

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG CỦA TẤM SANDWICH NANO GRAPHENE ĐÀN HỒI-ĐIỆN-TỬ ĐẶT TRÊN NỀN ĐÀN HỒI WINKLER-PASTERNAK

Vũ Văn Thắm^{a,*}

^a*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,
55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 28/10/2024, Sửa xong 27/02/2025, Chấp nhận đăng 29/4/2025

Tóm tắt

Bài báo phát triển một mô hình giải tích dựa trên lý thuyết tấm bậc cao bốn ẩn chuyển vị để phân tích dao động của tấm sandwich có lớp lõi composite nano graphene và hai lớp bề mặt là vật liệu đàn hồi-điện-từ (magneto-electro-elastic) có chứa các vi bọt rỗng. Tấm được đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak. Vật liệu đàn hồi-điện-từ được giả thiết có cơ tính biến thiên (FGMEE) tuân theo quy luật hàm lũy thừa. lớp lõi composite gia cường graphene (GPL) với cơ tính tính toán theo mô hình Halpin-Tsai cải tiến. Phương trình cân bằng thiết lập từ nguyên lý Hamilton, giải bằng phương pháp Navier. Kết quả được kiểm chứng với nghiên cứu trước đó, đồng thời khảo sát ảnh hưởng của thông số vật liệu, điện-từ trường ngoài và các kích thước hình học đến tần số dao động.

Từ khóa: phân tích dao động; tấm đàn hồi-điện-từ; vi bọt rỗng; lý thuyết tấm bậc cao bốn ẩn chuyển vị; nền đàn hồi Winkler-Pasternak.

VIBRATION ANALYSIS OF MAGNETO-ELECTRO-ELASTIC SANDWICH PLATES WITH GRAPHENE NANOPATELETS CORE RESTING ON WINKLER – PASTERNAK ELASTIC FOUNDATION

Abstract

This paper develops an analytical model based on a four-variable higher-order plate theory to analyze the vibration of a sandwich plate with a nano-graphene composite core and two surface layers made of magneto-electro-elastic material containing porosities. The plate rests on a Winkler-Pasternak elastic foundation. The MEE material is assumed to be functionally graded (FGMEE) with properties varying according to a power-law distribution. The graphene-reinforced composite (GPL) core's mechanical properties are calculated using the modified Halpin-Tsai model. The governing equations are derived from Hamilton's principle and solved analytically via the Navier solution method. Results are validated by comparing them with previously published results, and parametric investigations assess the influences of material properties, external electromagnetic fields, and geometric dimensions on the plate's natural frequencies.

Keywords: vibration analysis; magneto-electro-elastic plate; porosities; the four-variable higher-order plate theory; Winkler-Pasternak foundation.

[https://doi.org/10.31814/stee.huice2025-19\(3V\)-04](https://doi.org/10.31814/stee.huice2025-19(3V)-04) © 2025 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Vật liệu composite polymer gia cường nano carbon với tính chất cơ học vượt trội đã được ứng dụng rộng rãi trong hàng không, ô tô, y sinh và xây dựng [1]. Trong các loại gia cường nano carbon, GPL nổi bật nhờ tỷ lệ diện tích bề mặt/khối lượng lớn và chi phí thấp [2]. Chỉ cần một lượng nhỏ GPL cũng cải thiện đáng kể tính chất cơ học của vật liệu nền polymer [3]. Khi GPL phân bố đồng đều hoặc ngẫu nhiên trong nền polymer, vật liệu được gọi là GPLRC (graphene platelet reinforced composite).

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: thamvv@huice.edu.vn (Thắm, V. V.)

Nếu hàm lượng GPL biến thiên liên tục theo chiều dày (FG-GPLRC), tính chất cơ học sẽ thay đổi trơn và liên tục.

Trong những năm gần đây, các nghiên cứu về phân tích tĩnh, ổn định và dao động riêng của kết cấu từ vật liệu GPL đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) và áp dụng dạng nghiệm Navier, Song và cs. đã tiến hành phân tích tĩnh và ổn định [4], dao động riêng và dao động cưỡng bức [5] của tấm FG-GPLRC với bốn cạnh liên kết tựa khớp. Jafari và Kiani [6] đã nghiên cứu dao động riêng của tấm FG-GPLRC dựa trên lý thuyết tựa đàn hồi ba chiều và nghiệm Navier. Guo và cs. [7] đã trình bày phương pháp IMLS-Ritz không phần tử để nghiên cứu dao động tự do của tấm composite nhiều lớp gia cường GPL. Reddy và cs. [8] đã phân tích dao động riêng của tấm FG-GPLRC bằng phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên lý thuyết FSDT. Thai và cs. [9] áp dụng phương pháp đẳng hình học để phân tích tĩnh, ổn định và dao động riêng của tấm FG-GPLRC.

Vật liệu đàn hồi điện từ (MEE) kết hợp hiệu ứng áp điện và từ giảo, tạo ra khả năng chuyển đổi năng lượng cơ-điện-từ. Nhờ những tính năng vượt trội này, vật liệu MEE có tiềm năng ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như cảm biến, kích thích, hệ thống thu năng lượng và hệ thống điều khiển tự động. Để tối ưu hóa khả năng ứng dụng và hiệu quả của kết cấu sử dụng vật liệu MEE, gần đây MEE đã được phát triển dưới dạng vật liệu có cơ tính biến thiên, được gọi là vật liệu FGMEE. Các nghiên cứu cho thấy, FGMEE có thể đạt được những đặc tính cơ học tối ưu nhất. Nhiều công trình gần đây tập trung phân tích ứng xử cơ học của kết cấu FGMEE, mở rộng tiềm năng ứng dụng. Vinyas và cs. đã phát triển một phương pháp phần tử hữu hạn (FE) để nghiên cứu ảnh hưởng của lớp trung gian áp điện [10] đến tần số dao động riêng của các tấm MEE. Theo tiếp cận giải tích, Liu [11] đã phân tích tĩnh tấm mỏng FGMEE dựa trên lý thuyết tấm cổ điển Kirchhoff. Li và cs. [12] đã phân tích dao động của tấm FGMEE đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak theo lý thuyết tấm bậc nhất (FSDT). Sử dụng lý thuyết tấm bậc ba của Reddy, Shooshtari và Razavi [13] đã phân tích dao động của tấm FGMEE với các điều kiện biên khác nhau và được đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak.

Kết cấu sandwich, với đặc tính nhẹ và hiệu quả, đang ngày càng được áp dụng rộng rãi nhờ vào những ưu điểm vượt trội của nó. Trong sản xuất vệ tinh, tàu vũ trụ, máy bay và các hệ thống vận tải khác, việc sử dụng vật liệu có tỷ lệ độ bền trên trọng lượng cao là yếu tố quan trọng. Một dạng kết cấu sandwich thông minh, kết hợp lớp lõi làm từ vật liệu composite gia cường nano cacbon như CNT hoặc GPL với lớp bề mặt bằng vật liệu thông minh như vật liệu áp điện hoặc vật liệu đàn hồi điện từ, có khả năng tận dụng những ưu điểm của từng loại vật liệu thành phần. Đã có một số nghiên cứu tuyến tính theo tiếp cận giải tích cho đối tượng kết cấu này. Ebrahimi và cs. [14] đã phân tích dao động của tấm sandwich composite CNT điện từ trường theo lý thuyết biến dạng cắt hàm lượng giác. Sử dụng lý thuyết tấm FSDT và dạng nghiệm Levy, Majidi-Mozafari và cs. [15] đã phân tích dao động riêng tấm sandwich FG-GPLRC áp điện với các điều kiện biên khác nhau. Dao động tự do và ổn định của tấm nano sandwich FGMEE lõi FGM đã được Zur và cs. [16] nghiên cứu sử dụng lý thuyết tấm bậc cao với bốn ẩn chuyển vị và lý thuyết đàn hồi phi cục bộ.

Các phương pháp chế tạo FGM (luyện kim bột, lắng đọng hơi, đúc ly tâm) tuy hiệu quả nhưng phức tạp và tốn kém. Quá trình thiêu kết dễ tạo lỗ rỗng do sự chênh lệch độ hóa rắn giữa các thành phần, tương tự khi dùng kỹ thuật thâm nhập nhiều bước, dẫn đến vật liệu FGM không hoàn hảo (PoFGM). Việc nghiên cứu ảnh hưởng của các lỗ rỗng này khi thiết kế kết cấu FGM là cần thiết để đảm bảo độ an toàn và chính xác, khiến PoFGM trở thành chủ đề được quan tâm. Ebrahimi và cs. [17] đã phân tích dao động của tấm FGMEE chứa các vi bọt rỗng (PoFGMEE) đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak theo lý thuyết bậc cao bốn ẩn chuyển vị (HSDT-4). Ảnh hưởng của điện, nhiệt và kiểu phân bố vi bọt rỗng đến tần số dao động của tấm FG áp điện với các điều kiện biên khác nhau được nghiên cứu bởi Barati và Zenkour [18] theo mô hình giải tích, lý thuyết HSDT-4 với hàm mô tả quy luật biến thiên

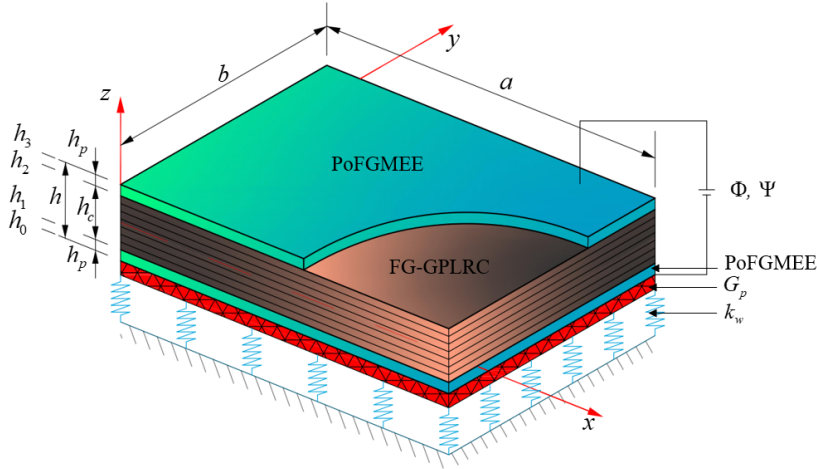
của ứng suất tiếp dưới dạng hàm cotang nghịch đảo.

