dầm làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên theo các lý thuyết dầm khác nhau, bài báo này tập trung phân tích giới hạn áp dụng của các mô hình dầm và khảo sát ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu FGM, tham số kích thước dầm đến trường chuyển vị, ứng suất và tần số dao động riêng của dầm.



2. Cơ sở lý thuyết và mô hình tính

2.1 Vật liệu có cơ tính biến thiên

Đối với vật liệu có cơ tính biến thiên, hai thành phần tạo thành là kim loại và ceramic (Hình 1), tỷ lệ thể tích của các thành phần vật liệu được giả thiết biến đổi theo quy luật xác định. Quy luật phân bố của hàm tỷ lệ thể tích là cơ sở để phân loại vật liệu FGM. Phần lớn các nhà nghiên cứu sử dụng hàm lũy thừa, hàm e - mũ hoặc hàm Sigmoid để mô tả biến thiên của hàm tỷ lệ thể tích. Trong bài báo này giả thiết hàm tỷ lệ thể tích dưới dạng lũy thừa và hệ số Poisson ν là hằng số.

Mô đun đàn hồi E và khối lượng riêng ρ của vật liệu FGM biến thiên theo quy luật hàm lũy thừa và có dạng sau (Reddy, 2000 [7]):

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p; \\ \rho(z) &= \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 Mô hình tính

a) Trường chuyển vị và biến dạng

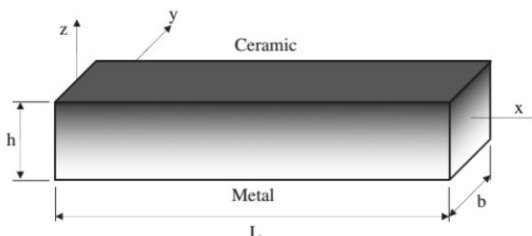
Trường chuyển vị của điểm bất kỳ thuộc dầm được giả thiết dưới dạng tổng quát:

$$u(x, z, t) = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \phi(x, t); \quad v(x, z, t) = 0; \quad w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (3)$$

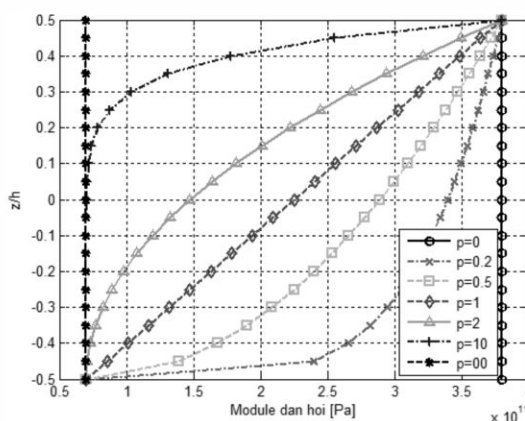
trong đó: u, v, w là chuyển vị của điểm bất kỳ thuộc dầm theo các phương trục x, y, z và t là thời gian; $\phi(x, t)$ là góc xoay của mặt cắt ngang quanh trục y ; $f(z)$ là hàm số đặc trưng cho quy luật phân bố của ứng suất cắt ngang theo chiều cao của dầm. Như vậy, với các giá trị hàm $f(z)$ khác nhau, các mô hình dầm cụ thể sau đây lần lượt được xác định (Bảng 1):

Bảng 1. Các mô hình dầm

Mô hình	$f(z)$	Mô hình	$f(z)$
Reddy [6] (Mô hình 1)	$z \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]$	Karama [4] (Mô hình 4)	$f(z) = z \exp \left[-2 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]$
Touratier [7] (Mô hình 2)	$\frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h}$	Akavci [2] (Mô hình 5)	$f(z) = \frac{3\pi}{2} \left[h \tanh \left(\frac{z}{h} \right) - z \sec^2 h \left(\frac{1}{2} \right) \right]$
Soldatos [9] (Mô hình 3)	$\left[z \cosh \left(\frac{1}{2} \right) - h \sinh \left(\frac{z}{h} \right) \right]$	Euler-Bernoulli	$f(z) = 0$
		Timoshenko	$f(z) = z; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$



