# MỘT PHƯƠNG PHÁP TÍNH MẤT ỔN ĐỊNH CỦA VÒM TRÒN

*Tô Văn Tấn [1], Trần Viết Kiên [2]*

***Tóm tắt**: Bài báo đề cập đến một phương pháp tính lực tới hạn làm mất ổn định trong mặt phẳng của vòm tròn chịu lực hướng tâm phân bố đều dọc trục, trong và ngoài giới hạn đàn hồi. Các công thức nhận được có dạng tương tự về toán học với công thức tính lực tới hạn của thanh thẳng chịu nén đúng tâm thông qua việc sử dụng hệ số liên kết biến thể $\tilde{\mu}$ và độ mảnh biến thể $\tilde{\lambda}$. Đồng thời xác định giới hạn áp dụng công thức tính lực tới hạn của các vòm tròn khác nhau (đầu có khớp, ngàm,…).*

***Từ khóa**: Vòm tròn; lực tới hạn; mất ổn định.*

***Summary**: This paper is concerned with a method to calculate critical force on the in-plane buckling of circular arches. These arches are subjected to radical uniform load distributed around the arch axis, in and beyond the elastic limit. The obtained formulas have the mathematical analogy with the formulas of compressed bar by longitudinal force by using modified end condition factor $\tilde{\mu}$ and modified slenderness factor $\tilde{\lambda}$. In this case, the limit of applicability of critical - force formula for different circular arches (pin - ended, fixed,…) is established.*

***Keywords**: Circular arch; critical force; buckling.*

*Nhận ngày 19/02/2016, chỉnh sửa ngày 03/3/2016, chấp nhận đăng 15/3/2016*

## 1. Mở đầu

Bài toán ổn định đàn hồi của vòm tròn có tiết diện không đổi được trình bày trong [1, 3]. Trong [2, 3] đã cho kết quả gần đúng của lực tới hạn của vòm tròn có tiết diện thay đổi. Trong [4] đã dùng chương trình phân tích hữu hạn để phân tích ổn định đàn dẻo của vòm tròn. Sau đó Pi và Trahair [5] đã nghiên cứu mất ổn định đàn dẻo của vòm tròn hai khớp. Sau đó, Pi và Bradford [6] đã nghiên cứu mất ổn định đàn dẻo của vòm tròn không khớp.

Với vòm tròn chịu lực phân bố đều hướng tâm (hoặc loại vòm chịu lực mà đường cong áp lực trùng với trục vòm) thì trong vòm không phát sinh momen uốn và lực cắt, mà chỉ có lực dọc. Vì vậy trong vòm chỉ chịu ứng suất nén khi tải trọng tác dụng. Điều này cho phép tận dụng sự tương tự với bài toán ổn định của thanh thẳng chịu nén đúng tâm để tính ứng suất tới hạn.

## 2. Cơ sở lý thuyết

### *2.1 Vòm tròn chịu lực phân bố đều hướng tâm*

Trong mục này các tác giả đã đưa những công thức tính lực tới hạn cho các vòm tròn khác nhau về dạng tương tự công thức Ơle tính ổn định thanh thẳng và xác định giới hạn áp dụng chúng trong miền đàn hồi. Ngoài ra cũng đề xuất phương pháp tính ổn định của vòm tròn ngoài miền đàn hồi.

Trong [1, 3] đã thu nhận công thức tính lực tới hạn cho các vòm tròn có liên kết khác nhau:

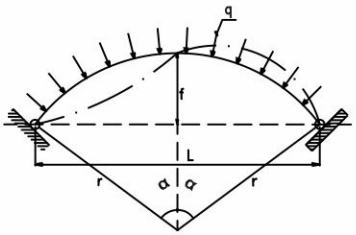
[1] *PGS.TS, Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp. Trường Đại học Xây dựng.*
[2] *ThS, Công ty Cổ phần Tư vấn đầu tư phát triển và xây dựng Thikeco. E-mail: trankientkc@gmail.com.*

- Vòm hai khớp (Hình 1a) $N_{th} = \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1\right) \frac{EI}{r^2}$, trong đó r là bán kính vòm và $2\alpha$ là góc mở của vòm

