

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA DẦM CONG CÓ CƠ TÍNH BIẾN ĐỔI ĐỐI XỨNG HAI PHƯƠNG

Chu Thanh Bình^{a,*}

^a*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 11/02/2025, Sửa xong 25/3/2025, Chấp nhận đăng 06/5/2025

Tóm tắt

Bài báo phân tích đặc trưng dao động tự do của dầm cong làm từ vật liệu có cơ tính biến đổi đối xứng theo hai phương: phương chiều dài và chiều cao của dầm. Mô hình phân tích được xây dựng dựa trên lý thuyết dầm Timoshenko kết hợp với phương pháp Ritz, cho phép tính toán tần số dao động tự do của dầm với nhiều điều kiện biên khác nhau. Kết quả so sánh với các nghiên cứu trước đây minh chứng cho độ tin cậy và tính chính xác của mô hình. Đồng thời, các kết quả số được thực hiện để đánh giá ảnh hưởng của các tham số hình học, tham số vật liệu và điều kiện biên đến tần số dao động, góp phần cung cấp dữ liệu quan trọng cho việc thiết kế và ứng dụng các loại dầm cong này trong thực tiễn.

Từ khoá: dao động; dầm cong; FGM; phương pháp Ritz; điều kiện biên; tần số.

FREE VIBRATION ANALYSIS OF TWO DIRECTIONAL SYMMETRICAL FUNCTIONALLY GRADED CURVED BEAMS

Abstract

The paper analyzes the free vibration characteristics of curved beams made of functionally graded materials with symmetrical properties in two directions: axial and thickness. The analytical model is developed based on Timoshenko beam theory combined with the Ritz method, allowing the calculation of free vibration frequencies for beams under various boundary conditions. Comparisons with previous studies confirm the reliability and accuracy of the proposed model. Furthermore, numerical analyses are performed to assess the effects of geometric parameters, material properties, and boundary conditions on vibration frequencies, providing valuable insights for the design and practical application of such curved beams.

Keywords: vibration; curved beam; FGM; Ritz method; boundary conditions; frequencies.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2025-19\(2V\)-07](https://doi.org/10.31814/stce.huce2025-19(2V)-07) © 2025 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Dầm cong là một loại kết cấu cơ bản được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau chẳng hạn như trong các công trình xây dựng, công nghiệp cơ khí hay các kết cấu dân sự và quân sự. Việc sử dụng dầm cong mang lại nhiều lợi ích, bao gồm tăng hiệu quả sử dụng vật liệu, tối ưu hóa không gian và tạo ra những thiết kế sáng tạo. Tuy nhiên, dầm cong cũng đặt ra nhiều thách thức như khó khăn trong tính toán. Do đó, phân tích ứng xử cơ học nói chung và dao động tự do nói riêng của dầm cong luôn là một chủ đề thu hút sự quan tâm từ các nhà nghiên cứu với các phương pháp tiếp cận khác nhau. Karaagac và cs. [1] đã nghiên cứu dao động tự do của dầm cong và xác định tần số dao động tự do bằng cách sử dụng cả phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) và phương pháp năng lượng. Chen [2] đã phân tích dao động tự do trong mặt phẳng của dầm cong, thông qua việc chuyển đổi mô hình vi phân tương đương (DQ) thành mô hình cầu phương (EDQ). Toygar và cs. [3] đã tiến hành nghiên cứu dao động tự do và phân bố ứng suất của dầm sandwich cong làm từ sợi thủy tinh và nhựa

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: binhct@huce.edu.vn (Bình, C. T.)

vinylester bằng cách kết hợp phương pháp số và thực nghiệm. Nhóm của Lee [4] đã nghiên cứu dao động tự do của dầm có độ cong thay đổi, được đặt trên nền Pasternak. Các tác giả sử dụng lý thuyết dầm Timoshenko cùng với các phương pháp Runge–Kutta và Regula–Falsi để xác định tần số và dạng dao động với các điều kiện biên khác nhau. Viola và cs. [5] cũng áp dụng phương pháp vi phân cầu phương để giải các phương trình để xác định các tần số dao động tự do của dầm cong. Nhóm nghiên cứu của Tarnopolskaya [6] đã nghiên cứu hiện tượng chuyển đổi dạng dao động trong các dầm cong với độ cong và tiết diện thay đổi dọc theo chiều dài, sử dụng phương pháp nhiễu loạn để thiết lập các phương trình dao động. Torabi và cs. [7] đã nghiên cứu dao động tự do của dầm Timoshenko với nhiều vết nứt bằng phương pháp DQEM và kiểm chứng độ chính xác của phương pháp này qua so sánh với các nghiên cứu trước. Huynh và cs. [8] sử dụng phương pháp đẳng hình học để nghiên cứu uốn, ổn định và dao động tự do của các dầm có độ cong thay đổi. Các tác giả đã làm rõ ảnh hưởng của phân bố vật liệu, tỷ lệ kích thước, và độ mảnh đến ứng xử của dầm dưới các điều kiện biên khác nhau. Mochida và cs. [9] sử dụng phương pháp Rayleigh–Ritz để nghiên cứu dao động tự do của các dầm cong chịu tải dọc trục, bao gồm các trường hợp tựa đơn giản và ngàm. Dey và Talukdar [10] đã phát triển một mô hình phân tử hữu hạn tổng quát nhằm tính toán các đặc trưng dao động của dầm cong thành mỏng, có xét đến ảnh hưởng của tải xoắn.

