



PHÂN TÍCH SỰ THAY ĐỔI TẦN SỐ DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA KẾT CẤU HỆ THANH PHẪNG KHI XÉT ĐẾN LIÊN KẾT NÚT ĐÀN HỒI

Trần Văn Liên¹, Trần Tuấn Sơn²

Tóm tắt: Trong các mô hình tính toán kết cấu hệ thanh hiện nay, liên kết nút giữa các thanh thường giả thiết là cứng tuyệt đối hay khớp lý tưởng. Việc xét đến liên kết nút đàn hồi còn ít được áp dụng trong tính toán thực tiễn mặc dù các liên kết đàn hồi thường xuyên xuất hiện trong kết cấu công trình thực. Bài báo trình bày cách thiết lập ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng nút quy đổi cho phần tử thanh có liên kết đàn hồi khi xem thanh và liên kết nút đàn hồi tại hai đầu là một phần tử hữu hạn. Từ đó, các tác giả đã nghiên cứu sự thay đổi của tần số dao động riêng của hệ kết cấu thanh phẳng có xét đến ảnh hưởng của liên kết nút đàn hồi bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Các kết quả nhận được có thể áp dụng vào tính toán thực tiễn.

Từ khóa: Tần số riêng; liên kết nút đàn hồi; hệ thanh phẳng; phần tử hữu hạn.

Summary: The connections of plane frames are currently supposed as rigid (or fixed) and pinned, but it actually is semi-rigid (or flexibly). This present article deals with setting the stiffness matrix and the node load vector of the semi-rigid connection beam elements based on the finite element method. Thence, analysis 6 first natural frequencies of semi-rigid connected plan frames are carried out. The theoretical development is illustrated and validated by numerical examples.

Keywords: Natural frequency; semi-rigid connection; plane frame; finite element method.

Nhận ngày 17/02/2016, chỉnh sửa ngày 01/3/2016, chấp nhận đăng 15/3/2016



1. Mở đầu

Trong các mô hình tính toán kết cấu hệ thanh truyền thống, liên kết giữa dầm và cột thường được giả thiết là nút cứng tuyệt đối hoặc khớp lý tưởng. Trong thực tế, các liên kết này vẫn có độ đàn hồi nhất định do biến dạng của các phần tử liên kết, dẫn đến sự phân phối lại nội lực trong kết cấu. Do đó, việc mô hình liên kết nút là đàn hồi sẽ cho mô hình tính toán sát với thực tế, có hiệu quả kinh tế cao hơn so với các mô hình truyền thống.

Mặc dù liên kết đàn hồi được đưa vào tiêu chuẩn của một số nước, nhưng vẫn chưa có quy định kỹ thuật về thiết kế chi tiết, cũng như phương pháp tính toán cụ thể để giúp kỹ sư thiết kế có thể ứng dụng thực tế xây dựng. Theo các tiêu chuẩn thiết kế kết cấu của Việt Nam hiện hành, liên kết đàn hồi vẫn chưa được đề cập, kể cả việc phân loại cũng như phương pháp tính.

Những nghiên cứu khởi đầu về xác định độ đàn hồi của liên kết được tiến hành tại Ủy ban nghiên cứu kết cấu thép của Anh từ năm 1934. Liên kết đàn hồi đã được ứng dụng rộng rãi khi thiết kế kết cấu dầm sàn bê tông liên hợp [1] cũng như cho kết cấu nhịp cầu [2]. Các vòm nhịp lớn có liên kết đàn hồi cũng đã được thiết kế và xây dựng [3]. Ngoài ra, các nghiên cứu thực nghiệm của một số tác giả như [4] đều nhận xét rằng liên kết đàn hồi có khả năng chịu tải động đất tốt hơn các dạng liên kết khác.

Các nghiên cứu hiện nay về liên kết nút đàn hồi tập trung vào hai hướng chủ yếu là xác định hệ số đàn hồi cho các loại liên kết và xây dựng các phương pháp tính toán độ bền, ổn định và dao động cho kết cấu hệ thanh có liên kết đàn hồi.

¹PGS.TS, Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp. Trường Đại học Xây dựng. Email: lientv@hotmail.com.

²ThS, Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp. Trường Đại học Xây dựng.