Hình 1. Mô hình kết cấu dầm làm từ vật liệu FGM



Hình 2. Biến thiên của mô đun đàn hồi kéo (nén) theo chiều cao dầm FGM

Biến dạng dài và biến dạng góc được xác định từ quan hệ biến dạng - chuyển vị

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = f'(z) \phi(x, t) \quad (4)$$

b) Trường ứng suất

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của dầm FGM:

$$\sigma_x = E(z) \varepsilon_x = E(z) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \right] \quad (5)$$

$$\tau_{zx} = G(z) \gamma_{zx} = \frac{E(z)}{2[1+\nu]} f'(z) \phi(x, t) = \frac{E(z)}{2[1+\nu]} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \phi(x, t) \quad (6)$$

trong đó: $E(z)$ là mô đun đàn hồi theo chiều cao của dầm, ν là hệ số Poisson ($\nu = \text{const}$).

c) Phương trình cân bằng và điều kiện biên

Sử dụng các biểu thức biến dạng, ứng suất (4) đến (6) và nguyên lý công khả dĩ phiên bản động có kể đến lực quán tính, ta được các phương trình cân bằng.

Nguyên lý công khả dĩ áp dụng cho dầm có dạng [1]:

$$b \int_{x=0}^{x=L} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dz dx + b \rho \int_{x=0}^{x=L} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dz dx - b \int_{x=0}^{x=L} q \delta w dx = 0 \quad (7)$$

trong đó: δ biểu thị biến phân, q là tải trọng phân bố đường trên trục dầm.

Thay các biểu thức từ (4) đến (6) vào (7) ta được:

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^{x=L} E(z) dz \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right] dx + \\ & + \int_{x=0}^{x=L} G(z) dz \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[\frac{\partial f(z)}{\partial z} \phi \frac{\partial f(z)}{\partial z} \delta \phi \right] dx - \int_{x=0}^{x=L} q_0 / b \delta w dx + \\ & + \int_{x=0}^{x=L} \rho(z) dz \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + f(z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] \left[\delta u_0 - z \frac{\partial \delta w}{\partial x} + f(z) \delta \phi \right] dx + \\ & + \int_{x=0}^{x=L} \rho(z) dz \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Sau khi biến đổi, lấy tích phân từng phần và nhóm các hệ số của các biến phân δu_0 , δw_0 và $\delta \phi$ của phương trình (8) ta được hệ 3 phương trình cân bằng:

$$\begin{aligned} -A \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - C \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 0 \\ -B \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + D \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - F \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + I_2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - I_4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + I_5 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} &= q \\ -C \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + F \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - G_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + H_1 \phi + I_3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_5 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + I_6 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Trong đó các hệ số $A, B, C, D, F, G_1, H_1, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ được tính theo:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz; \quad B = \int_{-h/2}^{h/2} E(z) z dz; \quad C = \int_{-h/2}^{h/2} E(z) f(z) dz; \quad D = \int_{-h/2}^{h/2} E(z) z^2 dz; \quad F = \int_{-h/2}^{h/2} E(z) z f(z) dz \\ G_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} E(z) f^2(z) dz; \quad H_1 = \int_{-h/2}^{h/2} G(z) [f'(z)]^2 dz; \quad I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz; \quad I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z dz \\ I_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) f(z) dz; \quad I_4 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz; \quad I_5 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z f(z) dz; \quad I_6 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) [f(z)]^2 dz \end{aligned} \quad (10)$$

2.3 Lời giải Navier

Xét dầm đơn giản (liên kết gối tựa khớp hai đầu) chịu tải trọng phân bố đều $q(x) = q_0$, làm bằng vật liệu FGM tiết diện hình chữ nhật. Điều kiện biên của dầm có dạng:

$$w|_{x=0,L} = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0,L} = 0 \quad (11)$$

a) Phân tích tĩnh dầm FGM

Chọn hàm độ võng thỏa mãn điều kiện biên (11) dưới dạng:

$$u_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m \cos \frac{m\pi x}{L}; \quad w_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L}; \quad \varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \quad (12a)$$

trong đó: u_m ; w_m và ϕ_m là các hệ số trong khai triển Fourier, m là số nguyên dương.