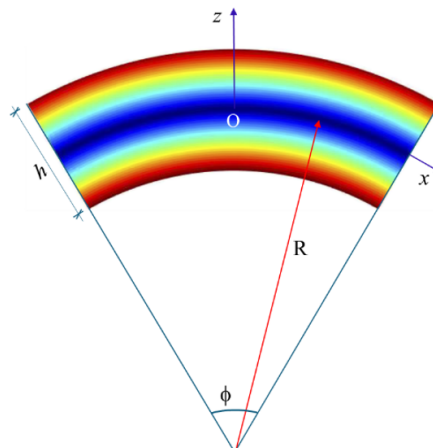
Tìm kiếm và sử dụng các loại vật liệu mới để thay thế vật liệu truyền thống trong các ứng dụng thực tế là xu hướng chung trong nhiều lĩnh vực công nghiệp và khoa học. Gần đây, vật liệu có cơ tính biến đổi (Functionally Graded Material - FGM), với các ưu điểm vượt trội như khả năng chịu lực tốt, kháng nhiệt cao, chống mài mòn, và đặc biệt là tránh được sự bong tách - một nhược điểm thường gặp của vật liệu composite truyền thống, đã được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực như công nghệ vũ trụ, hàng không, đóng tàu, và xây dựng. Nhờ các đặc tính nổi bật, nhiều nghiên cứu đã tập trung vào các khía cạnh như động tự do [11–13], đáp ứng động [14, 15], uốn [16, 17], và ổn định [18, 19] của các kết cấu làm từ FGM. Tuy nhiên, hầu hết các nghiên cứu này chủ yếu tập trung vào FGM có tính chất biến đổi theo một chiều (1D-FGM), trong khi FGM biến đổi theo hai phương (2D-FGM) lại thực sự cần thiết trong nhiều ứng dụng thực tế. Một số nghiên cứu gần đây đã bắt đầu phân tích đặc tính của 2D-FGM nhưng vẫn còn hạn chế. Karamanli [20] đã phân tích uốn tích dầm 2D-FGM có cơ tính tuân theo qui luật hàm lũy thừa. Pydah và Sabale [21] nghiên cứu ứng xử tĩnh của dầm cong 2D-FGM. Huang và Ouyang [22] đưa ra lời giải cho bài toán uốn dầm 2D-FGM, xét cả cơ tính tuân theo hàm mũ và hàm lũy thừa, chịu nhiều loại tải trọng và điều kiện biên khác nhau. Sử dụng phương pháp không gian trạng thái, Deng và Cheng [23] đã nghiên cứu dao động tự do của dầm 2D-FGM theo lý thuyết dầm Timoshenko. Nguyen và cs. [24] giới thiệu mô hình phân tử hữu hạn bậc cao để phân tích phi tuyến uốn tĩnh cho tấm 2D-FGM. Nhóm nghiên cứu của Alaa [25] nghiên cứu đáp ứng chuyển vị của dầm 2D-FGM chịu tác động của tải trọng di động.

Từ nghiên cứu tổng quan nói trên, có thể nhận thấy rằng dao động tự do của dầm cong làm bằng vật liệu có cơ tính biến đổi đối xứng hai phương là chưa được nghiên cứu đầy đủ. Do đó, bài báo này đề xuất một mô hình phân tích dao động tự do của loại dầm cong này, sử dụng lý thuyết dầm Timoshenko kết hợp với phương pháp Ritz để tính toán cho dầm có nhiều điều kiện biên khác nhau. Tính chính xác và độ tin cậy của mô hình được khẳng định qua việc đối chiếu với các kết quả đã công bố. Cuối cùng, ảnh hưởng của các yếu tố như đặc tính vật liệu, thông số hình học và điều kiện biên đến tần số dao động của dầm cong 2DS-FGM được khảo sát và thảo luận chi tiết, cung cấp dữ liệu, làm cơ sở cho việc thiết kế các ứng dụng liên quan.

2. Mô hình dầm cong 2DS-FGM

2.1. Kích thước hình học

Xét dầm cong có cơ tính biến đổi đối xứng hai phương như trong Hình 1 (sau đây gọi tắt là dầm cong 2DS-FGM). Dầm có chiều dài L , mặt cắt ngang chữ nhật $b \times h$, bán kính cong R và góc mở ϕ . Hệ trục tọa độ Oxz được gắn vào dầm như hình vẽ, trong đó trục x là trục cong nằm trên mặt trung bình của dầm.



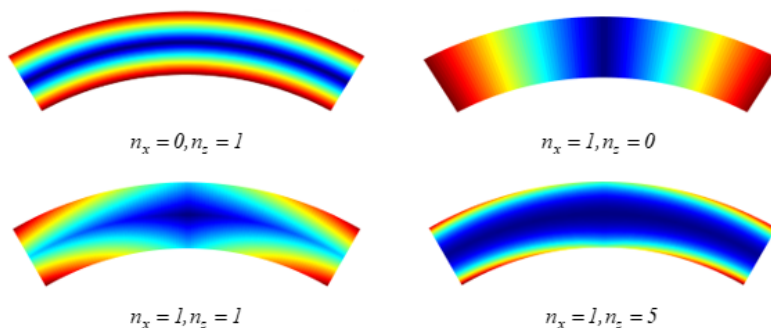
Hình 1. Dầm cong 2DS-FGM

2.2. Mô hình vật liệu

Vật liệu làm dầm được giả thiết có cơ tính biến đổi đối xứng theo cả phương chiều dài và chiều cao của dầm theo quy luật hàm lũy thừa sau [26]:

$$P(x, z) = (P_1 - P_2) \left(\left| \frac{z}{h} \right| + 0.5 \right)^{n_z} \left(\left| \frac{x}{L} \right| + 0.5 \right)^{n_x} + P_2 \quad (1)$$

trong đó $P(x, z)$ là tính chất của vật liệu chẳng hạn như module đàn hồi $E(x, z)$, khối lượng riêng $\rho(x, z)$; P_1, P_2 là tính chất tương ứng của vật liệu 1 và 2.