Nhiều mô hình nghiên cứu liên kết đàn hồi đã được xử lý trên cơ sở phân tích kết quả thí nghiệm, trong đó hai mô hình chính thường được sử dụng là mô hình Frye-Morris [5] và mô hình Kishi-Chen [6].

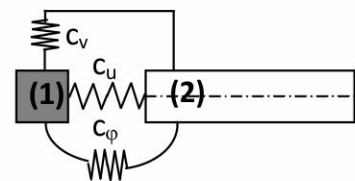
Ở Việt Nam, tác giả Nguyễn Xuân Hùng [7] đã xây dựng ma trận độ cứng động lực và véc tơ tải trọng quy về nút của phần tử thanh thẳng có liên kết đàn hồi tại nút. Tác giả Nguyễn Hồng Sơn [8] đã xây dựng siêu phần tử thanh cho bài toán phân tích kết cấu thép có kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt trong thanh. Tác giả Vũ Quốc Anh [9], đã xây dựng ma trận độ cứng, ma trận hình học và ma trận khối lượng phần tử thanh, mô hình liên kết nửa cứng một lò xo có đặc trưng cơ học là đàn hồi tuyến tính, kể đến vùng cứng giao nhau giữa dầm và cột, không xét đến biến dạng trượt trong thanh. Các tác giả Trịnh Anh Hào, Hoàng Trọng Khuyến [10], đã xây dựng bài toán kết cấu khung phẳng có liên kết đàn hồi trong bài toán tĩnh. Tác giả Vũ Thị Thu Thủy [11], nghiên cứu về các mô hình liên kết nửa cứng, bỏ qua độ cứng của vùng nút và ảnh hưởng của biến dạng trượt trong thanh. Các tác giả Đỗ Minh Đức, Lê Khánh Toàn [12] đề xuất phân tích khung có nút nửa cứng xem nút nửa cứng là một phần tử. Cách phân tích này đơn giản trong việc xây dựng cơ sở lý thuyết và dễ áp dụng hơn cách xem cả thanh cùng với liên kết đàn hồi ở hai đầu là một phần tử thường sử dụng.

Bài báo này trình bày cách thiết lập ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng nút quy đổi cho phần tử thanh có liên kết đàn hồi khi xem thanh và liên kết nút đàn hồi tại hai đầu là một phần tử hữu hạn. Từ đó nghiên cứu sự thay đổi tần số dao động riêng cho kết cấu hệ thanh phẳng có kể đến liên kết đàn hồi và so sánh kết quả tính tần số dao động riêng cho hệ thanh phẳng có liên kết nút tuyệt đối cứng để rút ra các kết luận cần thiết.



2. Mô hình tính toán

Mô hình kết cấu hệ thanh tổng quát bao gồm các thanh liên kết với nhau ở các nút, trong đó liên kết giữa thanh và nút có thể là khớp, ngàm cứng,... hay là các liên kết đàn hồi. Đối với kết cấu hệ thanh phẳng trên Hình 1, liên kết giữa nút (1) và thanh (2) là liên kết đàn hồi với 3 lò xo đàn hồi có độ cứng c_u, c_v, c_φ . Khi độ cứng của các lò xo có giá trị bằng 0 hay ∞ , ta nhận được liên kết ngàm cứng ($c_u=c_v=c_\varphi=\infty$), liên kết khớp ($c_u=c_v=\infty, c_\varphi=0$), liên kết ngàm trượt ($c_u=c_\varphi=\infty, c_v=0$),...

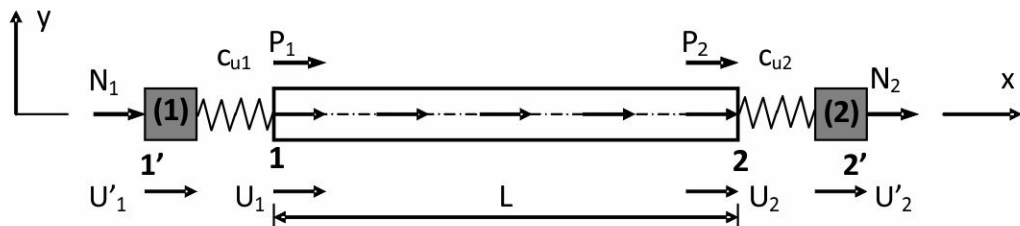


Hình 1. Mô hình liên kết

Đồng thời, khi phân tích động lực học kết cấu hệ thanh có liên kết đàn hồi tại 2 đầu thanh, người ta thường sử dụng các ma trận khối lượng và ma trận cứng của phần tử thanh liên kết cứng tại 2 đầu. Sự khác nhau chủ yếu là do sự thay đổi ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng quy đổi về nút của phần tử.