Dựa trên đánh giá tổng quan các nghiên cứu, chưa có nghiên cứu nào phân tích dao động của tấm sandwich nano graphene điện từ trên nền đàn hồi. Bài báo này xây dựng mô hình phân tích dao động cho tấm sandwich với lớp lõi composite nano graphene và hai lớp bề mặt vật liệu PoFGMEE (tấm sandwich PoFGMEE-GPL) trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak, sử dụng lý thuyết tấm HSDT-4 cải tiến. So sánh kết quả của bài báo với các kết quả đã công bố cho thấy độ tin cậy của mô hình đề xuất. Từ đó, bài báo nghiên cứu ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu FGME, điện từ trường, kiểu và hệ số phân bố vi bọt rỗng, tỷ lệ và kiểu phân bố GPL, số lớp GPL và kích thước hình học đến tần số dao động của tấm sandwich PoFGMEE-GPL đặt trên nền đàn hồi.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Mô hình tấm sandwich PoFGMEE-GPL đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak

Xét tấm sandwich PoFGMEE-GPL đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak. Tấm có kích thước $a \times b \times h$ như thể hiện trong Hình 1. Các lớp bề mặt được tạo thành từ PoFGMEE, lớp lõi FG-GPLRC. Độ dày của mỗi lớp PoFGMEE được ký hiệu là h_p và độ dày của lớp lõi FG-GPLRC ký hiệu là h_c . Chúng được phân biệt theo hướng trục z bằng các tọa độ h_0, h_1, h_2 và h_3 .



Hình 1. Tấm sandwich PoFGMEE-GPL đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak

Lớp bề mặt PoFGMEE của tấm sandwich được chế tạo từ vật liệu BaTiO_3 và CoFe_2O_4 , tiếp xúc với thế từ $\Psi(x, y, z)$ và điện thế $\Phi(x, y, z)$. Các tính chất vật liệu hiệu dụng của PoFGMEE là các biến số theo phương chiều dày dựa trên quy luật lũy thừa [19]:

$$S(z) = S_l + (S_u - S_l) V_f - 0,5e_0 (S_u + S_l) \Upsilon \quad (1)$$

trong đó $S(z)$ là các tính chất hiệu dụng của vật liệu PoFGMEE bao gồm: hằng số đàn hồi C_{ij} , hệ số áp điện e_{ij} , độ điện thẩm κ_{ij} , hệ số áp từ q_{ij} , hệ số đàn hồi điện từ d_{ij} , hệ số từ thẩm μ_{ij} và khối lượng riêng $\rho(z)$; p là chỉ số tỷ lệ thể tích của vật liệu FGME; hệ số poisson $\nu(z)$ của vật liệu FGME lấy gần đúng là hằng số theo chiều dày lớp; S_u và S_l lần lượt là các tính chất của vật liệu tại mặt trên và dưới; e_0 là hệ số phân bố vi bọt rỗng; Υ là hàm xác định độ xốp (FGME hoàn hảo MEE-0): $\Upsilon = 0$; FGME có vi bọt rỗng phân bố đều (MEE-1) [20]: $\Upsilon = 1$; FGME có vi bọt rỗng phân bố không đều (MEE-2) [20]: $\Upsilon = (1 - (2|z|/h))$.

Tỷ lệ phần thể tích của lớp FGMEE V_f được tính như sau [21]:

$$V_f = \begin{cases} ((z - h_3)/(h_2 - h_3))^p, & h_2 \leq z \leq h_3, \text{ với lớp FGMEE phía trên} \\ ((z - h_0)/(h_1 - h_0))^p, & h_0 \leq z \leq h_1, \text{ với lớp FGMEE phía dưới} \end{cases} \quad (2)$$

Lớp lõi composite FG-GPLRC được tạo thành từ nhiều lớp N_L có cùng chiều dày. Nghiên cứu này xem xét bốn kiểu khác nhau để phân bố GPL theo chiều dày lớp lõi là [5]: UD, FG-O, FG-X và FG-V.

Tỷ phần khối lượng GPL trong mỗi lớp thứ k được xác định theo [5]:

$$\begin{aligned} \text{UD:} \quad & V_{GPL}^{(k)} = V_{GPL}^* \\ \text{FG-X:} \quad & V_{GPL}^{(k)} = 2V_{GPL}^* |2k - N_L - 1|/N_L \\ \text{FG-O:} \quad & V_{GPL}^{(k)} = 2V_{GPL}^* (1 - |2k - N_L - 1|/N_L) \\ \text{FG-V:} \quad & V_{GPL}^{(k)} = V_{GPL}^* (2k - 1)/N_L \end{aligned} \quad (3)$$

trong đó V_{GPL}^* là tổng tỷ phần khối lượng GPL, N_L là số lớp GPL.

Tỷ phần thể tích GPL trong lớp thứ k được xác định bởi [5]:

$$V_{GPL}^* = W_{GPL} [W_{GPL} + (\rho_{GPL}/\rho_m) (1 - W_{GPL})]^{-1} \quad (4)$$

với W_{GPL} là phần khối lượng của GPL; ρ_{GPL} và ρ_m lần lượt là khối lượng riêng của GPL và của vật liệu nền.

Các tính chất hiệu dụng của vật liệu GPLRC có thể được tính toán xấp xỉ theo phương pháp Halpin-Tsai và phương pháp hỗn hợp tương đương mở rộng như sau [5]:

$$E^{(k)} = \frac{3}{8} \left(\frac{1 + \xi_L \eta_L V_{GPL}^{(k)}}{1 - \eta_L V_{GPL}^{(k)}} \right) E_m + \frac{5}{8} \left(\frac{1 + \xi_T \eta_T V_{GPL}^{(k)}}{1 - \eta_T V_{GPL}^{(k)}} \right) E_m \quad (5)$$

trong đó η_L và η_T được định nghĩa bởi:

$$\eta_L = \frac{E_{GPL} - E_m}{E_{GPL} + \xi_L E_m}; \quad \eta_T = \frac{E_{GPL} - E_m}{E_{GPL} + \xi_T E_m} \quad (6)$$

với E_m , E_{GPL} và ν_m , ν_{GPL} lần lượt là mô đun đàn hồi Young, hệ số Poisson của vật liệu nền và của GPL; ξ_L , ξ_T là các thông số đặc trưng hình học của tấm GPL, xác định như sau:

$$\xi_L = a_{GPL}/t_{GPL}; \quad \xi_T = b_{GPL}/t_{GPL} \quad (7)$$

trong đó a_{GPL} , b_{GPL} và t_{GPL} lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều dày của tấm GPL.

2.2. Các phương trình cơ bản - Hệ phương trình chủ đạo

Để phân tích dao động của tấm sandwich nano graphene điện từ đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak, bài báo sử dụng lý thuyết HSDT-4 cải tiến.

Trường chuyển vị của một điểm bất kỳ thuộc tấm được giả thiết như sau [21–24]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z w_{b,x}(x, y, t) - f(z) w_{s,x}(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z w_{b,y}(x, y, t) - f(z) w_{s,y}(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (8)$$

trong đó u_0, v_0 lần lượt là chuyển vị tại mặt trung bình của tấm theo các phương x, y ; w_b và w_s là các chuyển vị ngang do mômen uốn và lực cắt gây ra. Theo [21-24] hàm đặc trưng cho quy luật biến thiên của ứng suất cắt: $f(z) = z(-1/8 + 3/2(z/h)^2)$ thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt ngang bị triệt tiêu tại bề mặt tấm.

Sự phân bố điện thế và từ trường theo chiều dày lớp PoFGMEE đang xét phải thỏa mãn phương trình Maxwell. Theo Wang [25], hàm điện thế và từ trường được giả thiết:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z, t) &= -\cos(\pi\hat{z}/h_p)\phi_0(x, y, t) + (2\hat{z}/h_p)V \\ \Psi(x, y, z, t) &= -\cos(\pi\hat{z}/h_p)\psi_0(x, y, t) + (2\hat{z}/h_p)\Omega\end{aligned}\quad (9)$$

trong đó V, Ω lần lượt là điện áp và từ trường bên ngoài đặt vào tấm PoFGMEE; ϕ_0, ψ_0 là điện áp và từ trường tại mặt trung bình của tấm; $\hat{z} = z - h_0$ với lớp FGME phía dưới và $\hat{z} = z + h_3$ với lớp FGME phía trên.