Hàm tải trọng cũng được khai triển dưới dạng chuỗi:

$$q(z) = \sum_{m=1}^{m=\infty} q_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \quad (12b)$$

với: $q_m = \frac{4q_0}{m\pi}$ và q_0 là cường độ của tải trọng phân bố đều.

Thay (12a-b) vào (9) và bỏ qua các lực quán tính, ta nhận được hệ 3 phương trình:

$$\begin{aligned} \left(A \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) u_m - \left(B \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) w_m + \left(C \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \phi_m &= 0 \\ \left(B \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) u_m - \left(D \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \right) w_m + \left(F \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) \phi_m &= q_m \\ \left(C \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) u_m - \left(F \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) w_m + \left(G_1 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + H_1 \right) \phi_m &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Giải hệ phương trình (13) xác định được các giá trị u_m , w_m , ϕ_m

Thay các giá trị u_m , w_m , ϕ_m xác định được từ (13) ta nhận được các thành phần chuyển vị và các thành phần ứng suất viết dưới dạng:

$$\text{Chuyển vị} \quad u = \left[u_m - z \frac{m\pi}{L} w_m + f(z) \phi_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \quad (14)$$

$$\text{Độ võng} \quad w = w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (15)$$

$$\text{Ứng suất pháp} \quad \sigma_x = E \left[-u_m \frac{m\pi}{L} + z \frac{m^2 \pi^2}{L^2} w_m - f(z) \frac{m\pi}{L} \phi_m \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (16)$$

$$\text{Ứng suất tiếp} \quad \tau_{zx} = G f'(z) \phi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \quad (17)$$

b) Tần số dao động riêng của dầm FGM

Chọn trường chuyển vị thỏa mãn điều kiện biên (11) dưới dạng sau:

$$u_0 = u_m \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \omega_m t; \quad w_0 = w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \omega_m t; \quad \phi = \phi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \omega_m t \quad (18)$$

trong đó: w_m và ϕ_m là các hệ số trong khai triển Fourier, m là số nguyên dương và ω_m là tần số dao động riêng.

Thế (18) vào (9) sau khi đã loại bỏ tải trọng, nhận được hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \left[\left(A \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) u_m - \left(B \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) w_m + \left(C \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \phi_m \right] - \omega^2 \left[I_1 u_m - I_2 \frac{m\pi}{L} w_m + I_3 \phi_m \right] &= 0 \\ \left[- \left(B \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) u_m + \left(D \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \right) w_m - \left(F \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) \phi_m \right] - \omega^2 \left[-I_2 \frac{m\pi}{L} u_m + \left(I_1 + I_4 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) w_m - I_5 \frac{m\pi}{L} \phi_m \right] &= 0 \\ \left[\left(C \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) u_m - \left(F \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) w_m + \left(H_1 + G_1 \frac{m\pi}{L} \right) \phi_m \right] - \omega^2 \left[I_3 u_m - I_5 \frac{m\pi}{L} w_m + I_6 \phi_m \right] &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Hệ phương trình (19) có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ w_m \\ \phi_m \end{Bmatrix} = 0 \Leftrightarrow ([K] - \omega_m^2 [M]) \{ \Delta \} = 0 \quad (20)$$

trong đó $\{\Delta\}^T = \{u_m, w_m, \phi_m\}$ và $[K]$, $[M]$ là các ma trận độ cứng, ma trận khối lượng. Các hệ số của ma trận $[K]$ là:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \left(A \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right); \quad k_{12} = k_{21} = - \left(B \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right); \quad k_{13} = k_{31} = \left(C \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right); \\ k_{22} &= - \left(D \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \right); \quad k_{23} = k_{32} = - \left(F \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right); \quad k_{33} = \left(H_1 + G_1 \frac{m\pi}{L} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Các hệ số của ma trận $[M]$:

$$m_{11} = I_1; m_{12} = m_{21} = - \left(I_2 \frac{m\pi}{L} \right); m_{13} = m_{31} = I_3; m_{22} = \left(I_1 + I_4 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right); m_{23} = m_{32} = - I_5 \frac{m\pi}{L}; m_{33} = I_6 \quad (22)$$

$$\text{Từ (20) ta nhận được phương trình trị riêng dưới dạng: } \left[[K] - \omega_m^2 [M] \right] = 0 \quad (23)$$

Tần số dao động riêng m là nghiệm của (23). Ứng với mỗi tần số dao động riêng ta sẽ có dạng dao động riêng tương ứng.