2.1 Ma trận độ cứng của thanh thẳng chịu kéo nén có liên kết đàn hồi

Xét phần tử thanh thẳng có tiết diện không đổi A , chiều dài L , mô đun đàn hồi E và các liên kết đàn hồi ở 2 đầu thanh như Hình 2.



Hình 2. Mô hình liên kết lò xo với thanh chịu kéo, nén

Ký hiệu c_{u1}, c_{u2} là độ cứng của liên kết đàn hồi; U'_1, U'_2 là chuyển vị tại các tiết diện 1' và 2'; U_1, U_2 là chuyển vị tại tiết diện 1, 2; N_1, N_2 tương ứng với lực tác dụng tại các tiết diện 1' và 2' cũng chính bằng lực tác dụng lên tiết diện 1, 2 tương ứng.

Quan hệ giữa các chuyển vị U_1 và U'_1, U_2 và U'_2 được biểu diễn qua phương trình sau:

$$\begin{bmatrix} U'_1 \\ U'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1/c_{u1} & N_2/c_{u2} \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

hay là:

$$U = U' - U^* \quad (2)$$

trong đó: $U = (U_1 \ U_2)^T$; $U' = (U'_1 \ U'_2)^T$; $U^* = (N_1/c_{u1} \ N_2/c_{u2})^T$; $N = (N_1 \ N_2)^T$. Đối với phần tử thanh đàn hồi 1-2, quan hệ giữa lực nút N , tải trọng quy về nút P và ma trận độ cứng K_0 của phần tử dạng:

$$K_0 U = P + N \quad (3)$$

trong đó:

$$K_0 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Thay (2) vào (3) ta có: $K_0 U' - K_0 U^* = P + N$ hay là: $\tilde{K} N = K_0 U' - P$ trong đó:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_{11}^0}{c_{u1}} & \frac{k_{12}^0}{c_{u2}} \\ \frac{k_{21}^0}{c_{u1}} & \frac{k_{22}^0}{c_{u2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EA}{c_{u1}L} & -\frac{EA}{c_{u2}L} \\ -\frac{EA}{c_{u1}L} & \frac{EA}{c_{u2}L} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Vì $\tilde{K}$ khả nghịch nên

$$N = \tilde{K}^{-1} K_0 U' - \tilde{K}^{-1} P \quad (6)$$

Hay dưới dạng: $KU' = N + P^{td}$ với ma trận độ cứng K có dạng:

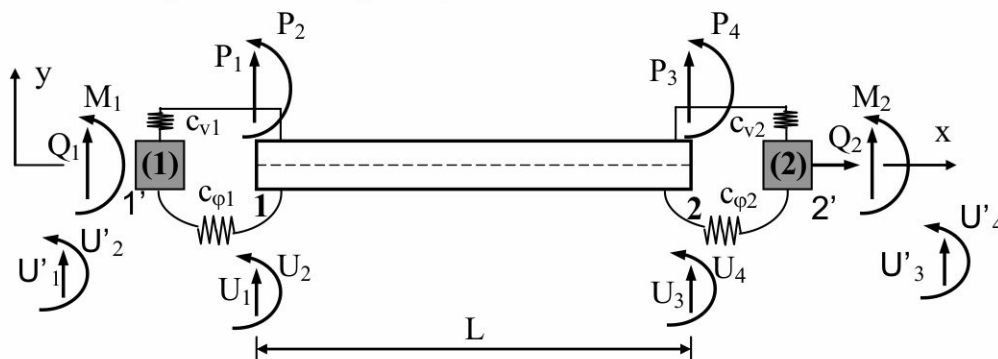
$$K = \tilde{K}^{-1} K_0 = \frac{c_{u0}}{1 + \frac{c_{u0}}{c_{u1}} + \frac{c_{u0}}{c_{u2}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; c_{u0} = \frac{EA}{L} \quad (7)$$

và véc tơ lực quy về nút P^{td} của phần tử thanh chịu uốn có liên kết đàn hồi ở đầu thanh là

$$P^{td} = \tilde{K}^{-1} P \quad (8)$$

2.2 Ma trận độ cứng của thanh thẳng chịu uốn có liên kết đàn hồi

Xét thanh thẳng có tiết diện không đổi chịu uốn với các liên kết đàn hồi như Hình 3.