Hình 2. Biến đổi module đàn hồi theo phương chiều dài và chiều dày của dầm

Hình 2 minh họa sự biến đổi của module đàn hồi khi hai vật liệu thành phần làm dầm là gốm (Al_2O_3) và nhôm (Al), tính chất vật liệu của hai loại vật liệu này được trình bày trong Bảng 1.

Bảng 1. Tính chất các vật liệu thành phần

| Vật liệu | Module đàn hồi E (GPa) | Hệ số Poisson ν | Khối lượng riêng ρ (kg/m^3) |
|-----------|--------------------------|---------------------|--------------------------------------|
| Al_2O_3 | 380 | 0,3 | 3960 |
| Al | 70 | 0,3 | 2700 |

3. Hệ phương trình chuyển động dầm cong 2DS-FGM

3.1. Mô hình dầm cong 2DS-FGM

Theo lý thuyết dầm Timoshenko, chuyển vị của một điểm bất kỳ trong dầm được xác định theo công thức sau:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) + z\theta(x, t) \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (2)$$

Các thành phần biến dạng khi xét đến độ cong của dầm được xác định như sau:

$$\varepsilon = \frac{1}{(1+z/R)} (\varepsilon_0 + z\kappa); \quad \gamma = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta - \frac{u_0}{R} \quad (3)$$

Trong công thức (2) và (3): u_0 và w_0 là các thành phần chuyển vị thẳng theo phương x và phương z , θ là góc xoay của mặt cắt ngang dầm, ε là biến dạng dài, γ là biến dạng góc, và $\varepsilon_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w_0}{R}$, $\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial x}$.

Các thành phần ứng suất trong dầm được xác định theo định luật Hooke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & k_s G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (4)$$

trong đó $Q = E(x, z)$, $G = \frac{E(x, z)}{2(1+\nu)}$, k_s là hệ số hiệu chỉnh.

Thế năng biến dạng đàn hồi của dầm được xác định như sau:

$$U = \int_V (\sigma\varepsilon + \tau\gamma) dV \quad (5)$$

Thay các thành phần ứng suất, biến dạng từ phương trình (4) và (3) vào (5) và thực hiện các biến đổi toán học, thu được:

$$U = \int_{-L/2}^{L/2} (N\varepsilon_0 + M\kappa + Q\gamma) dA \quad (6)$$

trong đó N , M và Q lần lượt là các thành phần lực dọc, mô men, lực cắt và được xác định như sau:

$$N = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{b}{(1+\frac{z}{R})} \sigma dz; \quad M = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{b}{(1+\frac{z}{R})} \sigma z dz; \quad Q = \int_{-h/2}^{h/2} b\tau dz \quad (7)$$

Thay (3) vào (4) rồi thay kết quả thu được vào (7) sau đó thực hiện tích phân, nhận được phương trình quan hệ giữa nội lực và biến dạng như sau:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & 0 \\ B_{11} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (8)$$

trong đó A_{11} , B_{11} , D_{11} và A_{55} là các hệ số độ cứng vật liệu và được xác định như sau:

$$\begin{aligned} A_{11} &= b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{(1+z/R)} Q dz; & B_{11} &= b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{(1+z/R)} Qz dz \\ D_{11} &= b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{(1+z/R)} Qz^2 dz; & A_{55} &= k_s b \int_{-h/2}^{h/2} G dz \end{aligned} \quad (9)$$

Động năng của dầm được xác định theo công thức sau:

$$T = \int_V (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \rho \left(1 + \frac{z}{R}\right) dV \quad (10)$$

Thay (2) vào (10) nhận được:

$$T = \int_{-L/2}^{L/2} [I_0 (\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + 2I_1 \dot{u}_0 \dot{\theta} + I_2 \dot{\theta}^2] dx \quad (11)$$

trong đó $(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{2/2} (1, z, z^2) \rho \left(1 + \frac{z}{R}\right) b dz$ là các mô men quán tính.

Tổng năng lượng của dầm khi dao động tự do không cản được xác định như sau:

$$\Pi = U - T \quad (12)$$

3.2. Lời giải theo phương pháp Ritz

Các thành phần chuyển vị được chọn theo các chuỗi như sau:

$$u_0(x, t) = \sum_{m=1}^N \bar{U}_m F_m^u e^{i\omega t}; \quad w_0(x, t) = \sum_{m=1}^N \bar{W}_m F_m^w e^{i\omega t}; \quad \theta(x, t) = \sum_{m=1}^N \bar{\Phi}_m F_m^\theta e^{i\omega t} \quad (13)$$

trong đó F_m^u, F_m^w, F_m^θ là các hàm thử và được lựa chọn sao cho thỏa mãn điều kiện biên như trình bày trong Bảng 2, N là số số hạng của chuỗi.

Bảng 2. Hàm thử theo điều kiện biên

| Điều kiện biên | SS | CC | CS |
|--------------------------|---|---|--|
| Điều kiện biên chuyển vị | $u_0 = w_0 = 0, \theta \neq 0$ tại $x = 0$ và $x = L$ | $u_0 = w_0 = w_{0,x} = \theta = 0$ tại $x = 0$ và $x = L$ | $u_0 = w_0 = w_{0,x} = \theta = 0$ tại $x = 0$ và $u_0 = w_0 = 0,$ $\theta \neq 0$ tại $x = L$ |
| F_m^u | $\left(\frac{x}{L} + 0,5\right)^m$ | $\left(\frac{x}{L} + 0,5\right)^m \left(0,5 - \frac{x}{L}\right)$ | $\left(\frac{x}{L} + 0,5\right)^m$ |
| F_m^w | $\left(\frac{x}{L} + 0,5\right)^m \left(0,5 - \frac{x}{L}\right)$ | $\left(\frac{x}{L} + 0,5\right)^{m+1} \left(0,5 - \frac{x}{L}\right)^2$ | $\left(\frac{x}{L} + 0,5\right)^{m+1} \left(0,5 - \frac{x}{L}\right)$ |
| F_m^θ | $\left(\frac{x}{L} + 0,5\right)^{m-1}$ | $\left(\frac{x}{L} + 0,5\right)^m \left(0,5 - \frac{x}{L}\right)$ | $\left(\frac{x}{L} + 0,5\right)^m$ |