Trường biến dạng $\{\varepsilon\}$ được suy ra từ trường chuyển vị:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{0,x} - zw_{b,xx} - f(z)w_{s,xx}; & \varepsilon_y &= u_{0,y} - zw_{b,yy} - f(z)w_{s,yy} \\ \varepsilon_{xy} &= u_{0,y} + v_{0,x} - 2zw_{b,xy} - 2f(z)w_{s,xy}; & g(z) &= [1 - f'(z)] \\ \gamma_{yz} &= g(z)w_{s,y}; & \gamma_{xz} &= g(z)w_{s,x}\end{aligned}\quad (10)$$

Theo (9), véc tơ điện trường $\{E\} = \{E_x \ E_y \ E_z\}^T$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned}E_x &= -\Phi_{,x} = \cos(\pi\hat{z}/h_p)\phi_{0,x}; & E_y &= -\Phi_{,y} = \cos(\pi\hat{z}/h_p)\phi_{0,y} \\ E_z &= -\Phi_{,z} = -(\pi/h_p)\sin(\pi\hat{z}/h_p)\phi_0 - 2V/h_p\end{aligned}\quad (11)$$

Tương tự, véc tơ từ trường $\{H\} = \{H_x \ H_y \ H_z\}^T$ được tính theo:

$$\begin{aligned}H_x &= -\Psi_{,x} = \cos(\pi\hat{z}/h_p)\psi_{0,x}; & H_y &= -\Psi_{,y} = \cos(\pi\hat{z}/h_p)\psi_{0,y} \\ H_z &= -\Psi_{,z} = -(\pi/h_p)\sin(\pi\hat{z}/h_p)\psi_0 - 2\Omega/h_p\end{aligned}\quad (12)$$

Ứng suất và biến dạng của lớp lõi FG-GPLRC tuân theo định luật Hooke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(C)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^C & Q_{12}^C & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}^C & Q_{22}^C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55}^C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44}^C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}\quad (13)$$

trong đó $\sigma_x^C, \sigma_y^C, \sigma_{xy}^C$ và τ_{xz}^C, τ_{yz}^C lần lượt là các ứng suất pháp, ứng suất cắt trong mặt phẳng và ứng suất cắt ngang; Q_{ij}^C ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) là các hệ số độ cứng, xác định theo:

$$Q_{11}^C = \frac{E_1^C}{1 - \nu_{12}^C \nu_{21}^C}; \quad Q_{22}^C = \frac{E_2^C}{1 - \nu_{12}^C \nu_{21}^C}; \quad Q_{12}^C = \frac{\nu_{12}^C E_2^C}{1 - \nu_{12}^C \nu_{21}^C}; \quad Q_{44}^C = Q_{55}^C = Q_{66}^C = \frac{E_1^C}{2(1 + \nu_{12}^C)} \quad (14)$$

Với mỗi lớp PoFGMEE thứ k phía trên ($k = t$) và phía dưới ($k = d$) của tấm sandwich PoFGMEE-GPL tiếp xúc với tải cơ-điện-từ, các quan hệ ứng suất - biến dạng tuyến tính được định nghĩa bởi [17]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{e}_{31} \\ 0 & 0 & \tilde{e}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{e}_{15} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{e}_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{q}_{31} \\ 0 & 0 & \tilde{q}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{q}_{15} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{15} \\ \tilde{e}_{31} & \tilde{e}_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\kappa}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\kappa}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{d}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{d}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{d}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{q}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{q}_{15} \\ \tilde{q}_{31} & \tilde{q}_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{d}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{d}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{d}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\chi}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\chi}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\chi}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} \quad (17)$$

trong đó các hằng số rút gọn của PoFGMEE ở trạng thái ứng suất phẳng được tính theo:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{11} &= C_{11} - C_{13}^2/C_{33}; & \tilde{C}_{12} &= C_{12} - C_{13}^2/C_{33}; & \tilde{C}_{66} &= C_{66}; & \tilde{e}_{15} &= e_{15} \\ \tilde{e}_{31} &= e_{31} - e_{33}C_{13}/C_{33}; & \tilde{q}_{31} &= q_{31} - q_{33}C_{13}/C_{33}; & \tilde{q}_{15} &= q_{15}; & \tilde{d}_{11} &= d_{11} \\ \tilde{d}_{33} &= d_{33} + q_{33}e_{33}/C_{33}; & \tilde{\kappa}_{11} &= \kappa_{11}; & \tilde{\kappa}_{33} &= \kappa_{33} + e_{33}^2/C_{33}; & \tilde{\chi}_{11} &= \chi_{11} \\ \tilde{\chi}_{33} &= \chi_{33} + q_{33}^2/C_{33} \end{aligned} \quad (18)$$

Tích phân các biểu thức từ (13)–(17) theo chiều dày tấm ta được:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{b,xx} \\ -w_{b,yy} \\ -2w_{b,xy} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{11}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{s,xx} \\ -w_{s,yy} \\ -2w_{s,xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{31}^e \\ A_{31}^e \\ 0 \end{Bmatrix} \phi_0 + \begin{Bmatrix} A_{31}^m \\ A_{31}^m \\ 0 \end{Bmatrix} \psi_0 \\ \begin{Bmatrix} M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{b,xx} \\ -w_{b,yy} \\ -2w_{b,xy} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{11}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{s,xx} \\ -w_{s,yy} \\ -2w_{s,xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_{31}^e \\ E_{31}^e \\ 0 \end{Bmatrix} \phi_0 + \begin{Bmatrix} E_{31}^m \\ E_{31}^m \\ 0 \end{Bmatrix} \psi_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{11}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{11}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{b,xx} \\ -w_{b,yy} \\ -2w_{b,xy} \end{Bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{11}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{s,xx} \\ -w_{s,yy} \\ -2w_{s,xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{31}^e \\ F_{31}^e \\ 0 \end{Bmatrix} \phi_0 + \begin{Bmatrix} F_{31}^m \\ F_{31}^m \\ 0 \end{Bmatrix} \psi_0 \\
 \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{s,x} \\ w_{s,y} \end{Bmatrix} - A_{15}^e \begin{Bmatrix} \phi_{0,x} \\ \phi_{0,y} \end{Bmatrix} - A_{15}^m \begin{Bmatrix} \psi_{0,x} \\ \psi_{0,y} \end{Bmatrix} \\
 \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} \cos(\pi \hat{z}/h) dz &= E_{15}^e \begin{Bmatrix} w_{s,x} \\ w_{s,y} \end{Bmatrix} + F_{11}^e \begin{Bmatrix} \phi_{0,x} \\ \phi_{0,y} \end{Bmatrix} + F_{11}^m \begin{Bmatrix} \psi_{0,x} \\ \psi_{0,y} \end{Bmatrix} \\
 \int_{-h/2}^{h/2} D_z(\pi/h) \sin(\pi \hat{z}/h) dz &= A_{31}^e (u_{0,x} + v_{0,y}) - E_{31}^e \nabla^2 w_b - F_{31}^e \nabla^2 w_s - F_{33}^e \phi_0 - F_{33}^m \psi_0 \\
 \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \end{Bmatrix} \cos(\pi \hat{z}/h) dz &= E_{15}^m \begin{Bmatrix} w_{s,x} \\ w_{s,y} \end{Bmatrix} + F_{11}^m \begin{Bmatrix} \psi_{0,x} \\ \psi_{0,y} \end{Bmatrix} + X_{11}^m \begin{Bmatrix} \psi_{0,x} \\ \psi_{0,y} \end{Bmatrix} \\
 \int_{-h/2}^{h/2} B_z(\pi/h) \sin(\pi \hat{z}/h) dz &= A_{31}^m (u_{0,x} + v_{0,y}) - E_{31}^m \nabla^2 w_b - F_{31}^m \nabla^2 w_s - F_{33}^m \phi_0 - X_{33}^m \psi_0
 \end{aligned} \tag{19}$$

trong đó $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s, A_{ij}^s, A_{ij}^e, E_{ij}^e, F_{ij}^e, A_{ij}^m, E_{ij}^m, F_{ij}^m, X_{ij}^m$ là các hệ số độ cứng được xác định bởi:

$$\begin{aligned}
 (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) &= \int_{h_0}^{h_1} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \tilde{C}_{ij} dz \\
 &+ \int_{h_1}^{h_2} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) Q_{ij}(z) dz + \int_{h_2}^{h_3} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \tilde{C}_{ij} dz; \quad i, j = 1, 2, 3, 6 \\
 A_{ij}^s &= \int_{h_0}^{h_1} (g(z))^2 \tilde{C}_{ij} dz + \int_{h_1}^{h_2} (g(z))^2 (Q_{ij}(z))_k dz + \int_{h_2}^{h_3} (g(z))^2 \tilde{C}_{ij} dz; \quad i, j = 4, 5 \\
 \{A_{31}^e, E_{31}^e, F_{31}^e\} &= \int_{h_0}^{h_1} \tilde{e}_{31} \pi/h \sin(\pi \hat{z}/h) \{1, z, f(z)\} dz + \int_{h_2}^{h_3} \tilde{e}_{31} \pi/h \sin(\pi \hat{z}/h) \{1, z, f(z)\} dz \\
 \{A_{31}^m, E_{31}^m, F_{31}^m\} &= \int_{h_0}^{h_1} \tilde{q}_{31} \pi/h \sin(\pi \hat{z}/h) \{1, z, f(z)\} dz + \int_{h_2}^{h_3} \tilde{q}_{31} \pi/h \sin(\pi \hat{z}/h) \{1, z, f(z)\} dz \\
 \{A_{15}^e, E_{15}^e\} &= \int_{h_0}^{h_1} \{1, g(z)\} \tilde{e}_{15} \cos(\pi \hat{z}/h) dz + \int_{h_2}^{h_3} \{1, g(z)\} \tilde{e}_{15} \cos(\pi \hat{z}/h) dz \\
 \{A_{15}^m, E_{15}^m\} &= \int_{h_0}^{h_1} \{1, g(z)\} \tilde{q}_{15} \cos(\pi \hat{z}/h) dz + \int_{h_2}^{h_3} \{1, g(z)\} \tilde{q}_{15} \cos(\pi \hat{z}/h) dz \\
 \{F_{11}^e, F_{33}^e\} &= \int_{h_0}^{h_1} \{\tilde{\kappa}_{11} \cos^2(\pi \hat{z}/h), \tilde{\kappa}_{33} (\pi/h)^2 \sin^2(\pi \hat{z}/h)\} dz + \int_{h_2}^{h_3} \{\tilde{\kappa}_{11} \cos^2(\pi \hat{z}/h), \tilde{\kappa}_{33} (\pi/h)^2 \sin^2(\pi \hat{z}/h)\} dz \\
 \{F_{11}^m, F_{33}^m\} &= \int_{h_0}^{h_1} \{\tilde{d}_{11} \cos^2(\pi \hat{z}/h), \tilde{d}_{33} (\pi/h)^2 \sin^2(\pi \hat{z}/h)\} dz + \int_{h_2}^{h_3} \{\tilde{d}_{11} \cos^2(\pi \hat{z}/h), \tilde{d}_{33} (\pi/h)^2 \sin^2(\pi \hat{z}/h)\} dz \\
 \{X_{11}^m, X_{33}^m\} &= \int_{h_0}^{h_1} \{\tilde{\chi}_{11} \cos^2(\pi \hat{z}/h), \tilde{\chi}_{33} (\pi/h)^2 \sin^2(\pi \hat{z}/h)\} dz + \int_{h_2}^{h_3} \{\tilde{\chi}_{11} \cos^2(\pi \hat{z}/h), \tilde{\chi}_{33} (\pi/h)^2 \sin^2(\pi \hat{z}/h)\} dz
 \end{aligned} \tag{20}$$