Hình 3. Mô hình liên kết lò xo với thanh chịu uốn

Ký hiệu $c_{v1}, c_{v2}, c_{\phi 1}, c_{\phi 2}$ là độ cứng của liên kết đàn hồi quy ước; U'_1, U'_2, U'_3, U'_4 tương ứng với chuyển vị tại tiết diện 1' và 2', U_1, U_2, U_3, U_4 tương ứng với chuyển vị tại các tiết diện 1 và 2; M_1, Q_1, M_2, Q_2 tương ứng với các lực tác dụng tại tiết diện 1' và 2'. Tại trạng thái cân bằng lực tác dụng lên tiết diện 1' và 2' cũng bằng lực tác dụng lên các tiết diện 1 và 2 tương ứng.

Quan hệ giữa các chuyển vị nút U và U' :

$$U_1 = U'_1 - \frac{Q_1}{c_{v1}}; U_2 = U'_2 - \frac{M_1}{c_{\phi 1}}; U_3 = U'_3 - \frac{Q_2}{c_{v2}}; U_4 = U'_4 - \frac{M_2}{c_{\phi 2}} \quad (9)$$

Sử dụng ký hiệu $U = (U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4)^T$; $U' = (U'_1 \ U'_2 \ U'_3 \ U'_4)^T$; $U^* = \begin{bmatrix} \frac{Q_1}{c_{v1}} & \frac{M_1}{c_{\phi 1}} & \frac{Q_2}{c_{v2}} & \frac{M_2}{c_{\phi 2}} \end{bmatrix}$ ta nhận được quan hệ tương tự (2). Đồng thời quan hệ giữa lực nút R tải trọng quy về nút P và ma trận độ cứng K_0 của phần tử có dạng $K_0 U = P + R$ với

$$K_0 = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Thực hiện biến đổi tương tự như khi phần tử thanh chịu kéo nén ta được

$$\tilde{K}R = K_0U' - P \quad (11)$$

với

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12/c_{v1} & 6L/c_{\varphi1} & -12/c_{v2} & 6L/c_{\varphi2} \\ 6L/c_{v1} & 4L^2/c_{\varphi1} & -6L/c_{v2} & 2L^2/c_{\varphi2} \\ -12/c_{v1} & -6L/c_{\varphi1} & 12/c_{v2} & -6L/c_{\varphi2} \\ 6L/c_{v1} & 2L^2/c_{\varphi1} & -6L/c_{v2} & 4L^2/c_{\varphi2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Vì $\tilde{K}$ khả nghịch nên (11) có thể viết thành $R = \tilde{K}^{-1}K_0U' - \tilde{K}^{-1}P$ hay: $KU' = R + P^{td}$ với ma trận độ cứng K có dạng $K = \tilde{K}^{-1}K_0$ và véc tơ lực quy về nút P^{td} của phần tử thanh chịu uốn có liên kết đàn hồi ở đầu thanh có dạng (8) là $P^{td} = \tilde{K}^{-1}P$.

2.3 Phương trình xác định tần số dao động riêng

Tiến hành ghép nối các phần tử để có được ma trận độ cứng và ma trận khối lượng tổng thể của kết cấu theo các thủ tục thông thường của phương pháp phần tử hữu hạn. Sau đó, áp đặt điều kiện biên của bài toán và tiến hành giải phương trình tần số

$$\det [K - \omega^2 M] = 0 \quad (13)$$

Phương trình (13) có n nghiệm thực tương ứng với n tần số dao động riêng của kết cấu.