Thay các thành phần chuyển vị từ (13) vào (2) rồi thực hiện đạo hàm theo (3), sau đó thay kết quả vào (6) và (11), cuối cùng thay kết quả vào (12) ta được tổng năng lượng Π của dầm. Thực hiện cực tiểu hóa hàm tổng năng lượng Π thu được hệ phương trình chuyển động của dầm có dạng sau:

$$\left(\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{u\theta} \\ K_{wu} & K_{ww} & K_{w\theta} \\ K_{\theta u} & K_{\theta w} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{uu} & M_{uw} & M_{u\theta} \\ M_{wu} & M_{ww} & M_{w\theta} \\ M_{\theta u} & M_{\theta w} & M_{\theta\theta} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \bar{U}_m \\ \bar{W}_m \\ \bar{\Phi}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

trong đó các phần tử của ma trận độ cứng $[K]$ và ma trận khối lượng $[M]$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned}
 K_{uu} &= \int_{-L/2}^{L/2} 2 \left[A_{11} \frac{\partial F^u}{\partial x} \left(\frac{\partial F^u}{\partial x} \right)^T + \frac{A_{55}}{R^2} F^u (F^u)^T \right] dx, \\
 K_{uw} &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2}{R} \left[A_{11} \frac{\partial F^u}{\partial x} (F^w)^T - A_{55} F^u \left(\frac{\partial F^w}{\partial x} \right)^T \right] dx \\
 K_{u\theta} &= \int_{-L/2}^{L/2} 2 \left[B_{11} \frac{\partial F^u}{\partial x} \left(\frac{\partial F^\theta}{\partial x} \right)^T - \frac{A_{55}}{R} F^u \left(\frac{\partial F^\theta}{\partial x} \right)^T \right] dx \\
 K_{ww} &= \int_{-L/2}^{L/2} 2 \left[\frac{A_{11}}{R^2} F^w (F^w)^T + A_{55} \frac{\partial F^w}{\partial x} \left(\frac{\partial F^w}{\partial x} \right)^T \right] dx \\
 K_{w\theta} &= \int_{-L/2}^{L/2} 2 \left[\frac{B_{11}}{R} F^w \left(\frac{\partial F^\theta}{\partial x} \right)^T + A_{55} \frac{\partial F^w}{\partial x} (F^\theta)^T \right] dx \\
 K_{wu} &= (K_{uw})^T; \quad K_{\theta u} = (K_{u\theta})^T; \quad K_{\theta w} = (K_{w\theta})^T \\
 K_{\theta\theta} &= \int_{-L/2}^{L/2} 2 \left[D_{11} \frac{\partial F^w}{\partial x} \left(\frac{\partial F^w}{\partial x} \right)^T + A_{55} F^w (F^w)^T \right] dx \\
 M_{uu} &= \int_{-L/2}^{L/2} 2I_0 \dot{F}^u (\dot{F}^u)^T dx; \quad M_{uw} = 0; \quad M_{u\theta} = \int_{-L/2}^{L/2} 2I_1 \dot{F}^u (\dot{F}^\theta)^T dx \\
 M_{wu} &= 0; \quad M_{ww} = \int_{-L/2}^{L/2} 2I_0 \dot{F}^w (\dot{F}^w)^T dx; \quad M_{w\theta} = 0 \\
 M_{\theta u} &= (M_{u\theta})^T; \quad M_{\theta w} = 0; \quad M_{\theta\theta} = \int_{-L/2}^{L/2} 2I_2 \dot{F}^\theta (\dot{F}^\theta)^T dx
 \end{aligned} \tag{15}$$

Từ phương trình (14) có thể nhận được tần số dao động của dầm cong 2DS-FGM bằng cách giải phương trình trị riêng sau:

$$|K - \omega^2 M| = 0 \tag{16}$$

4. Kết quả số và thảo luận

Trong phần này, một chương trình Matlab được xây dựng dựa trên mô hình đã thiết lập ở trên được thực hiện để khảo sát ảnh hưởng của các tham số vật liệu, tham số hình học cũng như điều kiện biên đến tần số dao động tự do của dầm cong 2DS-FGM. Tham số tần số dao động được định nghĩa theo công thức sau:

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}; \quad \bar{\omega} = \sqrt{\omega} (\rho_m A L^4 / EI)^{1/4} \tag{17}$$

4.1. Kiểm chứng mô hình

Do chưa có công bố nào về phân tích dao động của dầm cong 2DS-FGM nên nghiên cứu này sẽ thực hiện ba ví dụ so sánh để kiểm chứng từng phần độ chính xác của mô hình thiết lập. Trong ví dụ thứ nhất, dầm cong đẳng hướng có tỷ số $L/h = 5$ được sử dụng. Tham số tần số dao động của dầm trong hai trường hợp góc mở khác nhau sẽ được tính toán và so sánh với kết quả tính theo lý thuyết chuyển vị bậc nhất (FSDT) và bậc cao (HSDT) của Ganapathi và Polit [27], như trình bày trong Bảng 3.

Bảng 3. Tham số tần số dao động $\tilde{\omega}$ của dầm cong đẳng hướng

| Mô hình | $\phi = 30^\circ$ | | $\phi = 120^\circ$ | |
|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | $\tilde{\omega}_1$ | $\tilde{\omega}_2$ | $\tilde{\omega}_1$ | $\tilde{\omega}_2$ |
| FSDT [27] | 8,9558 | 32,5112 | 4,3109 | 27,5438 |
| HSDT [27] | 8,8907 | 31,8433 | 4,2791 | 26,9736 |
| Bài báo | 8,8968 | 31,9474 | 4,3002 | 27,4385 |

Từ bảng kết quả có thể thấy rằng kết quả tính từ mô hình của nghiên cứu này có sai khác rất nhỏ so với kết quả tính toán mà Ganapathi và Poli đã công bố. Điều này khẳng định tính chính xác và độ tin cậy cao của mô hình được thiết lập trong bài báo khi áp dụng để tính toán tần số dao động của dầm cong.