3. Kết quả số

Xét dầm đơn giản bằng vật liệu FGM, tiết diện hình chữ nhật (bxb) có chiều dài L , chịu tải trọng phân bố đều q . Vật liệu FGM có dạng (2) với tính chất các vật liệu thành phần là:

Kim loại (Al): $E_m = 70(\text{GPa})$; $\rho_m = 2702 (\text{kg/m}^3)$; $\nu_m = 0.3$

Ceramic (Al_2O_3): $E_c = 380(\text{GPa})$; $\rho_c = 3800 (\text{kg/m}^3)$; $\nu_c = 0.3$.

Các chỉ số p khác nhau. Các biểu thức không thứ nguyên được tính theo công thức sau:

$$w_{ktn} = \frac{100Eh^3}{q_0L^4} w \left(\frac{L}{2} \right); u_{ktn} = \frac{100Eh^3}{q_0L^4} u \left(0, -\frac{h}{2} \right); \sigma_{xx-ktn} = \frac{h}{q_0L} \sigma_{xx} \left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right); \sigma_{zx-ktn} = \frac{h}{q_0L} \sigma_{zx}(0,0); \omega_{ktn} = \omega_m \left(\frac{L^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (24)$$

3.1 Kết quả phân tích tĩnh

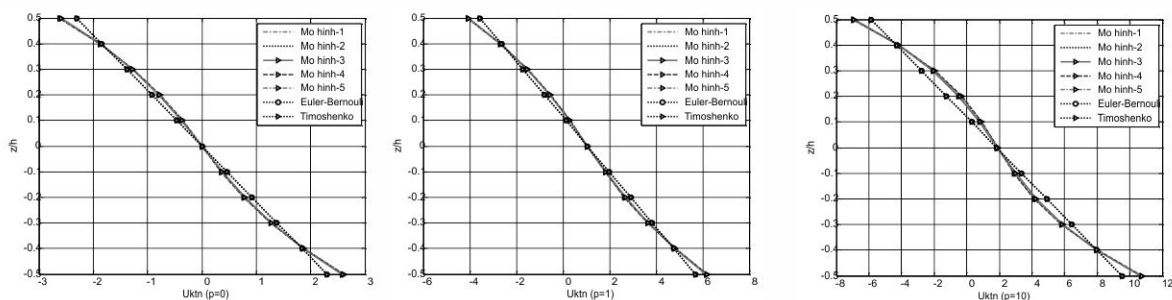
Chương trình tính toán các thành phần chuyển vị và ứng suất của dầm FGM đã được lập trên nền MathLab. Kết quả tính toán được so sánh với lời giải theo lý thuyết đàn hồi với mô hình dầm bậc cao của Li và cộng sự [5].

Trong Bảng 2, kết quả chuyển vị dọc trục, ứng suất pháp cho sai số nhỏ giữa các mô hình (<5%). Sai số lớn hơn thể hiện ở giá trị của độ võng, ứng suất cắt ngang (σ_{zx-ktn}) tính theo các lý thuyết bậc cao so với hai mô hình dầm Euler - Bernoulli và Timoshenko (hệ số hiệu chỉnh cắt $k=5/6$ với tiết diện chữ nhật).