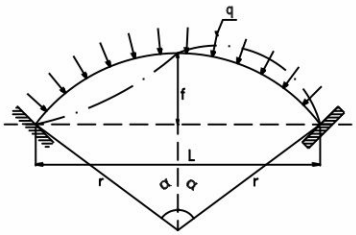
- Vòm không khớp (Hình 1b) $N_{th} = \left(k^2 - 1\right) \frac{EI}{r^2}$, trong đó k thu được từ phương trình $tgk\alpha = ktg\alpha$

- Vòm ba khớp (Hình 1c), $N_{th} = \left(\frac{4v^2 - \alpha^2}{\alpha^2}\right) \frac{EI}{r^2}$, trong đó $v = \frac{k\alpha}{2}$

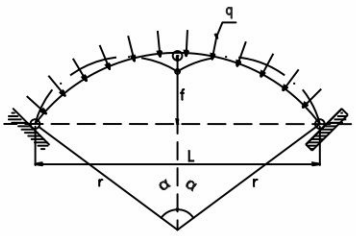
- Vòm một khớp (Hình 1d) $N_{th} = \left(k_1^2 - 1\right) \frac{EI}{r^2}$, trong đó $k_1$ tính từ [1]



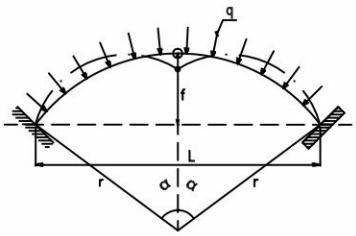

***Hình 1a.*** *Vòm hai khớp chịu lực phân bố đều*




***Hình 1b.*** *Vòm không khớp chịu lực phân bố đều*




***Hình 1c.*** *Vòm ba khớp chịu lực phân bố đều*




***Hình 1d.*** *Vòm một khớp chịu lực phân bố đều*

Thống nhất bốn công thức trên thu được kết quả:

$$N_{th} = K_1 \frac{EI}{r^2}, q_{th} = K_1 \frac{EI}{r^3}, \quad (1)$$

trong đó: $K_1$ là phụ thuộc điều kiện liên kết (số khớp), được cho trong Bảng 1

***Bảng 1.*** *Giá trị $K_1$ ứng với các góc mở của vòm*

| 2α | Vòm hai khớp | Vòm không khớp | Vòm ba khớp | Vòm một khớp |
|---|---|---|---|---|
| π/6 | 143 | 294 | 108 | 162 |
| π/3 | 35 | 73,34 | 27,08 | 40,2 |
| π/2 | 15 | 32,4 | 12 | 17,4 |
| 2π/3 | 8 | 18,14 | 6,76 | 10,2 |
| 5π/6 | 4,76 | 11,5 | 4,32 | 4,56 |
| π | 3 | 8 | 3 | 4,61 |
| 4π/3 | 2,25 | 4,59 | --- | --- |

Để tìm công thức tổng quát tiện lợi cho tính toán, tiến hành lập công thức tính ứng suất tới hạn từ (1) như sau:

$$\sigma_{th} = \frac{N_{th}}{A} = K_1 \frac{EI}{r^2 A},$$

Sử dụng quan hệ $\frac{I}{A} = i^2, S_0 = \alpha r$ trong đó: i là bán kính quán tính của tiết diện; $S_o$ là một nửa chiều dài trục vòm.

Kết quả thu được: $\sigma_{th} = K_1 \frac{\alpha^2 i^2 E}{S_0^2}$, (2)

Đặt: $\tilde{\mu} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{K_1}}$, (3)

Hệ số $\tilde{\mu}$ phụ thuộc góc mở 2α, liên kết khớp ở vòm, gọi là hệ số liên kết biến thể.