Phương trình chuyển động của tấm PoFGMEE-GPL đặt trên nền đàn đàn hồi Winkler-Pasternak được thiết lập từ nguyên lý Hamilton mở rộng [17]:

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : N_{x,x} + N_{xy,y} &= I_0 \ddot{u} - I_1 \ddot{w}_{b,x} - I_3 \ddot{w}_{s,x} \\
 \delta v_0 : N_{y,y} + N_{xy,x} &= I_0 \ddot{v} - I_1 \ddot{w}_{b,y} - I_3 \ddot{w}_{s,y} \\
 \delta w_b : M_{x,xx}^b + 2M_{xy,xy}^b + M_{y,yy}^b - (N^E + N^H - k_p) \nabla^2 (w_b + w_s) \\
 &\quad - k_w (w_b + w_s) = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 (\ddot{u}_{,x} + \ddot{v}_{,y}) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - I_4 \nabla^2 \ddot{w}_s \\
 \delta w_s : M_{x,xx}^s + 2M_{xy,xy}^s + M_{y,yy}^s + Q_{xz,x}^s + Q_{yz,y}^s - (N^E + N^H - k_p) \nabla^2 (w_b + w_s) \\
 &\quad - k_w (w_b + w_s) = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_3 (\ddot{u}_{,x} + \ddot{v}_{,y}) - I_4 \nabla^2 \ddot{w}_b - I_5 \nabla^2 \ddot{w}_s \\
 \delta \phi_0 : \int_{-h/2}^{h/2} (D_{x,x} \cos(\pi \hat{z}/h) + D_{y,y} \cos(\pi \hat{z}/h) + D_z \pi/h \sin(\pi \hat{z}/h)) dz &= 0 \\
 \delta \psi_0 : \int_{-h/2}^{h/2} (B_{x,x} \cos(\pi \hat{z}/h) + B_{y,y} \cos(\pi \hat{z}/h) + B_z \pi/h \sin(\pi \hat{z}/h)) dz &= 0
 \end{aligned} \tag{21}$$

trong đó ($I_i (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$) là các mô men quán tính khối lượng được xác định bởi:

$$\begin{aligned}
 (I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) &= \int_{h_0}^{h_1} \rho_{MEE}(z) (1, z, f(z), zf(z), z^2, f(z)^2) dz \\
 &\quad + \int_{h_1}^{h_2} \rho_c(z) (1, z, f(z), zf(z), z^2, f(z)^2) dz \\
 &\quad + \int_{h_2}^{h_3} \rho_{MEE}(z) (1, z, f(z), zf(z), z^2, f(z)^2) dz
 \end{aligned} \tag{22}$$

Trong nghiên cứu này, giả định rằng lớp PoFGMEE chịu ảnh hưởng của điện áp ngoài V , từ trường ngoài Ω và không xét đến tải trọng cắt. Do đó, $N_{xy}^0 = 0$ và N_x^0, N_y^0 là các tải trọng tác dụng trong mặt phẳng do V và Ω gây ra, được định nghĩa theo [17]:

$$\begin{aligned}
 N_x^0 = N_y^0 = N^E + N^H; \quad N^E &= - \left(\int_{h_0}^{h_1} 2\bar{e}_{31} V/h_p dz + \int_{h_2}^{h_3} 2\bar{e}_{31} V/h_p dz \right) \\
 N^H &= - \left(\int_{h_0}^{h_1} 2\bar{q}_{31} \Omega/h_p dz + \int_{h_2}^{h_3} 2\bar{q}_{31} \Omega/h_p dz \right)
 \end{aligned} \tag{23}$$

3. Lời giải Navier

Trong trường hợp tấm sandwich PoFGMEE-GPL chữ nhật liên kết khớp trên chu tuyến (SSSS), điều kiện biên thể hiện dưới dạng sau:

$$\begin{aligned}
 v_0 = w_b = w_s = N_x = M_x = \phi_0 = \psi_0 &= 0, \quad \text{tại } x = 0, a \\
 u_0 = w_b = w_s = N_y = M_y = \phi_0 = \psi_0 &= 0, \quad \text{tại } y = 0, b
 \end{aligned} \tag{24}$$

Các thành phần chuyển vị được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép, thỏa mãn điều kiện biên (24):

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y; & v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \\
 w_b &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y; & w_s &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \\
 \phi_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y; & \psi_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y
 \end{aligned} \tag{25}$$

trong đó ω là tần số dao động riêng (rad/s); $\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}, \phi_{mn}, \psi_{mn}\}^T$ là các hệ số của các thành phần chuyển vị cần xác định; $\alpha = m\pi/a, \beta = n\pi/b$; t là biến thời gian; $i^2 = -1$ là số phức.

Thay thế các biểu thức chuyển vị (25) vào các phương trình chuyển động (21) và sau đó thực hiện các phép biến đổi toán học, thu được phương trình dạng sau:

$$\left\{ \left[\bar{K} \right]_{6 \times 6} - \omega^2 \left[\bar{M} \right]_{6 \times 6} \right\} \{\Delta\} = \{0\} \tag{26}$$

trong đó các hệ số $\bar{k}_{ij}$ và $\bar{m}_{ij}$ của ma trận độ cứng kết cấu $\left[\bar{K} \right]_{6 \times 6}$ và ma trận khối lượng $\left[\bar{M} \right]_{6 \times 6}$ được trình bày trong Phụ lục. Tần số dao động của tấm sandwich PoFGMEE-GPL đặt trên nền đàn hồi được xác định bằng cách giải phương trình trị riêng: $\left| \left[\bar{K} \right]_{6 \times 6} - \omega^2 \left[\bar{M} \right]_{6 \times 6} \right| = 0$. Nghiệm của phương trình này là tần số góc dao động ω_{mn} ứng với dạng dao động (m, n) . Tần số dao động riêng cơ bản là tần số nhỏ nhất được xác định bởi: $\omega = \min \{\omega_{mn}\}$.

4. Kết quả số và thảo luận

Dựa trên mô hình giải tích đã xây dựng, tác giả lập trình bằng Matlab để tính toán tần số dao động của tấm sandwich PoFGMEE-GPL trên nền Winkler-Pasternak. Thông số vật liệu lớp bề mặt (CoFe_2O_4 , BaTiO_3) lấy theo [17], lớp lõi GPL composite theo [26].

4.1. Ví dụ kiểm chứng

Ba ví dụ so sánh được thực hiện để kiểm chứng độ chính xác của mô hình. So sánh đầu tiên là với tấm đơn lớp PoFGMEE ($\text{CoFe}_2\text{O}_4/\text{BaTiO}_3$), so với kết quả của Ebrahimi và cs. [17] sử dụng mô hình HSDT-4 với hàm ứng suất cắt dạng lượng giác kết hợp hàm mũ. Kết quả tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ được trình bày ở Bảng 1. Các tham số không thứ nguyên của nền Winkler (K_w), Pasternak (K_p) và $\bar{\omega}$ được tính theo:

$$K_w = k_w a^4 / (h^3 C_{11c}); \quad K_p = G_p a^2 / (h^3 C_{11c}); \quad \bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_{\text{CoFe}_2\text{O}_3} / C_{11\text{CoFe}_2\text{O}_3}} \tag{27}$$

So sánh thứ hai được thực hiện cho tấm đơn lớp FG-GPLRC. Bảng 2 trình bày kết quả tính và so sánh tần số dao động $\bar{\omega}$ với kết quả của Song và cs. [6], sử dụng mô hình giải tích dựa trên lý thuyết tấm bậc nhất FSDT.

So sánh thứ ba được thực hiện với tấm sandwich có lớp bề mặt FGM và lõi đẳng hướng. Bảng 3 trình bày kết quả tần số dao động $\bar{\omega}$ so với kết quả của Li và cs. [26] dùng lý thuyết đàn hồi ba chiều. Các so sánh trong Bảng 1–3 cho thấy sai số nhỏ, khẳng định độ tin cậy của mô hình và chương trình tính. Dựa trên đó, bài báo tiếp tục thực hiện các khảo sát mục tiếp theo.