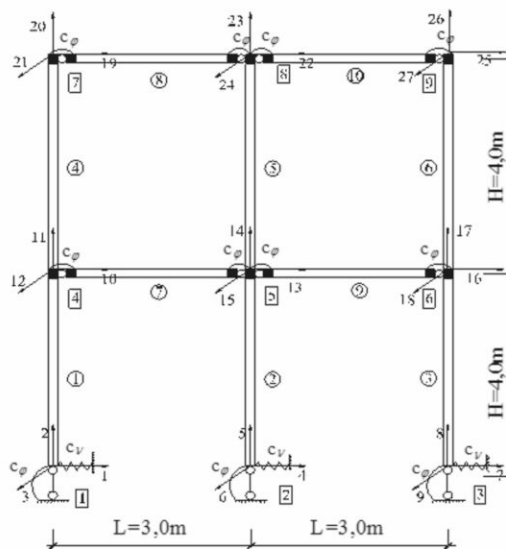


3. Sự thay đổi tần số dao động riêng khi xét đến ảnh hưởng của liên kết nút

3.1 Kiểm tra độ tin cậy của chương trình

Xét khung phẳng 3 tầng, 2 nhịp (Hình 4) với chiều dài mỗi nhịp là $L=3,0m$, chiều cao mỗi tầng là $H=4,0m$ và các tham số vật liệu: $E=2,1 \times 10^8 kN/m^2$, $\rho=7850 kg/m^3$. Hệ số Poisson $\mu=0,2$. Các thanh 1÷6 có diện tích $A_v=0,1030.10^{-2} m^2$, mô men quán tính $I_v=0,0171.10^{-4} m^4$. Các thanh 7÷10 có diện tích $A_n=0,0764.10^{-2} m^2$, mô men quán tính $I_n=0,00801.10^{-4} m^4$. Khung được chia thành 10 phần tử với số hiệu nút và phần tử như trên Hình 4.

Bảng 1 là so sánh kết quả tính 6 tần số dao động riêng đầu tiên của khung có liên kết đàn hồi với độ cứng: $c_\varphi = 5.000 kNm/rad$, $c_v = 40.000 kN/m$ theo chương trình lập và kết quả tính bằng SAP2000 khi xem nút nửa cứng là một phần tử.



Hình 4. Sơ đồ kết cấu khung

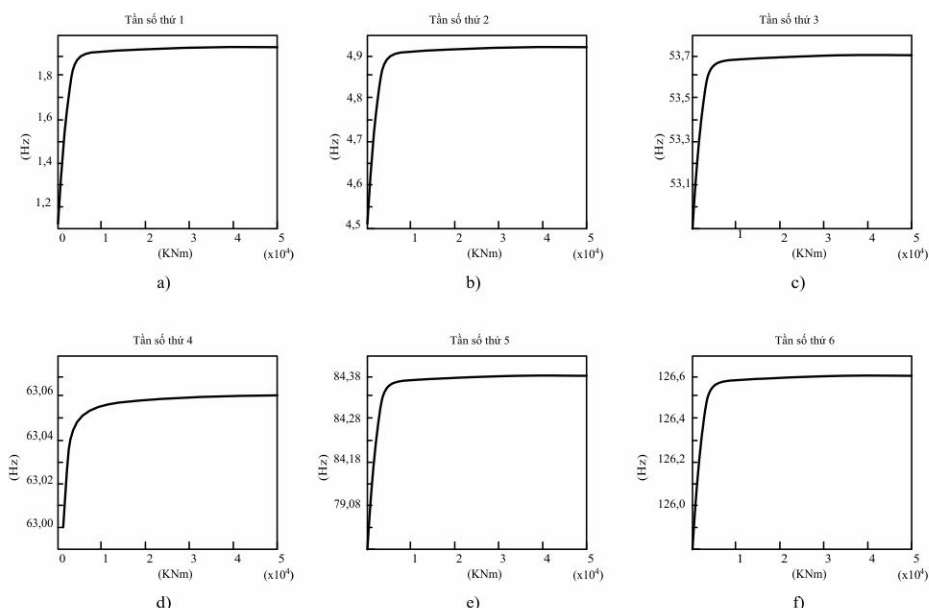
Bảng 1. Kết quả tính tần số dao động riêng của khung có liên kết đàn hồi

Stt	Tần số riêng	Tần số riêng tính toán (Theo chương trình)	Tần số riêng tính toán (Theo SAP2000)	Sai số
1	Tần số riêng thứ nhất	1,881	1,878	0,16%
2	Tần số riêng thứ hai	4,930	5,014	1,68%
3	Tần số riêng thứ ba	49,469	50,667	2,36%
4	Tần số riêng thứ tư	62,054	60,921	1,86%
5	Tần số riêng thứ năm	66,765	67,944	1,74%
6	Tần số riêng thứ sáu	119,510	116,210	2,84%