Ví dụ thứ hai được thực hiện với dầm FGM thẳng có cơ tính biến đổi theo phương chiều cao của dầm. Trong ví dụ này, dầm có liên kết tựa hai đầu (SS), vật liệu làm dầm có tính chất cho trong Bảng 1. Kết quả tính tham số tần số cơ bản của dầm được so sánh với kết quả của Thai và Vo [17] và Simsek [28] trong Bảng 4.

Bảng 4 cho thấy chênh lệch giữa các giá trị trong bài báo và các tài liệu tham khảo là rất nhỏ, cho thấy phương pháp tính toán của bài báo có độ chính xác cao khi tính toán tần số dao động của dầm FGM.

Bảng 4. So sánh tần số cơ bản $\tilde{\omega}$ của dầm thẳng FGM

| L/h | Tác giả | n_z | | | | | |
|-------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 5 | 10 |
| 5 | Thai và Vo [17] | 5,1527 | 4,4111 | 3,9904 | 3,6264 | 3,4012 | 3,2816 |
| | Simsek [28] | 5,1527 | 4,4107 | 3,9904 | 3,6264 | 3,4012 | 3,2816 |
| | Bài báo | 5,1525 | 4,3988 | 3,9709 | 3,6047 | 3,4023 | 3,2961 |
| 20 | Thai và Vo [17] | 5,4603 | 4,6516 | 4,2050 | 3,8361 | 3,6485 | 3,5390 |
| | Simsek [28] | 5,4603 | 4,6511 | 4,2051 | 3,8361 | 3,6485 | 3,5390 |
| | Bài báo | 5,4603 | 4,6503 | 4,2037 | 3,8347 | 3,6488 | 3,5403 |

Ví dụ cuối cùng được thực hiện với dầm đẳng hướng có điều kiện biên khác nhau, kết quả tính tham số tần số dao động của dầm SS và CC được so sánh trong Bảng 5. Bảng kết quả cho thấy tham số tần số $\tilde{\omega}$ của dầm tính theo mô hình thiết lập là xấp xỉ bằng với kết quả tính bởi Chen và cs. [29] và Nguyen và cs. [30] với các tỷ lệ L/h và điều kiện biên khác nhau.

Qua các ví dụ so sánh, có thể thấy mô hình trong bài báo đạt độ chính xác và tin cậy khi tính toán tần số dao động của dầm cong FGM dưới các điều kiện biên khác nhau. Ngoài ra, các kết quả trên được tính toán khi chương trình hội tụ với $N = 6$. Giá trị này của số hạng trong khai triển chuỗi cũng được áp dụng trong các ví dụ khảo sát sau đây.

Bảng 5. So sánh tham số tần số $\bar{\omega}$ của dầm thẳng với điều kiện biên khác nhau

| Điều kiện biên | L/h | [29] | [30] | Bài báo |
|----------------|-------|--------|--------|---------|
| SS | 5 | 3,0480 | 3,0457 | 3,0453 |
| | 15 | 3,1302 | 3,1299 | 3,1299 |
| CC | 5 | 4,2634 | 4,2584 | 4,2599 |
| | 15 | 4,6655 | 4,6615 | 4,6630 |

4.2. Khảo sát dao động tự do của dầm cong 2DS-FGM

Trong phần này, ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích n_x và n_z , ảnh hưởng của độ cong dầm, ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dài trên chiều dày dầm đến tham số tần số $\bar{\omega}$ được khảo sát chi tiết. Các khảo sát được thực hiện trên dầm có chiều dài $L = 1$ m, với tính chất vật liệu của các vật liệu thành phần được trình bày trong Bảng 1.

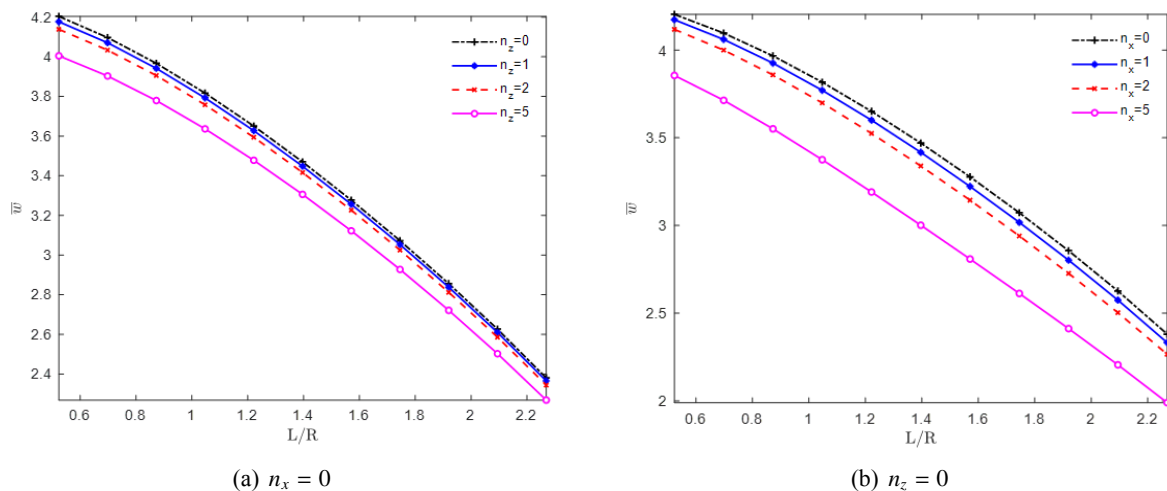
Bảng 6 trình bày kết quả tính tham số tần số của dầm cong với tỷ số $L/h = 20$ và góc mở $\phi = 120^\circ$, xét với nhiều giá trị khác nhau của hai chỉ số tỷ lệ thể tích n_x và n_z , cùng ba điều kiện biên: SS, CS và CC. Từ kết quả trong Bảng 6, có thể nhận thấy rằng khi giữ cố định n_x , tham số tần số $\bar{\omega}$ có xu hướng tăng khi n_z tăng. Tuy nhiên, khi giữ cố định n_z và thay đổi n_x , xu hướng này không đồng nhất giữa các điều kiện biên. Cụ thể, đối với điều kiện biên SS, tham số tần số $\bar{\omega}$ giảm khi n_x tăng, trong khi với điều kiện biên CC và CS, tham số tần số lại có xu hướng tăng. Hiện tượng này có thể là kết quả của sự kết hợp và bù trừ phức tạp giữa các hiệu ứng biên, hiệu ứng độ cong, cùng với ảnh hưởng của khối lượng và độ cứng. Đây là một kết quả đáng chú ý, khác với quy luật thông thường khi so sánh với các dầm có cơ tính biến thiên không đối xứng. Điều này cho thấy cần có những nghiên cứu sâu hơn để hiểu rõ hơn về cơ chế tác động và chứng minh sự cần thiết của việc tối ưu hóa kết cấu dầm 2DS-FGM trong từng điều kiện biên cụ thể.