Bảng 1. So sánh tần số dao động cơ bản không thứ nguyên $\tilde{\omega}$ của tấm PoFGMEE (CoFe₂O₄/BaTiO₃) đặt trên nền Winkler-Pasternak ($a = b = 100h$; $e_0 = 0,2$)

Kiểu FGMEE	$p = 0,2$		$p = 1$		$p = 5$	
	Bài báo	[17]	Bài báo	[17]	Bài báo	[17]
$V = 0; \Omega = -500; K_w = K_p = 0$						
MEE-1	3,23256	3,27061	3,34986	3,46440	3,74004	3,86939
MEE-2	3,37691	3,43608	3,47099	3,59537	3,79315	3,93172
$V = 500; \Omega = 0; K_w = K_p = 10$						
MEE-1	16,6259	16,6333	16,2308	16,2548	15,8826	15,9136
MEE-2	15,7313	15,7441	15,3926	15,4211	15,0933	15,1288

Bảng 2. So sánh tần số dao động cơ bản không thứ nguyên $\tilde{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$ của tấm FG-GPLRC ($W_{GPL} = 1\%$, $N_L = 10$, $a/h = 10$, $K_w = K_p = 0$)

Kiểu GPL	Mô hình	(m, n)				
		(1, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(3, 1)	(3, 2)
UD	[6]	0,1216	0,2895	0,4436	0,5400	0,6767
	Bài báo	0,1215	0,2893	0,4433	0,5397	0,6764
FG-O	[6]	0,1020	0,2456	0,3796	0,4645	0,5860
	Bài báo	0,1022	0,2468	0,3825	0,4687	0,5925
FG-X	[6]	0,1378	0,3249	0,4939	0,5984	0,7454
	Bài báo	0,1365	0,3186	0,4805	0,5799	0,7185
FG-V	[6]	0,1118	0,2673	0,4110	0,5013	0,6299
	Bài báo	0,1117	0,2672	0,4108	0,5011	0,6297

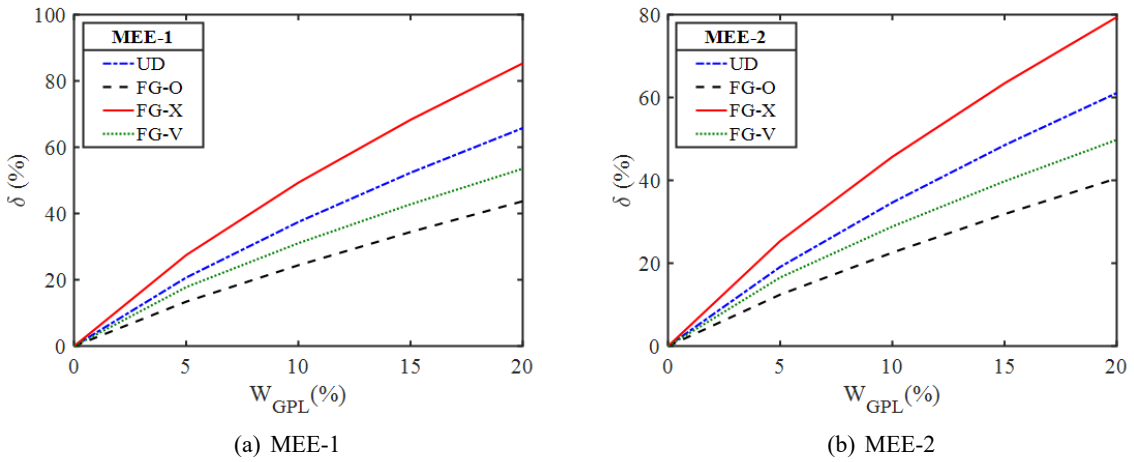
Bảng 3. So sánh tần số dao động cơ bản không thứ nguyên $\tilde{\omega} = \omega a^2/h \sqrt{\rho_0/E_0}$ của tấm sandwich FGM (2-1-2, $p = 1$, $a/h = 10$, $K_w = K_p = 0$)

h/a	Mô hình	Mode				
		1	2	3	4	5
0,01	[26]	1,32974	3,32324	3,32324	5,31543	6,64282
	Bài báo	1,33012	3,32416	3,32416	5,31684	6,64453
0,1	[26]	1,30182	3,15875	3,15875	4,91659	6,04048
	Bài báo	1,30121	3,15397	3,15397	4,90451	6,02215

4.2. Các ví dụ khảo sát

Trong các mục này, tần số dao động của các tấm sandwich PoFGMEE-GPL hình chữ nhật có kích thước $a \times b \times h$, đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak (Hình 1) được nghiên cứu và thảo luận chi tiết. Các công thức không thứ nguyên được lấy theo (27).

a. Ảnh hưởng của các đặc trưng vật liệu lớp lõi composite FG-GPLRC



Hình 2. Ảnh hưởng của W_{GPL} đến phần trăm thay đổi tần số (δ) của tấm PoFGMEE-GPL ($h_p = 0,1h_c$; $a = b = 50h$; $N_L = 10$; $V = \Omega = 0$; $K_w = K_p = 0$; $e_0 = 0,1$; $p = 1$)

Ảnh hưởng của phần khối lượng W_{GPL} đến phần trăm thay đổi tần số (δ) của tấm PoFGMEE-GPL được biểu diễn trên Hình 2. Trong đó, δ được tính theo:

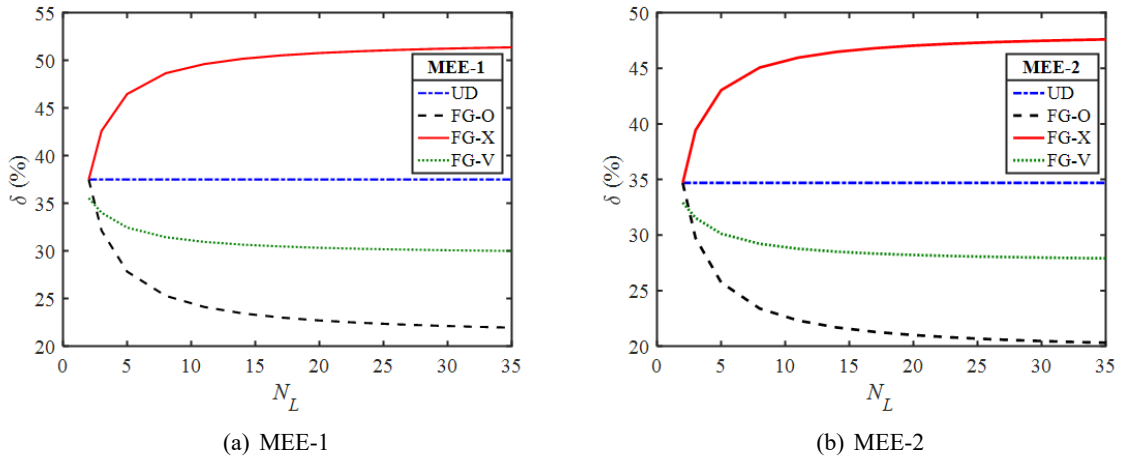
$$\delta(\%) = \frac{\bar{\omega}_c - \bar{\omega}_k}{\bar{\omega}_k} \times 100\% \quad (28)$$

với $\bar{\omega}_c$ và $\bar{\omega}_k$ lần lượt là tần số cơ bản không thứ nguyên khi lớp lõi FG-GPLRC có GPL và không có GPL. Kết quả cho thấy phân bố FG-X với lớp bề mặt MEE-1 cho tần số cao nhất, với độ chênh lệch δ lên tới khoảng 85%, trong khi phân bố FG-O cho tần số thấp nhất. Ngoài ra, Bảng 4 trình bày sự thay đổi phân bố GPL trong ba dạng vật liệu Po-FGMEE khi tấm đặt trên nền đàn hồi và chịu tác động điện-từ trường. Kết quả cũng chỉ ra rằng phân bố FG-X cho tần số tự nhiên cao nhất, trong khi FG-O có tần số thấp nhất. Điều này chứng tỏ việc tập trung GPL ở bề mặt thay vì vùng lõi giúp cải thiện độ cứng của tấm.

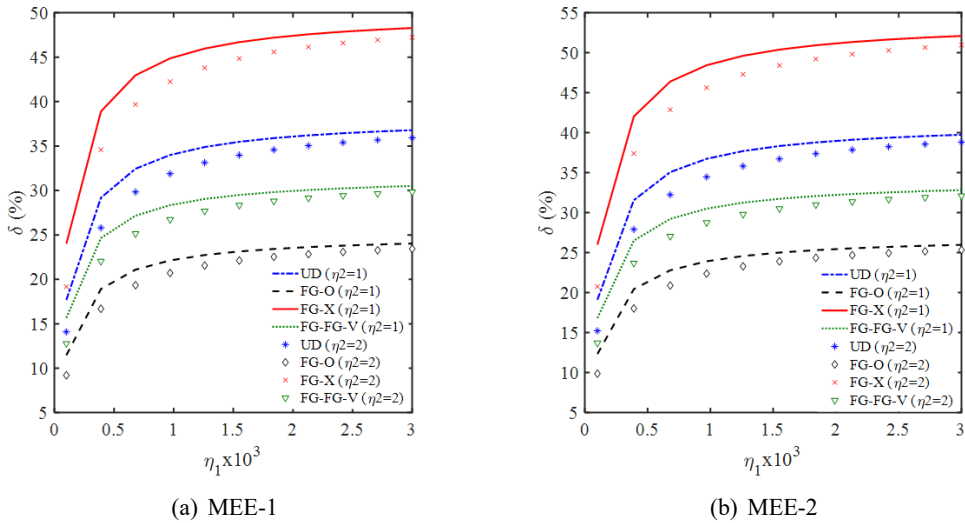
Bảng 4. Tần số dao động $\bar{\omega}$ của tấm sandwich PoFGMEE-GPL đặt trên nền đàn hồi ($h_p = 0,1h_c$; $a = b = 50h$; $W_{GPL} = 10\%$; $N_L = 10$; $V = \Omega = 300$; $K_w = 5$; $K_p = 50$)

FG-GPL	MEE ($e_0 = 0$)			MEE-1 ($e_0 = 0,1$)			MEE-2 ($e_0 = 0,1$)		
	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$
UD	20,575	20,445	20,317	21,093	20,954	20,817	20,625	20,495	20,365
FG-O	20,398	20,269	20,141	20,911	20,772	20,635	20,448	20,318	20,189
FG-X	20,749	20,619	20,490	21,272	21,133	20,996	20,799	20,669	20,540
FG-V	20,488	20,358	20,228	21,001	20,862	20,723	20,538	20,407	20,277

Ảnh hưởng của số lớp N_L đến tham số δ của tấm PoFGMEE-GPL được phân tích trong Hình 3. Với phân bố UD, tần số tự nhiên $\bar{\omega}$ không đổi theo N_L . Với FG-O và FG-V, tần số $\bar{\omega}$ giảm khi N_L tăng và ổn định khi $N_L \geq 20$. Ngược lại, FG-X cho tần số $\bar{\omega}$ tăng theo N_L và cũng gần như không đổi khi N_L vượt 20. Trong ba kiểu phân bố, FG-V chịu ảnh hưởng ít nhất từ sự thay đổi của N_L .