Đặt: $\tilde{\lambda} = \frac{\pi S_0}{i\alpha\sqrt{K_1}} = \frac{\tilde{\mu} S_0}{i}$, (4)

$\tilde{\lambda}$ phụ thuộc chiều dài trục, tiết diện, góc mở, liên kết khớp của vòm, gọi là độ mảnh biến thể của vòm. Kết hợp (2), (3), (4) công thức tính ứng suất tới hạn như sau:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\tilde{\lambda}^2} \quad (5)$$

***2.2 Giới hạn áp dụng công thức ứng suất tới hạn***

Giới hạn sử dụng công thức (5) là vòm phải làm việc trong giai đoạn đàn hồi và vật liệu tuân theo Định luật Húc, tức là ứng suất tới hạn phải nhỏ hơn giới hạn tỷ lệ:

$$\sigma_{th} = K_1 \frac{\alpha^2 i^2 E}{S_0^2} \le \sigma_{tl}, \quad (6)$$

Hay: $\frac{\pi^2 S_0^2}{i^2 \alpha^2 K_1 S_0^2} \ge \frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}$, khai căn hai vế thu được:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\pi S_0}{i\alpha\sqrt{K_1}} \ge \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} = \lambda_0, \quad (7)$$

trong đó: $\lambda_0$ là độ mảnh giới hạn

Vậy điều kiện để áp dụng công thức (5) là:

$$\tilde{\lambda} \ge \lambda_0 \quad (8)$$

Dựa vào Bảng 1 và (3) ta lập được Bảng 2.

***Bảng 2.*** *Giá trị $\tilde{\mu}$ của các loại vòm*

| 2α | Vòm hai khớp | Vòm không khớp | Vòm ba khớp | Vòm một khớp |
|---|---|---|---|---|
| π/6 | 1,0 | 0,70 | 1,150 | 0,94 |
| π/3 | 1,01 | 0,701 | 1,150 | 0,95 |
| π/2 | 1,03 | 0,703 | 1,155 | 0,96 |
| 2π/3 | 1,06 | 0,704 | 1,150 | 0,94 |
| 5π/6 | 1,10 | 0,707 | 1,150 | 0,94 |
| π | 1,14 | 0,707 | 1,155 | 0,93 |
| 4π/3 | 1,0 | 0,701 | ---- | --- |

Theo Bảng 2, có thể lấy gần đúng như sau:

Vòm hai khớp: $\tilde{\mu} = 1$; Vòm không khớp: $\tilde{\mu} = 0,7$; (9)

Vòm ba khớp: $\tilde{\mu} = 1,15$; Vòm một khớp: $\tilde{\mu} = 0,95$; (10)

***2.3 Tính ổn định vòm tròn ngoài miền đàn hồi***

Như đã biết đối với thanh thẳng chịu nén [7] đường hypecbol Ơle (trong miền đàn hồi) rất phù hợp với các số liệu thực nghiệm nhưng ra ngoài miền đàn hồi các số liệu thực nghiệm bị phân tán khá nhiều. Lý do là trong miền đàn hồi ứng suất tới hạn với độ mảnh xác định chỉ phụ thuộc modun đàn hồi E, còn trong miền đàn dẻo ứng suất tới hạn bị thay đổi phụ thuộc biểu đồ $\sigma(\varepsilon)$ phụ thuộc các yếu tố "kích động" khác. Đối với vòm cũng tương tự như vậy [8]. Do đó có thể đề xuất những công thức gần đúng khác nhau để tính ứng suất tới hạn ngoài miền đàn hồi.

Với thanh thẳng, khi thanh có độ mảnh bé thì chọn $\lambda_1$ từ kết quả thí nghiệm. Với vòm, chọn $\lambda_1$ từ kết quả thí nghiệm về ổn định của vòm ngoài miền đàn hồi. Vậy:

Khi $\tilde{\lambda} \geq \lambda_0$ tính theo (5): $\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\tilde{\lambda}^2}$

Khi $0 \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda_1$ lấy $\sigma_{th} = \sigma_{ch}$.