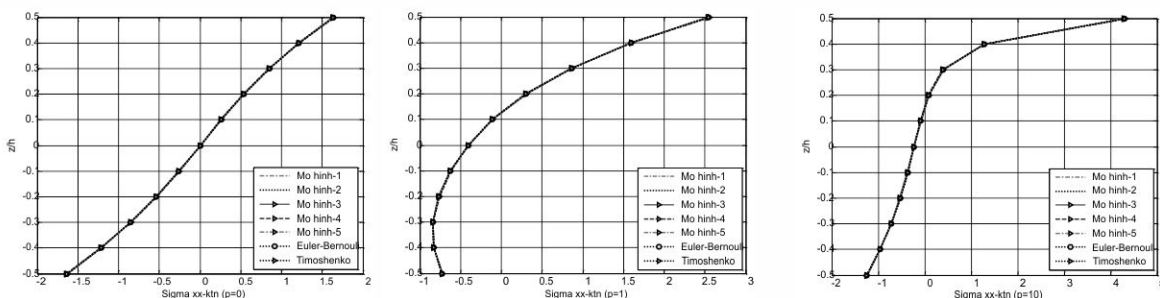
Bảng 2. Chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên của dầm đơn giản bằng vật liệu FGM chịu uốn bởi tải trọng phân bố đều

p	Mô hình	L/h=5				L/h=20			
		w_{ktn}	u_{ktn}	σ_{xx-ktn}	σ_{zx-ktn}	w_{ktn}	u_{ktn}	σ_{xx-ktn}	σ_{zx-ktn}
0	Mô hình 1	3.165	0.940	3.802	0.733	2.896	0.231	15.013	0.744
	Mô hình 2	3.165	0.940	3.802	0.733	2.896	0.231	15.013	0.744
	Mô hình 3	3.165	0.941	3.805	0.755	2.896	0.231	15.014	0.767
	Mô hình 4	3.165	0.940	3.802	0.731	2.896	0.231	15.013	0.742
	Mô hình 5	3.164	0.942	3.808	0.776	2.896	0.231	15.015	0.791
	Euler-Bernoulli	2.878	0.921	3.750	-	2.878	0.230	15.000	-
	Timoshenko	3.118	0.921	3.750	0.497	2.893	0.230	15.000	0.497
	Li và cộng sự [5]	3.166	0.940	3.802	0.750	2.896	0.231	15.013	0.750
2	Mô hình 1	8.068	3.113	6.882	0.670	7.442	0.769	27.099	0.681
	Mô hình 2	8.068	3.113	6.882	0.670	7.442	0.769	27.099	0.681
	Mô hình 3	8.068	3.115	6.890	0.693	7.442	0.769	27.101	0.706
	Mô hình 4	8.068	3.113	6.882	0.668	7.442	0.769	27.099	0.679
	Mô hình 5	8.067	3.117	6.897	0.716	7.442	0.769	27.103	0.730
	Euler-Bernoulli	7.400	3.074	6.768	-	7.400	0.768	27.070	-
	Timoshenko	7.925	3.074	6.768	0.423	7.433	0.768	27.070	0.423
	Li và cộng sự [5]	8.060	3.113	6.881	0.679	7.442	0.769	27.099	0.679
10	Mô hình 1	10.938	3.886	9.712	0.647	9.691	0.954	38.138	0.659
	Mô hình 2	10.938	3.886	9.712	0.647	9.691	0.954	38.138	0.659
	Mô hình 3	10.942	3.891	9.724	0.671	9.691	0.954	38.141	0.685
	Mô hình 4	10.938	3.886	9.711	0.644	9.691	0.954	38.138	0.656
	Mô hình 5	10.940	3.896	9.734	0.694	9.691	0.954	38.144	0.711
	Euler-Bernoulli	9.607	3.810	9.523	-	9.607	0.952	38.091	-
	Timoshenko	10.534	3.810	9.523	0.356	9.665	0.952	38.091	0.356
	Li và cộng sự [5]	10.898	3.886	9.706	0.644	9.688	0.954	38.137	0.644