3.2 Khảo sát sự thay đổi của tần số dao động riêng theo hệ số đàn hồi

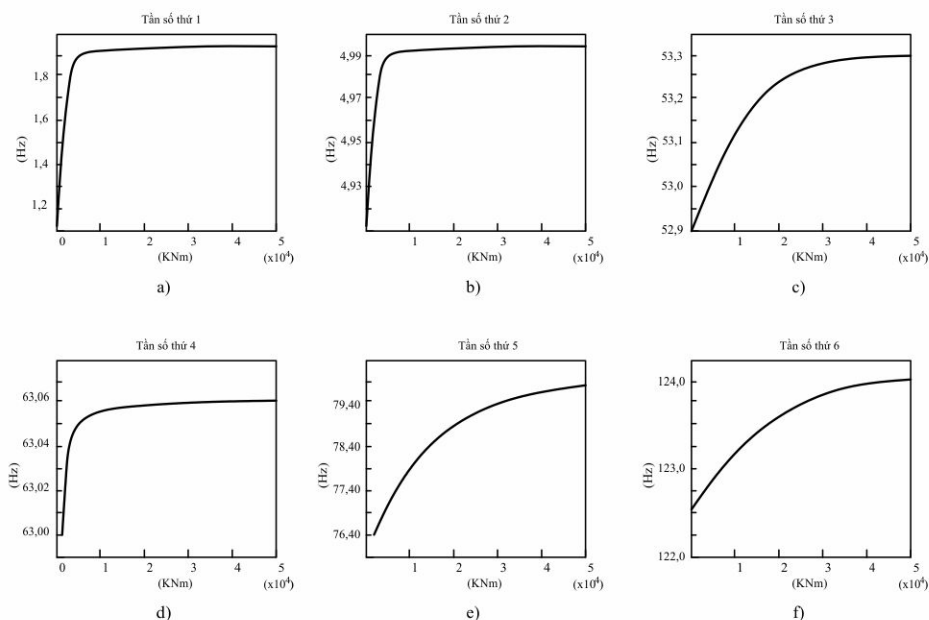
Trong các nghiên cứu dưới đây, ta sẽ nghiên cứu sự thay đổi của tần số riêng theo hệ số đàn hồi liên kết c_p : 500 – 50.000kNm/rad với số gia là 10kNm/rad:

a) Trường hợp 1: nút 1, 2, 3 là liên kết đàn hồi, các nút còn lại là tuyệt đối cứng. Biểu đồ sự thay đổi tần số dao động riêng thể hiện trên Hình 5.



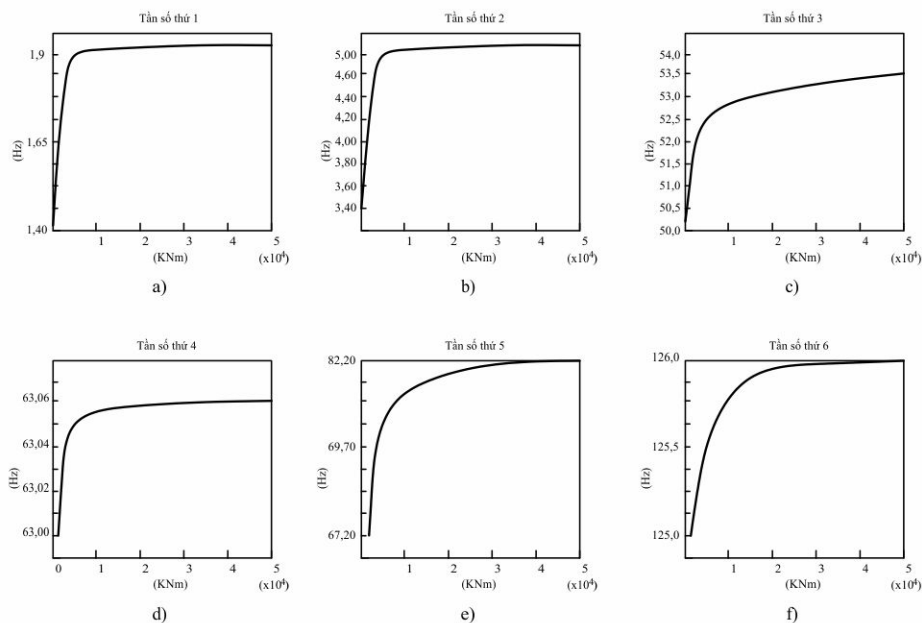
Hình 5. Biểu đồ biến thiên tần số khi hệ số c_p nút 1, 2, 3 thay đổi

b) Trường hợp 2: nút 4, 5, 6 là liên kết đàn hồi, các nút còn lại là tuyệt đối cứng. Biểu đồ sự thay đổi tần số dao động riêng thể hiện trên Hình 6.