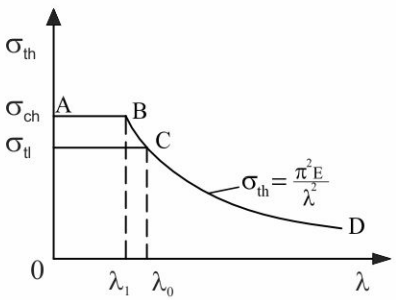
Khi $\lambda_1 \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda_0$ ta sử dụng công thức gần đúng:

$$\sigma_{th} = \tilde{a} - \tilde{b}\tilde{\lambda} \quad (11)$$

trong đó: $\tilde{a} = \frac{\sigma_{ch}\lambda_0 - \sigma_{tl}\lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_1}$, $\tilde{b} = \frac{\sigma_{ch} - \sigma_{tl}}{\lambda_0 - \lambda_1}$ (12)

Vẽ đồ thị mối quan hệ $\sigma_{th} \sim \tilde{\lambda}$ (Hình 2)

Ở đây tính $\lambda_0 = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{tl}}}$ còn $\lambda_1$ tương ứng khi $\sigma_{th}$ đạt $\sigma_{ch}$ được lấy từ thí nghiệm mất ổn định của vòm. Có thể lấy ví dụ, theo số liệu thí nghiệm [10] với thép Ss41:




*Hình 2. Quan hệ $\sigma_{th} \sim \tilde{\lambda}$*

$\sigma_{ch} = 24kN/cm^2$ (tương đương với thép CT3) cho ta $\lambda_1$=35

Ví dụ 1: Xét vòm hai khớp chịu lực phân bố đều q hướng tâm có chiều dài trục S=2So=6m, đường kính tiết diện d=10cm, góc mở 2α=180°, vật liệu là thép số 3 (CT3) có $\sigma_{tl}$=20KN/cm$^2$, $\sigma_{ch}$=24KN/cm$^2$, E=2.104KN/cm$^2$. Xác định ứng suất tới hạn.

Từ giả thiết, tính toán được $S_o$=300cm, α=π/2, K1=3, $\lambda_0$=100, $\lambda_1$=91, $\tilde{\mu}$=1, i=d/4=2,5cm.

Vì vậy: $\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\mu}S_0}{i} = \frac{1.300}{2,5} = 120 > \lambda_0$

Sử dụng công thức (5) để tính ứng suất tới hạn:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi E}{\tilde{\lambda}^2} = \frac{\pi^2 2.10^4}{120^2} = 13,7kN/cm^2$$

- Tính toán với vòm có chiều dài trục S=4m. Khi đó:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\mu}S_0}{i} = \frac{1.200}{2,5} = 80 < \lambda_0$$

Trường hợp này không áp dụng được (5) mà sử dụng (11) để tính $\sigma_{th}$. Với $\lambda_1$= 35 [10]

$$\tilde{a} = \frac{\sigma_{ch}\lambda_0 - \sigma_{tl}\lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_1} = \frac{24.100 - 20.35}{100 - 35} = 26,15kN/cm^2$$

$$\tilde{b} = \frac{\sigma_{ch} - \sigma_{tl}}{\lambda_0 - \lambda_1} = \frac{24 - 20}{100 - 35} = 0,06\,kN/cm^2$$

$$\sigma_{th} = \tilde{a} - \tilde{b}\tilde{\lambda} = 26,15 - 0,06.80 = 21,35kN/cm^2$$

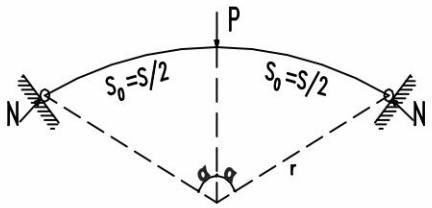
Tính toán với vòm có chiều dài trục S=1,4m

$$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\mu}S_0}{i} = \frac{1.70}{2,5} = 28 < \lambda_0$$

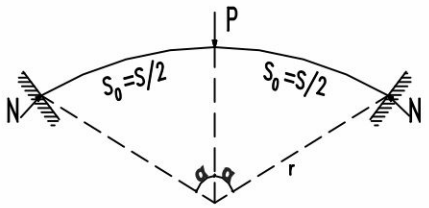
Vì vậy $\sigma_{ch} = \sigma_{th} = 24kN/cm^2$

***2.4 Vòm tròn chịu lực tập trung***

Trường hợp lực tập trung đặt tại giữa vòm tròn, trong [9] đã đưa ra công thức lực tới hạn nén dọc trục cho vòm hai khớp và vòm không khớp có α= π/2 như sau (Hình 3a và 3b):




***Hình 3a.*** *Vòm hai khớp*




***Hình 3b.*** *Vòm không khớp*

- Vòm hai khớp: $N_{th} = \frac{\pi^2 EI}{S_0^2}$, (13)

- Vòm không khớp: $N_{th} = \frac{(1{,}43\pi)^2 EI}{S_0^2}$, (14)

Nhận thấy hai công thức (13), (14) hầu như trùng với trường hợp vòm hai khớp và vòm không khớp ở (1) chịu tải trọng phân bố đều hướng tâm. Khi sử dụng Bảng 1 tính $K_1$.