Hình 3. Ảnh hưởng của số lớp composite N_L đến tham số δ của tấm PoFGMEE-GPL ($h_p = 0,1h_c$; $a = b = 50h$; $W_{GPL} = 0,1$; $V = \Omega = 0$; $K_w = K_p = 0$; $e_0 = 0,1$; $p = 1$)



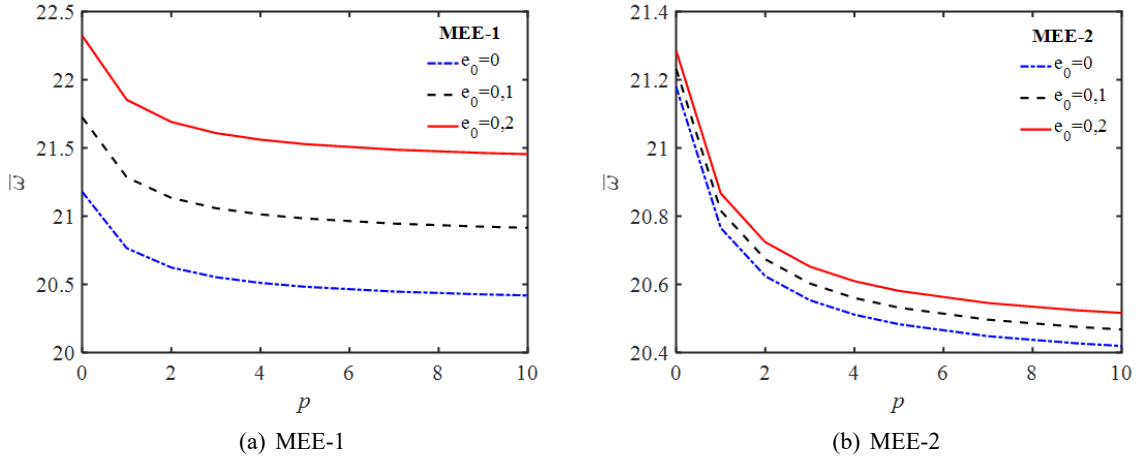
Hình 4. Ảnh hưởng của số lớp composite N_L đến tham số δ của tấm PoFGMEE-GPL ($h_p = 0,1h_c$; $W_{GPL} = 0,1$; $V = \Omega = 0$; $K_w = K_p = 0$; $e_0 = 0,1$)

Hình 4 trình bày ảnh hưởng của kích thước hình học của vật liệu gia cường GPL đến tần số cơ bản không thứ nguyên của tấm PoFGMEE-GPL, dựa trên tỷ lệ $\eta_1 = a_{GPL}/t_{GPL}$ (chiều dài/độ dày) và $\eta_2 = a_{GPL}/b_{GPL}$ (chiều dài/chiều rộng), với $a_{GPL} = 2,5 \mu m$. Tần số $\bar{\omega}$ tăng đáng kể khi η_1 đạt 1000 và tiếp tục tăng nhẹ khi giá trị này tăng thêm, cho thấy rằng GPL có ít lớp graphene cải thiện tần số hiệu quả hơn. Ngoài ra, tấm gia cường bằng GPL hình vuông ($\eta_2 = 1$) có tần số cao hơn so với tấm hình chữ nhật ($\eta_2 = 2$), nhờ diện tích tiếp xúc lớn hơn giữa GPL và vật liệu nền, giúp tăng độ cứng của tấm.

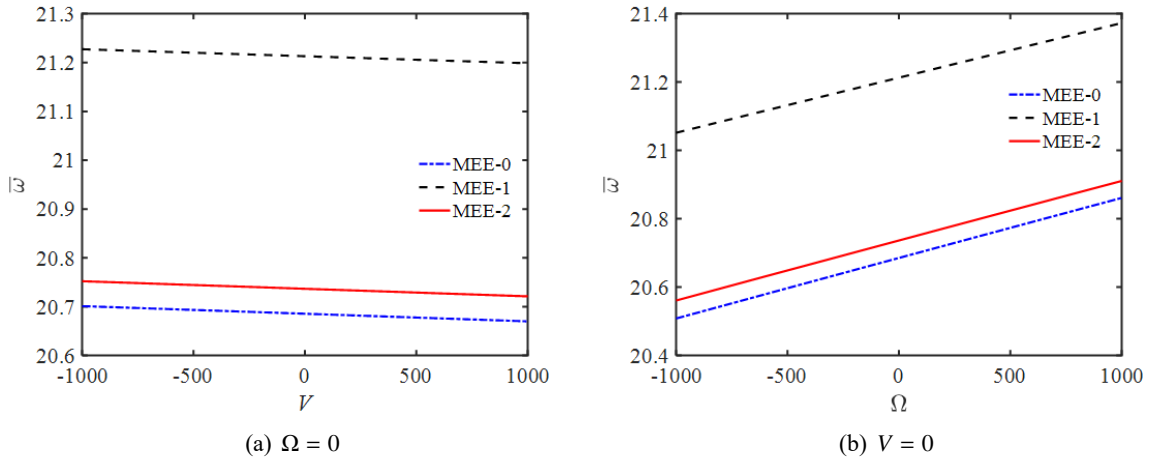
b. Ảnh hưởng của các đặc trưng vật liệu lớp bề mặt PoFGMEE

Hình 5 khảo sát sự biến thiên tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm sandwich PoFGMEE-GPL trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak theo tỷ lệ thể tích p và hệ số rỗng e_0 cho hai vật liệu bề mặt

MEE-1 và MEE-2. Kết quả cho thấy tần số $\bar{\omega}$ giảm khi p tăng (từ 0 đến 10) do sự chuyển đổi thành phần vật liệu từ CoFe_2O_4 sang hỗn hợp $\text{CoFe}_2\text{O}_4\text{-BaTiO}_3$ có mô đun đàn hồi thấp hơn, trong khi tần số lại tăng theo hệ số rỗng e_0 . Đặc biệt, ảnh hưởng của e_0 đến tần số thể hiện rõ rệt hơn với vật liệu MEE-1 so với MEE-2, chứng tỏ cả độ lớn và phân bố lỗ rỗng đều tác động đáng kể đến đặc tính dao động của tấm.



Hình 5. Ảnh hưởng của chỉ số p khi e_0 thay đổi đến tần số $\bar{\omega}$ của tấm PoFGMEE-GPL ($h_p = 0,1h_c$; $a = b = 50h$; $W_{GPL} = 0,1$; FG-X; $V = \Omega = 500$; $K_w = 5$; $K_p = 50$; $p = 1$)

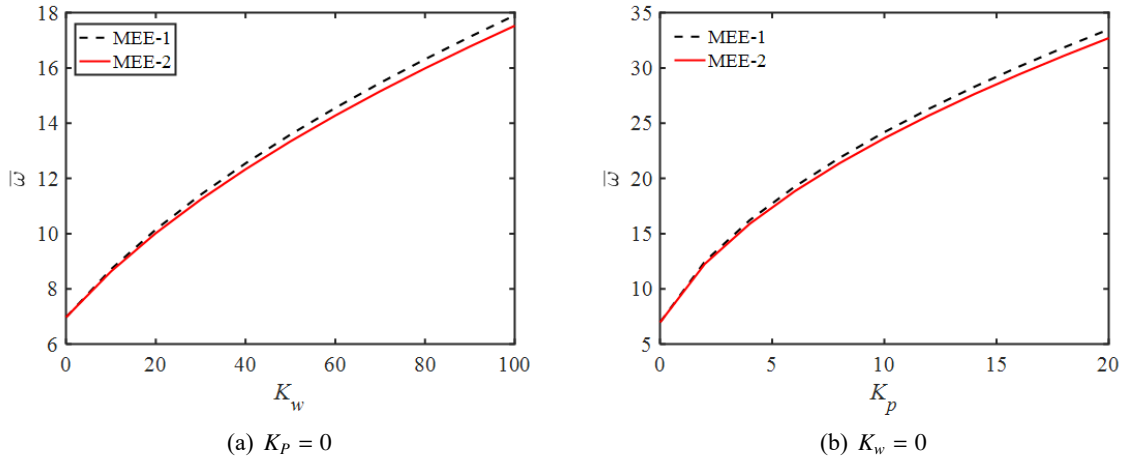


Hình 6. Ảnh hưởng của điện áp V và từ trường Ω đến tần số $\bar{\omega}$ của tấm PoFGMEE-GPL ($h_p = 0,1h_c$; $a = b = 50h$; $W_{GPL} = 0,1$; FG-X; $K_w = 5$; $K_p = 50$; $e_0 = 0,1$; $p = 1$)

Hình 6 minh họa ảnh hưởng của điện áp V (Hình 6(a)) và từ trường bên ngoài Ω (Hình 6(b)) lên tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm sandwich PoFGMEE-GPL. Kết quả cho thấy kiểu phân bố vi bọt rỗng ảnh hưởng đáng kể đến tần số dao động của các tấm PoFGMEE-GPL khi chịu tác động của cả trường điện và từ trường. Với điện áp hoặc từ trường không đổi, việc tăng hệ số vi bọt rỗng của lớp bề mặt FGME đều dẫn đến tăng tần số riêng $\bar{\omega}$. Ngoài ra, việc tăng điện áp làm giảm tần số riêng, còn việc tăng từ trường lại làm tăng tần số riêng của các tấm sandwich PoFGMEE-GPL.

c. Ảnh hưởng của các tham số độ cứng nền đàn hồi Winkler-Pasternak

Ảnh hưởng của các tham số độ cứng nền đàn hồi Winkler-Pasternak (K_w, K_p) đến tần số dao động riêng cơ bản đầu tiên $\bar{\omega}$ của tấm PoFGMEE-GPL được thể hiện trong Hình 7. Kết quả đúng như mong đợi, khi giá trị của K_w, K_p tăng lên, tần số không thứ nguyên cũng tăng với cả hai loại vật liệu lớp bề mặt MEE-1 và MEE-2. Ngoài ra, có thể thấy rằng, ảnh hưởng của tham số nền Pasternak lên tần số không thứ nguyên lớn hơn đáng kể so với tham số nền Winkler.