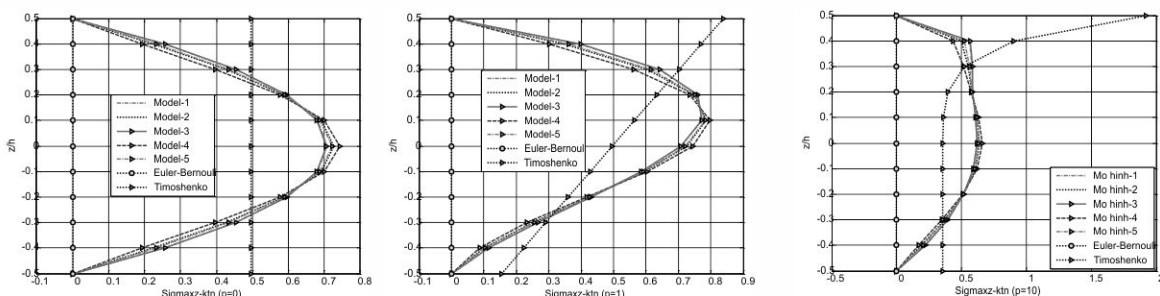
Biến thiên của thành phần chuyển vị dọc trục không thứ nguyên u_{ktn} , các thành phần ứng suất không thứ nguyên σ_{xx-ktn} , σ_{zx-ktn} theo tọa độ chiều cao dầm với các mô hình tính khác nhau được biểu diễn trên Hình 3, Hình 4 và Hình 5.



Hình 3. Biến thiên của thành phần chuyển vị u_{ktn} theo tỷ số z/h của dầm FGM ($L=2h$) với chỉ số tỷ lệ thể tích ($p=0; 1; 10$)

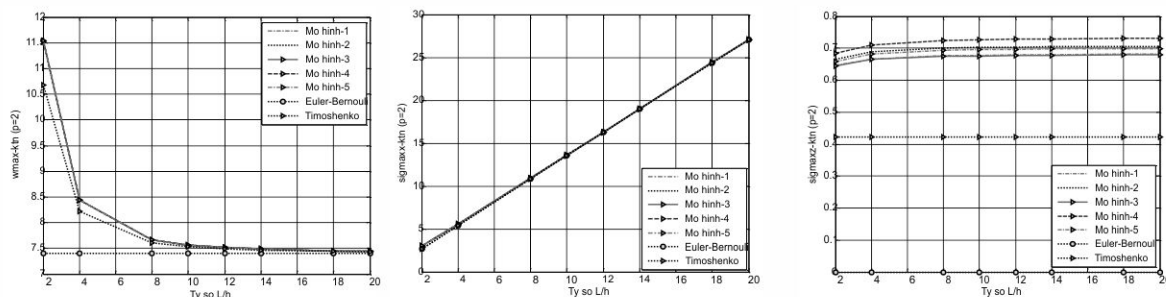


Hình 4. Biến thiên của ứng suất pháp σ_{xx-ktn} theo tỷ số z/h của dầm FGM ($L=2h$) với chỉ số tỷ lệ thể tích ($p=0; 1; 10$)



Hình 5. Biến thiên của ứng suất tiếp σ_{zx-ktn} theo tỷ số z/h của dầm FGM ($L=2h$)

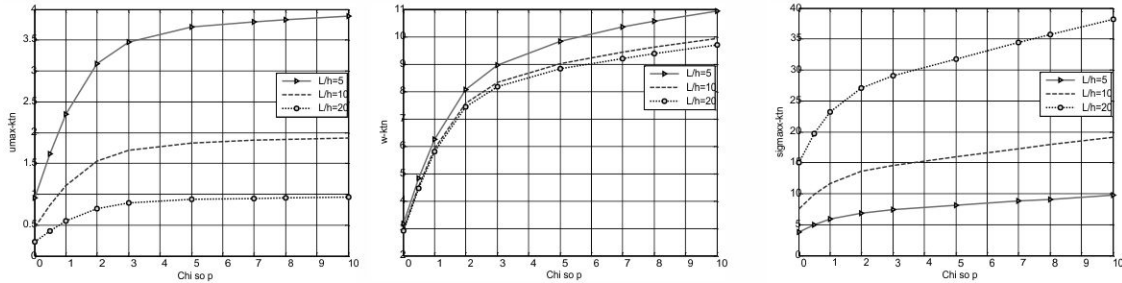
Từ Hình 3+5 có thể thấy rằng các thành phần chuyển vị dọc trục, ứng suất pháp cho kết quả với sai lệch nhỏ giữa các mô hình. Sự khác biệt giữa các mô hình thể hiện rõ với ứng suất cắt ngang. Điều này là do dạng hàm $f(z)$ đặc trưng cho sự phân bố ứng suất cắt của các mô hình có dạng khác nhau.