Thật vậy, với vòm không khớp:

$$N_{th} = K_1 \frac{EI}{r^2} = K_1 \frac{\alpha^2 EI}{S_0^2} = 8\frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{S_0^2} = \left(\sqrt{2}\pi\right)^2 \frac{EI}{S_0^2} = (1{,}42\pi)^2 \frac{EI}{S_0^2}$$ trùng với (14)

Trường hợp vòm hai khớp:

$$N_{th} = \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1\right)\frac{EI}{r^2}$$

Với những vòm thoải khi f/l ≤ 1/5, góc α nhỏ so với π [3], có thể bỏ qua giá trị 1 so với $\frac{\pi^2}{\alpha^2}$ .Khi đó $N_{th} = \frac{\pi^2 EI}{\alpha^2 r^2} = \frac{\pi^2 EI}{S_0^2}$ trùng với (13).

Như vậy có thể xem (8) cũng là điều kiện áp dụng các công thức (13), (14) cho vòm tròn chịu lực tập trung đặt tại giữa vòm.

## 3. Kết luận

- Với việc đưa ra khái niệm hệ số liên kết biến thể $\tilde{\mu}$ và độ mảnh biến thể $\tilde{\lambda}$, bài báo đã đề xuất một phương pháp tính ổn định của vòm tròn với số khớp khác nhau gồm công thức tính ứng suất tới hạn và giới hạn áp dụng chúng. Cụ thể là:

- Trong miền đàn hồi với $\tilde{\lambda} \geq \lambda_0$ sử dụng công thức $\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\tilde{\lambda}^2}$ trong đó $\tilde{\lambda}$ tính theo (4),$\lambda_0$ tính theo (7).

- Ngoài miền đàn hồi với $\lambda_1 \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda_0$ ứng suất tới hạn tính theo (11) $\sigma_{th} = \tilde{a} - \tilde{b}\tilde{\lambda}$ với $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ phụ thuộc $\sigma_{th}$, $\sigma_{ch}$, $\lambda_1$, $\lambda_0$theo (12). Khi $\tilde{\lambda} \leq \lambda_1$thì lấy $\sigma_{th} = \sigma_{ch}$ , $\lambda_1$lấy từ kết quả thí nghiệm ổn định của vòm.

- Trường hợp tính toán ổn định cho các vòm có hình dạng, chịu tải phức tạp, vòm có độ cứng thay đổi… phải sử dụng phương pháp số để giải và không thuộc phạm vi áp dụng của bài báo này.

**Tài liệu tham khảo**


1. Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình (2002), *Ổn định công trình*, NXB Khoa học và Kỹ thuật.

2. Nguyễn Hoàng Nam (2014), *"Ổn định của vòm có độ cứng thay đổi"*, Luận văn thạc sỹ Kỹ thuật, Trường Đại học Xây dựng.

3. A.F.Xmirnov (1984), *Dynamic and Stability of Structures, Building publishers Moscow (in Russian).*

4. Y.L.Pi, M.A.Bradford, T.L.Francis (2008), *Advanced steel construction*, Vol.4, No.4.

5. Y.L.Pi, N.S.Trahair (1999), "In-plane buckling and design of steel arches", *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol.125, No.11.

6. Y.L.Pi, Bradford M.A (2004), *In-plane strength and design of fixed steel I. section arches, engineering structures*, Vol.26, No.3.

7. A.C. Vonmir (1967), *The stability of deformable system Sci*, Publishers Moscow (in Russian).

8. Theodore V. Galambos (1998), *Guide to stability design criteria for metal structures, John Wiley & So New York.*

9. M.A. Braford (2002), "In-plane elastic stability of arches under a central concentrated load", *Journal of Engineering Mechanics*, 128 (7).