Bảng 6. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích n_x và n_z đến tần số $\bar{\omega}$ của dầm cong 2DS-FGM ($L/h = 20, \phi = 120^\circ$)

| BCs | $n_z \setminus n_x$ | 0 | 1 | 2 | 5 | 10 |
|-----|---------------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| SS | 0 | 2,6263 | 2,5744 | 2,5029 | 2,2054 | 1,6090 |
| | 1 | 2,6096 | 2,5644 | 2,5021 | 2,2403 | 1,6814 |
| | 2 | 2,5858 | 2,5461 | 2,4915 | 2,2616 | 1,7426 |
| | 5 | 2,5025 | 2,4738 | 2,4354 | 2,2758 | 1,8681 |
| | 10 | 2,3839 | 2,3643 | 2,3398 | 2,2431 | 1,9625 |
| CS | 0 | 8,6971 | 8,5318 | 8,3831 | 7,7365 | 7,0356 |
| | 1 | 8,6341 | 8,4737 | 8,3461 | 7,9769 | 8,0630 |
| | 2 | 8,5436 | 8,3962 | 8,2795 | 7,7292 | 7,9273 |
| | 5 | 8,2499 | 8,1290 | 8,0505 | 7,9015 | 8,0269 |
| | 10 | 7,8486 | 7,7607 | 7,7185 | 7,7645 | 8,1055 |
| CC | 0 | 9,8099 | 9,7182 | 9,6651 | 9,7994 | 10,9280 |
| | 1 | 9,7252 | 9,6379 | 9,5936 | 9,7688 | 10,7993 |
| | 2 | 9,6181 | 9,5351 | 9,5004 | 9,7098 | 10,8061 |
| | 5 | 9,2758 | 9,2072 | 9,1952 | 9,4733 | 10,6324 |
| | 10 | 8,8247 | 8,7745 | 8,7844 | 9,1079 | 10,2649 |

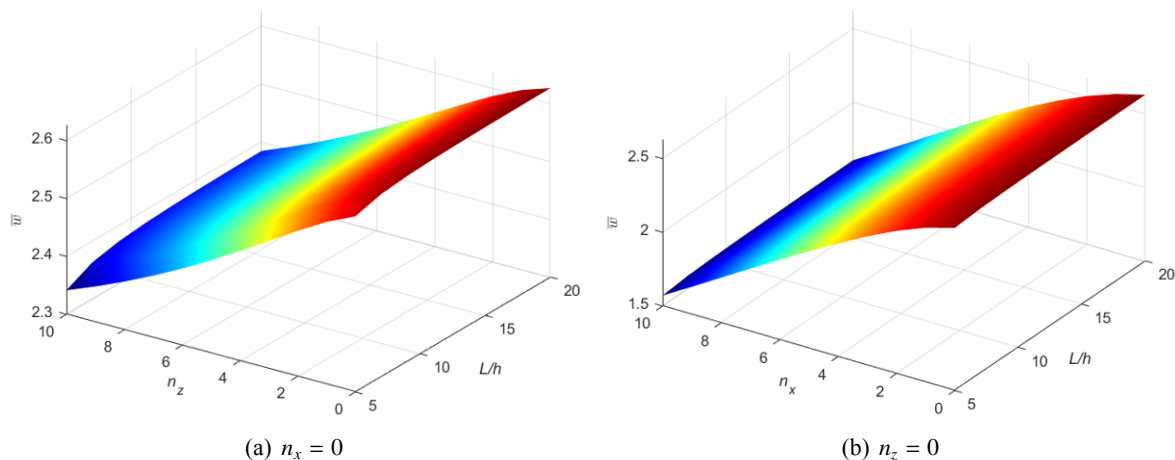
Ảnh hưởng của độ cong dầm đến tham số tần số của dầm SS được thể hiện qua đồ thị trên Hình 3. Từ đồ thị, có thể thấy rằng khi tỷ số giữa chiều dài dầm và bán kính cong L/R tăng lên, tham số tần số

của dầm giảm. Lưu ý rằng trong các trường hợp khảo sát, chiều dài dầm L được cố định ở 1 m. Mức giảm của tham số tần số khá đáng kể, cụ thể khi tỷ số L/R tăng từ 0,5 lên 2,3, tham số tần số giảm khoảng 42%. Hơn nữa, giá trị và mức giảm của tham số tần số khi tăng L/R gần như tương đồng giữa hai trường hợp cố định n_x hoặc n_z . Kết quả này cho thấy độ cong của dầm là một tham số quan trọng, ảnh hưởng đáng kể đến đặc tính dao động của dầm.