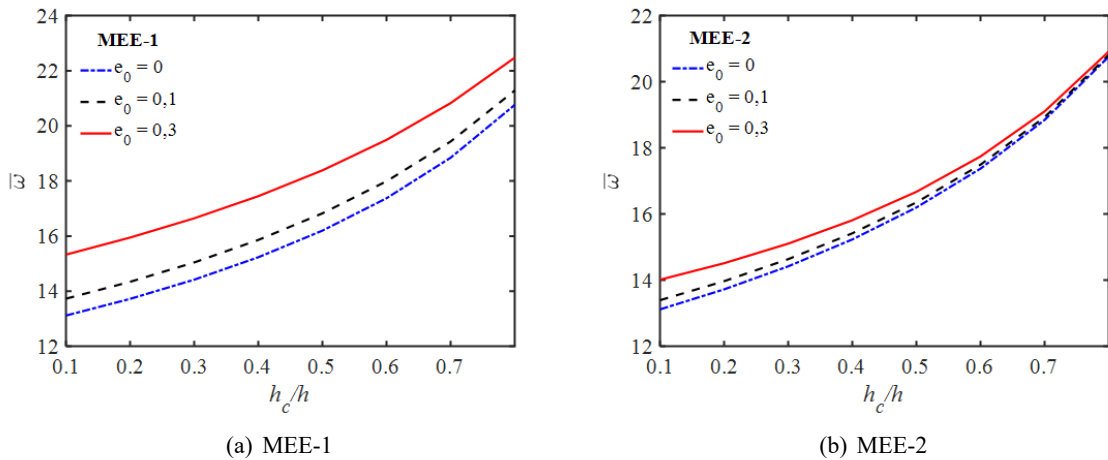


Hình 7. Ảnh hưởng của các tham số nền K_w, K_p đến tần số $\bar{\omega}$ của tấm PoFGMEE-GPL

($h_p = 0,1h_c$; $a = b = 50h$; $W_{GPL} = 0,1$; FG-X; $V = \Omega = 500$; $e_0 = 0,1$; $p = 1$)

d. Ảnh hưởng của kích thước hình học tấm sandwich PoFGMEE-GPL

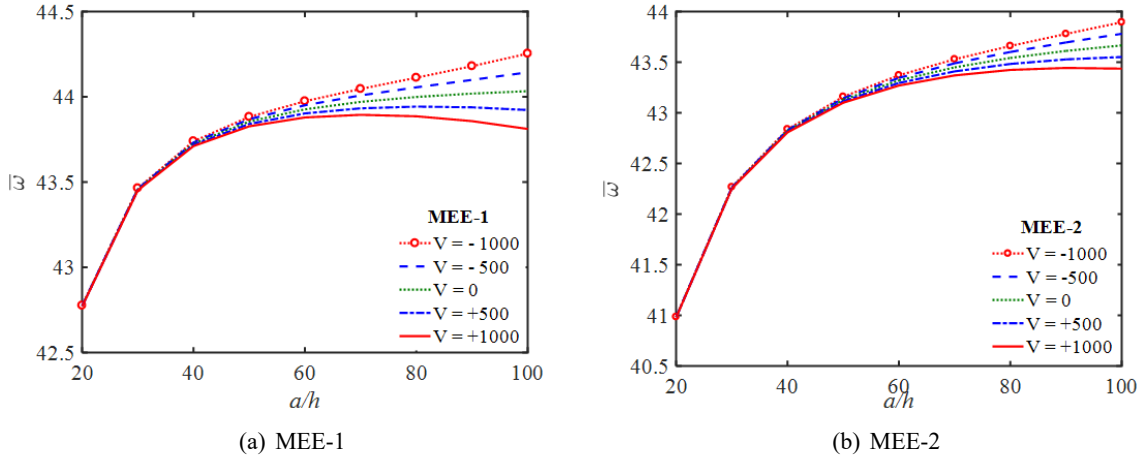
Hình 8 thể hiện sự ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dày lõi h_c/h (chiều dày h của tấm được cố định) đến tần số không thứ nguyên đầu tiên của tấm sandwich PoFGMEE-GPL đặt trên nền đàn hồi. Dễ nhận thấy rằng, đối với cả hai loại tấm PoFGMEE-GPL có lớp bề mặt là MEE-1 và MEE-2, khi chiều dày lõi tăng lên tần số $\bar{\omega}$ có xu hướng tăng.



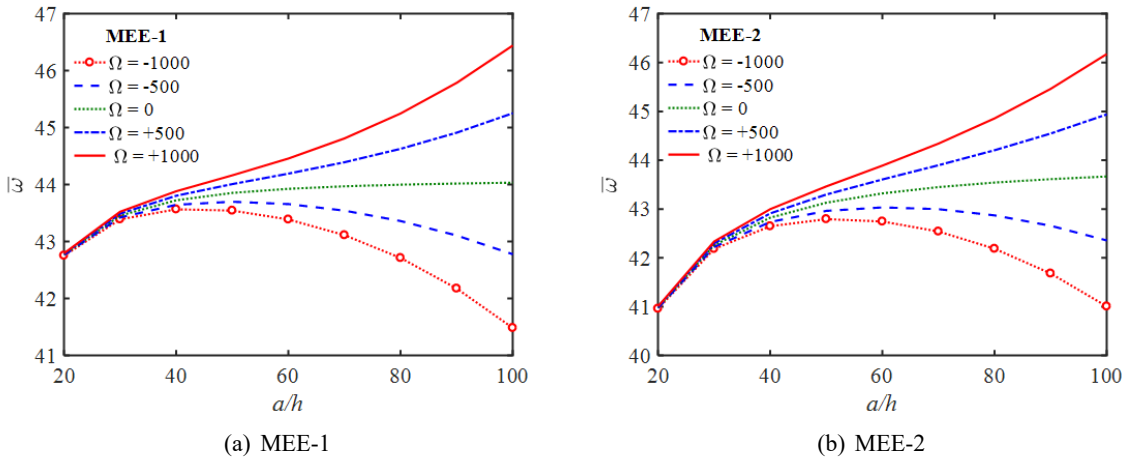
Hình 8. Ảnh hưởng của tỷ số h_c/h đến tần số $\bar{\omega}$ của tấm PoFGMEE-GPL

($h_p = 0,1h_c$; $a = b = 50h$; $W_{GPL} = 0,1$; $e_0 = 0,1$; FG-X; $V = \Omega = 500$; $K_w = 5$; $K_p = 50$; $p = 1$)

Sự ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tần số không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm FGMEE trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak khi điện áp và thế từ bên ngoài thay đổi dấu được minh họa qua Hình 9 và Hình 10. Kết quả cho thấy tần số $\bar{\omega}$ phụ thuộc vào tỷ lệ a/h và khi tác động điện áp âm, tần số $\bar{\omega}$ tăng lên, trong khi tác động thế từ âm lại làm tần số giảm xuống. Hơn nữa, sự chênh lệch giữa các giá trị tần số tương ứng với các mức điện áp và từ trường dương và âm càng trở nên rõ rệt hơn khi tỷ lệ a/h tăng.

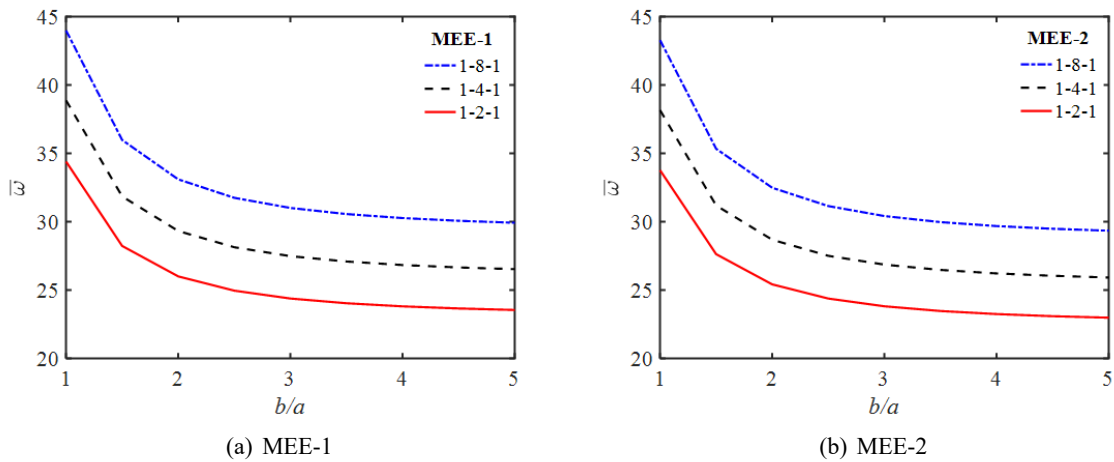


Hình 9. Ảnh hưởng của tỷ số a/h khi V thay đổi đến tần số $\bar{\omega}$ của tấm PoFGMEE-GPL ($h_p = 0,1h_c$; $a = b = 50h$; $W_{GPL} = 0,1$; $e_0 = 0,1$; FG-X; $\Omega = 0$; $K_w = 5$; $K_p = 50$)



Hình 10. Ảnh hưởng của tỷ số a/h khi Ω thay đổi đến tần số $\bar{\omega}$ của tấm PoFGMEE-GPL ($h_p = 0,1h_c$; $a = b = 50h$; $W_{GPL} = 0,1$; $e_0 = 0,1$; FG-X; $V = 0$; $K_w = 5$; $K_p = 50$)

Hình 11 mô tả ảnh hưởng của tỷ số b/a đến tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm sandwich. Kết quả phù hợp với thực tế, khi tỷ số b/a tăng, tần số $\bar{\omega}$ giảm đối với cả hai loại tấm PoFGMEE-GPL có lớp bề mặt là MEE-1 và MEE-2. Nguyên nhân là do khi tỷ số b/a tăng, diện tích bề mặt của tấm tăng, làm giảm độ cứng của tấm.