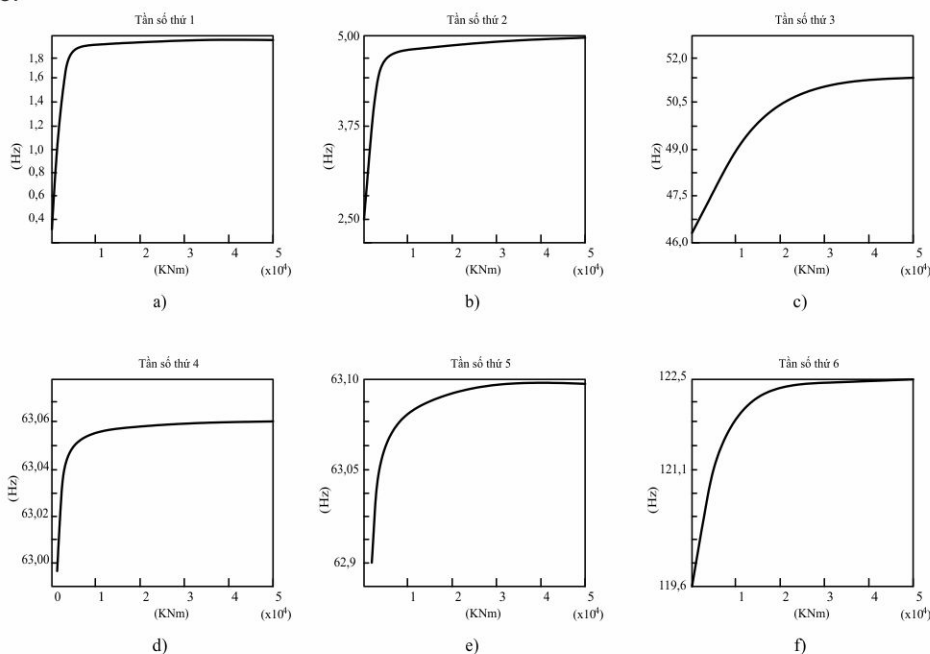
Hình 6. Biểu đồ biến thiên tần số khi hệ số c_p nút 4, 5, 6 thay đổi

c) Trường hợp 3: nút 7, 8, 9 là liên kết đàn hồi, các nút còn lại là tuyệt đối cứng. Biểu đồ sự thay đổi tần số dao động riêng thể hiện trên Hình 7.



Hình 7. Biểu đồ tần số của khung khi hệ số c_φ nút 7, 8, 9 thay đổi

d) Trường hợp 4: tất cả các nút là liên kết đàn hồi. Biểu đồ sự thay đổi tần số dao động riêng thể hiện trên Hình 8.



Hình 8. Biểu đồ biến thiên tần số khi hệ số c_φ các nút thay đổi

Ta có một số nhận xét:

- Liên kết đàn hồi tại các đầu thanh ảnh hưởng đáng kể đến tần số dao động trong kết cấu hệ thanh. Khi hệ số đàn hồi c_φ của liên kết tăng dần thì tần số dao động có xu hướng tiến tới khung cứng tuyệt đối.
- Liên kết đàn hồi xuất hiện ở tầng 2 làm cho hệ kết cấu có tần số dao động lớn hơn so với các tầng 1 và 3.
- Từ các Hình 5-8, ta nhận thấy khi giá trị c_φ biến thiên từ $0 < c_\varphi < 5000 \text{ kNm/rad}$ thì tần số dao động thứ nhất và thứ hai biến thiên khá nhanh, độ cong của đồ thị chỉ rõ nét hơn với giá trị $c_\varphi = 5.000 + 8000 \text{ kNm/rad}$. Với giá trị $c_\varphi > 15000 \text{ kNm/rad}$ thì hai tần số dao động đầu tiên này tăng lên khá nhỏ, gần như không đáng kể.