Hình 6. Ảnh hưởng của tỷ số L/h đến biến thiên của độ võng, ứng suất pháp lớn nhất, ứng suất tiếp lớn nhất của dầm FGM (chỉ số tỷ lệ thể tích $p=2$)

Ảnh hưởng của mô hình tính thể hiện rõ nhất qua tỷ số L/h . Hình 6 biểu diễn sự biến thiên của chuyển vị dọc trục, độ võng không thứ nguyên lớn nhất, các thành phần ứng suất không thứ nguyên theo tỷ số L/h ($p=2$). Đồ thị trên Hình 6 cho thấy: ứng suất pháp là như nhau với tất cả các mô hình dầm, trong khi đó ứng suất tiếp thay đổi với các mô hình dầm khác nhau. Với các dầm có tỷ số $L/h < 5$ (dầm ngắn), khi thay đổi mô hình tính có sự sai khác rõ rệt về độ võng, trong khi đó với dầm dài ($L/h > 5$) thì độ võng hầu như không thay đổi.

Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích p đến độ võng, chuyển vị dọc trục và ứng suất pháp của dầm FGM thể hiện trên đồ thị Hình 7.



Hình 7. Biến thiên của $u_{ktn}(0, -\frac{h}{2})$, $w_{ktn}(\frac{L}{2})$, $\sigma_{xx-ktn}(\frac{L}{2}, \frac{h}{2})$ theo chỉ số p

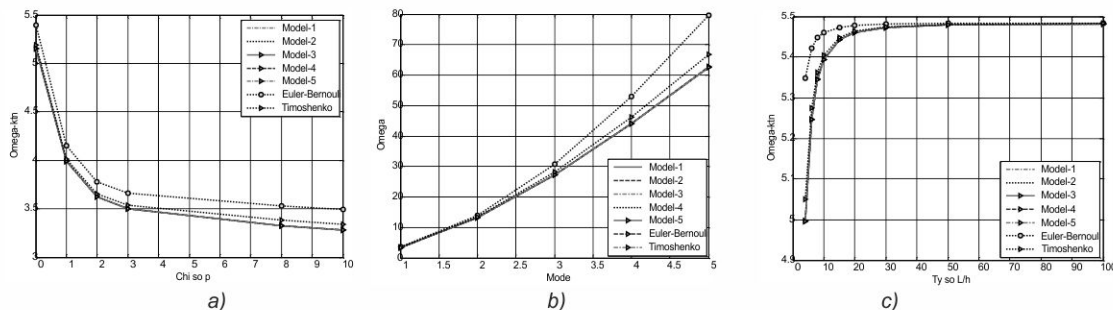
Từ đồ thị Hình 7 ta có thể thấy rằng p tăng thì các chuyển vị và ứng suất pháp của dầm tăng nghĩa là độ cứng của dầm FGM bị giảm do hàm lượng ceramic trong vật liệu FGM giảm.

3.2 Kết quả phân tích dao động riêng

Tần số dao động riêng của dầm FGM với chỉ số tỷ lệ thể tích $p=5$, $p=20$ được trình bày trong Bảng 3. Ta thấy các kết quả hầu như trùng khớp so với kết quả của tác giả Simsek [8] tính toán theo mô hình dầm bậc cao bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