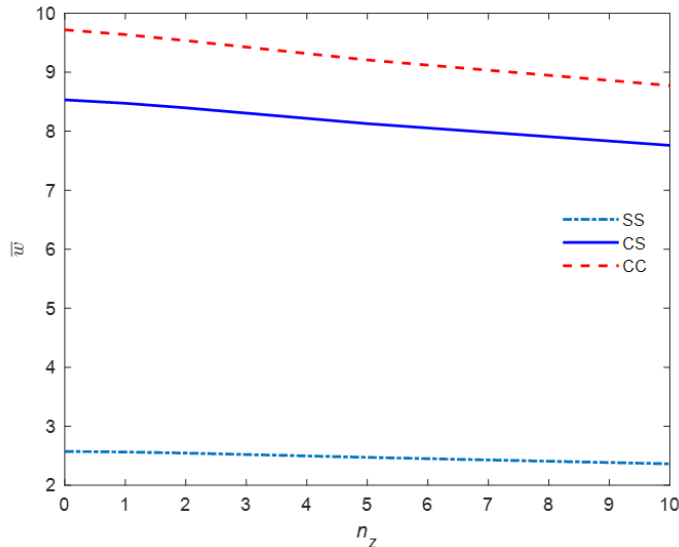
Hình 3. Ảnh hưởng của độ cong dầm (tỷ số L/R) đến tần số dao động $\bar{\omega}$ của dầm cong 2DS-FGM ($L/h = 20$, SS)

Đồ thị trong Hình 4 thể hiện sự biến đổi của tham số tần số $\bar{\omega}$ theo tỷ số L/h cùng với các chỉ số tỷ lệ thể tích n_x và n_z . Quan sát đồ thị, có thể thấy rằng tham số tần số của dầm tăng nhẹ khi L/h thay đổi trong khoảng giá trị từ 5 đến 15 và gần như không thay đổi khi tỷ số L/h vượt quá 15. Kết quả này có thể do hiệu ứng độ cứng và hiệu ứng khối lượng bù trừ cho nhau, vì tần số dao động phụ thuộc vào cả độ cứng và khối lượng. Khi chiều dài của dầm cố định, tỷ số L/h tăng nghĩa là chiều cao dầm giảm, điều này làm giảm cả độ cứng và khối lượng của dầm. Hiệu ứng giảm độ cứng làm giảm tần số dao động, trong khi hiệu ứng giảm khối lượng lại làm tăng tần số dao động.



Hình 4. Ảnh hưởng của tỷ số L/h đến tham số tần số dao động $\bar{\omega}$ của dầm cong 2DS-FGM (SS, $\phi = 120^\circ$)

Ảnh hưởng của điều kiện biên đến tham số tần số dao động $\bar{\omega}$ của dầm cong 2DS-FGM được trình bày trên Hình 5. Dầm khảo sát trong ví dụ này có tỷ số $L/h = 20$, góc mở $\phi = 120^\circ$, chỉ số tỷ lệ thể tích $n_x = 1$, trong khi chỉ số n_z thay đổi trong khoảng từ 0 đến 10. Kết quả cho thấy, dầm có điều kiện biên CC có tần số dao động cao nhất và giảm nhẹ khi n_z tăng. Trong khi đó, dầm CS có tần số trung bình và xu hướng giảm rõ rệt hơn so với CC. Ngược lại, dầm SS có giá trị $\bar{\omega}$ thấp nhất và gần như không thay đổi khi n_z tăng. Hiện tượng này là phù hợp với quy luật khi hệ có nhiều liên kết hơn sẽ cho độ cứng lớn hơn, dẫn đến tần số dao động sẽ lớn hơn. Điều này cho thấy vai trò quan trọng của điều kiện biên đối với các đặc tính dao động của dầm cong 2DS-FGM.



Hình 5. Ảnh hưởng của điều kiện biên đến tham số tần số dao động $\bar{\omega}$ của dầm cong 2DS-FGM ($L/h = 20, \phi = 120^\circ, n_x = 1$)

5. Kết luận

Dao động của dầm cong có cơ tính biến đổi theo hai phương đã được khảo sát và phân tích trong bài báo này. Để thực hiện điều này, hệ phương trình chuyển động của dầm cong 2DS-FGM với nhiều điều kiện biên khác nhau đã được thiết lập dựa trên lý thuyết dầm Timoshenko và được giải bằng phương pháp Ritz. Kết quả so sánh đã chứng minh tính chính xác và độ tin cậy của mô hình thiết lập. Từ kết quả khảo sát, có thể rút ra một số kết luận sau: (i) Tham số tần số phụ thuộc phức tạp vào chỉ số tỷ lệ thể tích và từng điều kiện biên cụ thể; (ii) Độ cong của dầm là một tham số quan trọng, ảnh hưởng lớn đến dao động của dầm; (iii) Tỷ lệ giữa chiều dài và chiều dày dầm có ảnh hưởng không đáng kể đến đặc tính dao động tự do của dầm.

Tài liệu tham khảo

- [1] Karaagac, C., Ozturk, H., Sabuncu, M. (2011). Crack effects on the in-plane static and dynamic stabilities of a curved beam with an edge crack. *Journal of Sound and Vibration*, 330(8):1718–1736.
- [2] Chen, C.-N. (2005). DQEM analysis of in-plane vibration of curved beam structures. *Advances in Engineering Software*, 36(6):412–424.
- [3] Toygar, M. E., Sayman, O., Kemiklioğlu, U., Öztürk, H., Kiral, Z., Maleki, F. K. (2016). Vibration and buckling analysis of a curved sandwich composite beam with FEM. *Research on Engineering Structures & Materials*, 2:49–59.
- [4] Lee, J. K., Jeong, S. (2016). Flexural and torsional free vibrations of horizontally curved beams on Pasternak foundations. *Applied Mathematical Modelling*, 40(3):2242–2256.