Hình 11. Ảnh hưởng của tỷ số b/a đến tần số $\bar{\omega}$ của tấm PoFGMEE-GPL
($W_{GPL} = 0,1$; $e_0 = 0,1$; FG-X; $V = \Omega = 500$; $K_w = 5$; $K_p = 50$)

5. Kết luận

Bài báo đã mô hình hóa dao động của tấm sandwich nano graphene điện từ trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak bằng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HSDT-4. Nghiên cứu xét đến hai kiểu phân bố vi bột rỗng lớp PoFGMEE bề mặt và bốn kiểu phân bố GPL trong lớp lõi composite. Kết quả cho thấy: thêm một lượng nhỏ GPL làm tăng tần số; kiểu FG-X cho tần số cao nhất, FG-O thấp nhất; UD không bị ảnh hưởng bởi số lớp GPL, trong khi FG-O và FG-V giảm theo số lớp, FG-X tăng và ổn định khi $N_L > 20$; tăng chỉ số p giảm tần số, tăng e_0 và các tham số nền làm tăng tần số, trong đó Pasternak ảnh hưởng mạnh hơn Winkler; tăng chiều dày lõi FG-GPLRC và áp điện âm làm tăng tần số, còn từ trường âm làm giảm tần số khi a/h tăng.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo trong đề tài mã số B2025-XDA-06.

Tài liệu tham khảo

- [1] Adam, H. (1997). [Carbon fibre in automotive applications](#). *Materials & Design*, 18(4-6):349-355.
- [2] Huang, X., Qi, X., Boey, F., Zhang, H. (2012). [Graphene-based composites](#). *Chemical Society Reviews*, 41(2):666-686.
- [3] Potts, J. R., Dreyer, D. R., Bielawski, C. W., Ruoff, R. S. (2011). [Graphene-based polymer nanocomposites](#). *Polymer*, 52(1):5-25.
- [4] Song, M., Yang, J., Kitipornchai, S. (2018). [Bending and buckling analyses of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets](#). *Composites Part B: Engineering*, 134:106-113.
- [5] Song, M., Kitipornchai, S., Yang, J. (2017). [Free and forced vibrations of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets](#). *Composite Structures*, 159:579-588.
- [6] Jafari, P., Kiani, Y. (2021). [Free vibration of functionally graded graphene platelet reinforced plates: A quasi 3D shear and normal deformable plate model](#). *Composite Structures*, 275:114409.
- [7] Guo, H., Cao, S., Yang, T., Chen, Y. (2018). [Vibration of laminated composite quadrilateral plates reinforced with graphene nanoplatelets using the element-free IMLS-Ritz method](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 142-143:610-621.
- [8] Muni Rami Reddy, R., Karunasena, W., Lokuge, W. (2018). [Free vibration of functionally graded-GPL reinforced composite plates with different boundary conditions](#). *Aerospace Science and Technology*, 78: 147-156.

- [9] Thai, C. H., Ferreira, A., Tran, T., Phung-Van, P. (2019). Free vibration, buckling and bending analyses of multilayer functionally graded graphene nanoplatelets reinforced composite plates using the NURBS formulation. *Composite Structures*, 220:749–759.
- [10] Vinyas, M., Sunny, K., Harursampath, D., Nguyen-Thoi, T., Loja, M. (2019). Influence of interphase on the multi-physics coupled frequency of three-phase smart magneto-electro-elastic composite plates. *Composite Structures*, 226:111254.
- [11] Liu, M.-F. (2011). An exact deformation analysis for the magneto-electro-elastic fiber-reinforced thin plate. *Applied Mathematical Modelling*, 35(5):2443–2461.
- [12] Li, Y., Zhang, J. (2013). Free vibration analysis of magneto-electro-elastic plate resting on a Pasternak foundation. *Smart Materials and Structures*, 23(2):025002.
- [13] Shooshtari, A., Razavi, S. (2016). Vibration analysis of a magneto-electro-elastic rectangular plate based on a higher-order shear deformation theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(3):554–572.
- [14] Ebrahimi, F., Farazmandnia, N., Kokaba, M. R., Mahesh, V. (2019). Vibration analysis of porous magneto-electro-elastically actuated carbon nanotube-reinforced composite sandwich plate based on a refined plate theory. *Engineering with Computers*, 37(2):921–936.
- [15] Majidi-Mozafari, K., Bahaadini, R., Saidi, A. R., Khodabakhsh, R. (2020). An analytical solution for vibration analysis of sandwich plates reinforced with graphene nanoplatelets. *Engineering with Computers*, 38(3):2107–2123.
- [16] Žur, K. et al. (2020). Free vibration and buckling analyses of magneto-electro-elastic FGM nanoplates based on nonlocal modified higher-order sinusoidal shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 182:107601.
- [17] Ebrahimi, F., Jafari, A., Barati, M. R. (2017). Vibration analysis of magneto-electro-elastic heterogeneous porous material plates resting on elastic foundations. *Thin-Walled Structures*, 119:33–46.
- [18] Barati, M. R., Zenkour, A. M. (2016). Electro-thermoelastic vibration of plates made of porous functionally graded piezoelectric materials under various boundary conditions. *Journal of Vibration and Control*, 24(10):1910–1926.
- [19] Doroushi, A., Eslami, M., Komeili, A. (2011). Vibration analysis and transient response of an FGPM beam under thermo-electro-mechanical loads using higher-order shear deformation theory. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 22(3):231–243.
- [20] Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., Karami, B. (2018). A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation. *Aerospace Science and Technology*, 72:134–149.
- [21] Vu, V.-T., Tran, H.-Q. (2024). Free vibration characteristics of stiffened sandwich plates with auxetic core and functionally graded piezoelectric face sheet. *Acta Mechanica*, 235(6):4029–4056.
- [22] Tham, V. V., Tran, H. Q., Tu, T. M. (2021). Vibration characteristics of piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced composite doubly-curved shells. *Applied Mathematics and Mechanics*, 42(6):819–840.
- [23] Tran, H.-Q., Vu, V.-T., Tran, M.-T. (2023). Free vibration analysis of piezoelectric functionally graded porous plates with graphene platelets reinforcement by pb-2 Ritz method. *Composite Structures*, 305:116535.
- [24] Thắm, V. V., Huân, D. T., Bình, C. T. (2020). Phân tích tĩnh kết cấu tấm chữ nhật E-FGM có gắn lớp vật liệu áp điện. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCN XD)-ĐHXDHN*, 14(4V):39–53.
- [25] Wang, Q. (2002). Axi-symmetric wave propagation in a cylinder coated with a piezoelectric layer. *International Journal of Solids and Structures*, 39(11):3023–3037.
- [26] Li, Q., Iu, V., Kou, K. (2008). Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 311(1–2):498–515.

A. Phụ lục

$$\begin{aligned}
 \bar{k}_{11} &= -\alpha^2 A_{11} - \beta^2 A_{66}; \quad \bar{k}_{12} = -\alpha\beta (A_{12} - A_{66}); \quad \bar{k}_{13} = \alpha^3 B_{11} + \alpha\beta^2 (B_{12} + 2B_{66}) \\
 \bar{k}_{14} &= B_{11}^s \alpha^3 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \alpha\beta^2; \quad \bar{k}_{15} = \alpha A_{31}^e; \quad \bar{k}_{16} = \alpha A_{31}^m; \quad \bar{k}_{22} = -\alpha^2 A_{66} - \beta^2 A_{22} \\
 \bar{k}_{23} &= \alpha^2 \beta (B_{12} + 2B_{66}) + \beta^3 B_{22}; \quad \bar{k}_{24} = B_{22}^s \beta^3 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \alpha^2 \beta; \quad \bar{k}_{25} = \beta A_{31}^e \\
 \bar{k}_{26} &= \beta A_{31}^m; \quad \bar{k}_{33} = -\alpha^4 D_{11} - 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66}) - \beta^4 D_{22} - K_1 + (N^E + N^H - K_2)(\alpha^2 + \beta^2) \\
 \bar{k}_{34} &= -\alpha^4 D_{11}^s - 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12}^s + 2D_{66}^s) - \beta^4 D_{22}^s - K_1 + (N^E + N^H - K_2)(\alpha^2 + \beta^2) \\
 \bar{k}_{35} &= -E_{31}^e (\alpha^2 + \beta^2); \quad \bar{k}_{36} = -E_{31}^m (\alpha^2 + \beta^2); \quad \bar{k}_{44} = -\alpha^4 H_{11}^s - \beta^4 H_{22}^s - 2\alpha^2 \beta^2 (H_{12}^s + 2H_{66}^s) \\
 &\quad - K_2 (\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2 A_{44}^s - \beta^2 A_{55}^s - K_1 + (N^E + N^H - K_2)(\alpha^2 + \beta^2) \\
 \bar{k}_{45} &= (A_{15}^e + F_{31}^e)(\alpha^2 + \beta^2); \quad \bar{k}_{55} = F_{11}^e (\alpha^2 + \beta^2) + F_{33}^e; \quad \bar{k}_{56} = F_{11}^m (\alpha^2 + \beta^2) + F_{33}^m \\
 \bar{k}_{56} &= X_{11}^m (\alpha^2 + \beta^2) + X_{33}^m; \quad \bar{m}_{11} = \bar{m}_{22} = I_0; \quad \bar{m}_{13} = -I_1 \alpha; \quad \bar{m}_{14} = -I_3 \alpha; \quad \bar{m}_{23} = -I_1 \beta; \quad \bar{m}_{24} = -I_3 \beta \\
 \bar{m}_{31} &= -I_1 \alpha; \quad \bar{m}_{33} = I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2); \quad \bar{m}_{34} = I_0 + I_4 (\alpha^2 + \beta^2); \quad \bar{m}_{44} = I_0 + I_5 (\alpha^2 + \beta^2) \\
 \bar{m}_{12} &= \bar{m}_{15} = \bar{m}_{16} = \bar{m}_{25} = \bar{m}_{26} = \bar{m}_{35} = \bar{m}_{36} = \bar{m}_{45} = \bar{m}_{46} = \bar{m}_{55} = \bar{m}_{56} = \bar{m}_{66} = 0
 \end{aligned}$$