Bảng 3. Tần số dao động riêng cơ bản ktn của dầm FGM

L/h	Mô hình	p					
		0	0.5	1	2	5	10
5	Mô hình 1	5.153	4.411	3.990	3.626	3.401	3.282
	Mô hình 2	5.153	4.411	3.990	3.626	3.401	3.282
	Mô hình 3	5.153	4.411	3.991	3.626	3.400	3.281
	Mô hình 4	5.153	4.411	3.990	3.627	3.401	3.282
	Mô hình 5	5.154	4.412	3.991	3.627	3.399	3.281
	Euler-Bernoulli	5.395	4.593	4.148	3.779	3.595	3.492
	Timoshenko	5.191	4.437	4.015	3.657	3.457	3.341
	Simsek [8]	5.153	4.411	3.990	3.626	3.401	3.282
20	Mô hình 1	5.460	4.651	4.205	3.836	3.649	3.539
	Mô hình 2	5.460	4.651	4.205	3.836	3.649	3.539
	Mô hình 3	5.460	4.651	4.205	3.836	3.648	3.539
	Mô hình 4	5.460	4.651	4.205	3.836	3.649	3.539
	Mô hình 5	5.460	4.651	4.205	3.836	3.648	3.539
	Euler-Bernoulli	5.478	4.664	4.216	3.847	3.663	3.555
	Timoshenko	5.463	4.653	4.207	3.838	3.653	3.544
	Simsek [8]	5.460	4.651	4.205	3.836	3.649	3.539



Hình 8. Tần số dao động riêng ω_{ktn} biến thiên theo chỉ số tỷ lệ thể tích p (a), theo các dạng dao động (modes) (b) và theo tỷ số L/h (c)

Biến thiên của tần số dao động riêng không thứ nguyên theo chỉ số tỷ lệ thể tích, các dạng dao động và tỷ số L/h biểu diễn trên Hình 8. Có thể thấy rằng khi chỉ số tỷ lệ thể tích p tăng thì tần số dao động riêng giảm do hàm lượng ceramic trong vật liệu FGM giảm làm giảm độ cứng của dầm. Tần số dao động riêng tăng theo tỷ số L/h và dạng dao động m . Đối với các dầm có tỷ số $L/h > 10$, tính toán với các mô hình dầm khác nhau cho sai lệch về tần số dao động riêng là không đáng kể.



4. Kết luận

Từ các khảo sát số trên có thể rút ra các kết luận sau:

- Các lý thuyết dầm bậc cao biểu diễn biến thiên của ứng suất cắt ngang theo chiều cao dầm dạng parabol, giá trị ứng suất cắt ngang ở mặt trên và mặt dưới của dầm bằng không phản ánh sát thực tế hơn sự làm việc của dầm. Sử dụng lý thuyết dầm bậc cao không cần sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt như đối với mô hình dầm Timoshenko truyền thống.
- Độ võng và tần số dao động riêng của dầm có tỷ số $L/h > 10$ tính theo các mô hình dầm cho kết quả tương đương nhau, nên khi tính toán sơ bộ có thể sử dụng mô hình dầm đơn giản nhất, mô hình Euler - Bernoulli. Khi cần độ chính xác cao hơn nên lựa chọn các mô hình dầm bậc cao đối với các dầm ngắn.
- Đối với dầm FGM, chỉ số tỷ lệ thể tích p tăng sẽ làm giảm độ cứng của dầm FGM dẫn đến độ võng của dầm tăng và tần số riêng giảm.

Tài liệu tham khảo

1. A. Sayyad (2012), "Static flexure and free vibration analysis of thick isotropic beams using different higher order shear deformation theories", *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 8 (14): 71-87.
2. Akavci, S. S. (2007), "Buckling and free vibration analysis of symmetric and anti-symmetric laminated composite plates on an elastic foundation", *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 26 (18) 1907-1919.
3. Huu-Tai Thai, Thuc P. Vo (2012), "Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories", *International Journal of Mechanical Sciences* 62, pp. 57-66.
4. Karama M, Afaq KS, Mistou S (2003), "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures Mô hình with transverse shear stress continuity", *Int J Solids Struct*, 40(6):1525-46.
5. Li XF, Wang BL, Han JC (2010), "A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams", *Arch Appl Mech*, 80(10):1197-212.
6. Reddy JN (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *J Appl Mech*, 51(4):745-52.
7. Reddy JN (2000), "Analysis of functionally graded plates", *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 47, 663-684.
8. Simsek M (2010), "Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories", *Nucl Eng Des*, 240(4):697-705.
9. Soldatos K (1992), "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates", *Acta Mech*, 94(3):195-220.
10. Touratier M (1991), "An efficient standard plate theory", *Int J Eng Sci*, 29(8):901-16.