- [5] Viola, E., Artioli, E., Dilena, M. (2005). [Analytical and differential quadrature results for vibration analysis of damaged circular arches](#). *Journal of Sound and Vibration*, 288(4–5):887–906.
- [6] Tarnopolskaya, T., De Hoog, F. R., Fletcher, N. H. (1999). [Low-frequency mode transition in the free in-plane vibration of curved beams](#). *Journal of Sound and Vibration*, 228(1):69–90.
- [7] Torabi, K., Afshari, H., Haji Aboutalebi, F. (2014). [A DQEM for transverse vibration analysis of multiple cracked non-uniform Timoshenko beams with general boundary conditions](#). *Computers & Mathematics with Applications*, 67(3):527–541.
- [8] Huynh, T.-A., Luu, A.-T., Lee, J. (2017). [Bending, buckling and free vibration analyses of functionally graded curved beams with variable curvatures using isogeometric approach](#). *Meccanica*, 52(11–12): 2527–2546.
- [9] Mochida, Y., Ilanko, S. (2016). [Condensation of independent variables in free vibration analysis of curved beams](#). *Advances in aircraft and spacecraft science*, 3(1):045.
- [10] Dey, P., Talukdar, S. (2016). [Modal characteristics of cracked thin walled unsymmetrical cross-sectional steel beams curved in plan](#). *Thin-Walled Structures*, 108:75–92.
- [11] Tran, Q. H., Duong, H. T., Tran, T. M. (2018). [Free vibration analysis of functionally graded doubly curved shell panels resting on elastic foundation in thermal environment](#). *International Journal of Advanced Structural Engineering*, 10(3):275–283.
- [12] Tham, V. V., Tran, H. Q., Tu, T. M. (2021). [Vibration characteristics of piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced composite doubly-curved shells](#). *Applied Mathematics and Mechanics*, 42 (6):819–840.
- [13] Jiao, Z., Wang, G., Xu, R., Chen, W., Reddy, J. (2024). [Free vibration and buckling analysis of functionally graded beams using the DMCDM](#). *Composite Structures*, 332:117905.
- [14] Alimoradzadeh, M., Salehi, M., Esfarjani, S. M. (2019). [Nonlinear dynamic response of an axially functionally graded \(AFG\) beam resting on nonlinear elastic foundation subjected to moving load](#). *Nonlinear Engineering*, 8(1):250–260.
- [15] Noori, A. R., Aslan, T. A., Temel, B. (2018). [An efficient approach for in-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with nonuniform cross section](#). *Composite Structures*, 200: 701–710.
- [16] Tu, T. M., Quoc, T. H., Long, N. V. (2017). [Bending analysis of functionally graded plates using new eight-unknown higher order shear deformation theory](#). *Structural Engineering and Mechanics*, 62(3): 311–324.
- [17] Thai, H.-T., Vo, T. P. (2012). [Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1): 57–66.
- [18] Thinh, T. I., Tu, T. M., Quoc, T. H., Long, N. V. (2016). [Vibration and buckling analysis of functionally graded plates using new eight-unknown higher order shear deformation theory](#). *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(3):456–477.
- [19] Lanc, D., Vo, T. P., Turkalj, G., Lee, J. (2015). [Buckling analysis of thin-walled functionally graded sandwich box beams](#). *Thin-Walled Structures*, 86:148–156.
- [20] Karamanli, A. (2017). [Elastostatic analysis of two-directional functionally graded beams using various beam theories and Symmetric Smoothed Particle Hydrodynamics method](#). *Composite Structures*, 160: 653–669.
- [21] Pydah, A., Sabale, A. (2017). [Static analysis of bi-directional functionally graded curved beams](#). *Composite Structures*, 160:867–876.
- [22] Huang, Y., Ouyang, Z.-Y. (2020). [Exact solution for bending analysis of two-directional functionally graded Timoshenko beams](#). *Archive of Applied Mechanics*, 90(5):1005–1023.
- [23] Deng, H., Cheng, W. (2016). [Dynamic characteristics analysis of bi-directional functionally graded Timoshenko beams](#). *Composite Structures*, 141:253–263.
- [24] Nguyen, V.-C., Tran, H.-Q., Pham, V.-V. (2023). [Nonlinear static analysis of bi-directional functionally graded sandwich plates in thermal environments by a higher-order finite element model](#). *Thin-Walled Structures*, 188:110819.

- [25] Abdelrahman, A. A., Ashry, M., Alshorbagy, A. E., Abdallah, W. S. (2021). [On the mechanical behavior of two directional symmetrical functionally graded beams under moving load](#). *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 17(3):563–586.
- [26] Elishakoff, I., Pentaras, D., Gentilini, C. (2015). *Mechanics of functionally graded material structures*. World scientific.
- [27] Ganapathi, M., Polit, O. (2017). [Dynamic characteristics of curved nanobeams using nonlocal higher-order curved beam theory](#). *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 91:190–202.
- [28] Şimşek, M. (2010). [Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories](#). *Nuclear Engineering and Design*, 240(4):697–705.
- [29] Chen, W., Lü, C., Bian, Z. (2004). [A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation](#). *Applied Mathematical Modelling*, 28(10):877–890.
- [30] Nguyen, V.-L., Tran, M.-T., Chu, T.-B., Nguyen, T.-A., Nguyen, V.-L. (2024). [Nonlinear dynamic response of functionally graded porous beams under a moving mass using Reddy's beam theory](#). *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 48(3):1205–1221.