- Đối với giá trị tần số dao động thứ 4 và 5 ứng với giá trị $c_p = 7500 \div 10000 \text{ kNm/rad}$ thì độ cong đồ thị xuất hiện rõ nét. Với giá trị $c_p > 15000 \text{ kNm/rad}$ thì tần số dao động thứ 4 và 5 này cũng tăng lên khá nhỏ, gần như không đáng kể.

- Từ các Hình 5-8, ta nhận thấy khi giá trị c_p biến thiên thì giá trị tần số dạng dao động thứ 6 biến thiên khá nhỏ, gần như không đáng kể.

- Trên Hình 8, về cơ bản khi liên kết thanh với nút là đàn hồi với độ cứng lò xo $k \leq EI/L$, cụ thể $k = 360 \text{ kNm}$ tần số dao động của hệ kết cấu thay đổi đáng kể và giá trị tăng khá nhanh. Khi $k \geq 20EI/L$, cụ thể $k \geq 7200 \text{ kNm}$, tần số dao động trong kết cấu khung so với trường hợp nút cứng tuyệt đối là tương đối gần nhau. Do vậy, trong tính toán kết cấu nên cân nhắc đến ảnh hưởng của nút đàn hồi có độ cứng lò xo cũng nằm trong khoảng $20EI/L \geq k \geq EI/L$.



4. Kết luận

- Đã xây dựng ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng nút quy đổi cho phần tử thanh thẳng có liên kết nút đàn hồi bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Lập phương trình xác định tần số dao động riêng cho kết cấu hệ thanh phẳng có liên kết đàn hồi.

- Liên kết đàn hồi xuất hiện trong nút khung ảnh hưởng đến tần số dao động của hệ. Kết quả phân tích cho thấy, tần số dao động riêng khi xét đến độ cứng của nút có xu hướng tăng khi độ cứng của nút tăng.

- Trong tính toán kết cấu chỉ nên cân nhắc đến ảnh hưởng của nút đàn hồi có độ cứng lò xo nằm trong khoảng $20EI/L \geq k \geq EI/L$.

Tài liệu tham khảo

1. Liew R., Teo T.H., Shanmugam N.E., Yu C.H. (2000), "Testing of steel - concrete composite connections and appraisal of results", *Journal of Construction Steel Research*, 56, 117-150.
2. Astance A. (1994), "Seismic behavior and design of steel semi-grid structures", *Proceedings of first international workshop and seminar on of steel structures in seismic areas*, Romania, 546-556.
3. Kato S., Mutoh I., Shomura M. (1999), "Collapse of imperfect reticulated of semi-grid connections with angles", *Advances in steel structures, Proceedings of the second international conference*, Pergamon Press, 135-320.
4. Elnashai. A.S., Elghazouli. A.Y., Denseh-Ashtiani F.A. (1998), "Respond of semigrid steel frames to cyclic and earthquake load", *Journal of Structures Engineering ASCE*, 124, 857-889.
5. Frye M.J., Morris G.A. (1975), "Analysis of Flexibly Connected Steel Frames", *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol. 2, 280-291.
6. Kishi N., Chen W.F. (1990), "Moment - rotation relations of semi-grid connections with angles", *Journal of Structures Engineering ASCE*, 116, 1813-1834.
7. Nguyễn Xuân Hùng (2002), *Tính toán chính xác kết cấu trên máy vi tính, Chương trình ADS 2001*, NXB Khoa học Kỹ thuật.
8. Nguyễn Hồng Sơn (2007), *Phân tích kết cấu khung thép phẳng có liên kết nửa cứng phi tuyến*, Luận án Tiến sĩ Kỹ thuật, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội.
9. Vũ Quốc Anh (2013), *Tính toán và thiết kế khung thép liên kết đàn hồi*, NXB Xây dựng.
10. Trịnh Anh Hào, Hoàng Trọng Khuyến (2010), "Phân tích kết cấu khung phẳng có liên kết đàn hồi tại nút", *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, số 07/2010, Trường Đại học Xây dựng.
11. Vũ Thị Thu Thủy (1998), *Phân tích giới hạn khung phẳng có liên kết mềm*, Luận văn Thạc sĩ Kỹ thuật, Trường Đại học Thủy lợi.
12. Đỗ Minh Đức, Lê Khánh Toàn (2015), "Một giải pháp phân tích khung có nút nửa cứng xem nút nửa cứng là một phần tử", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ*, Đại học Đà Nẵng, số 3(88), 2015.